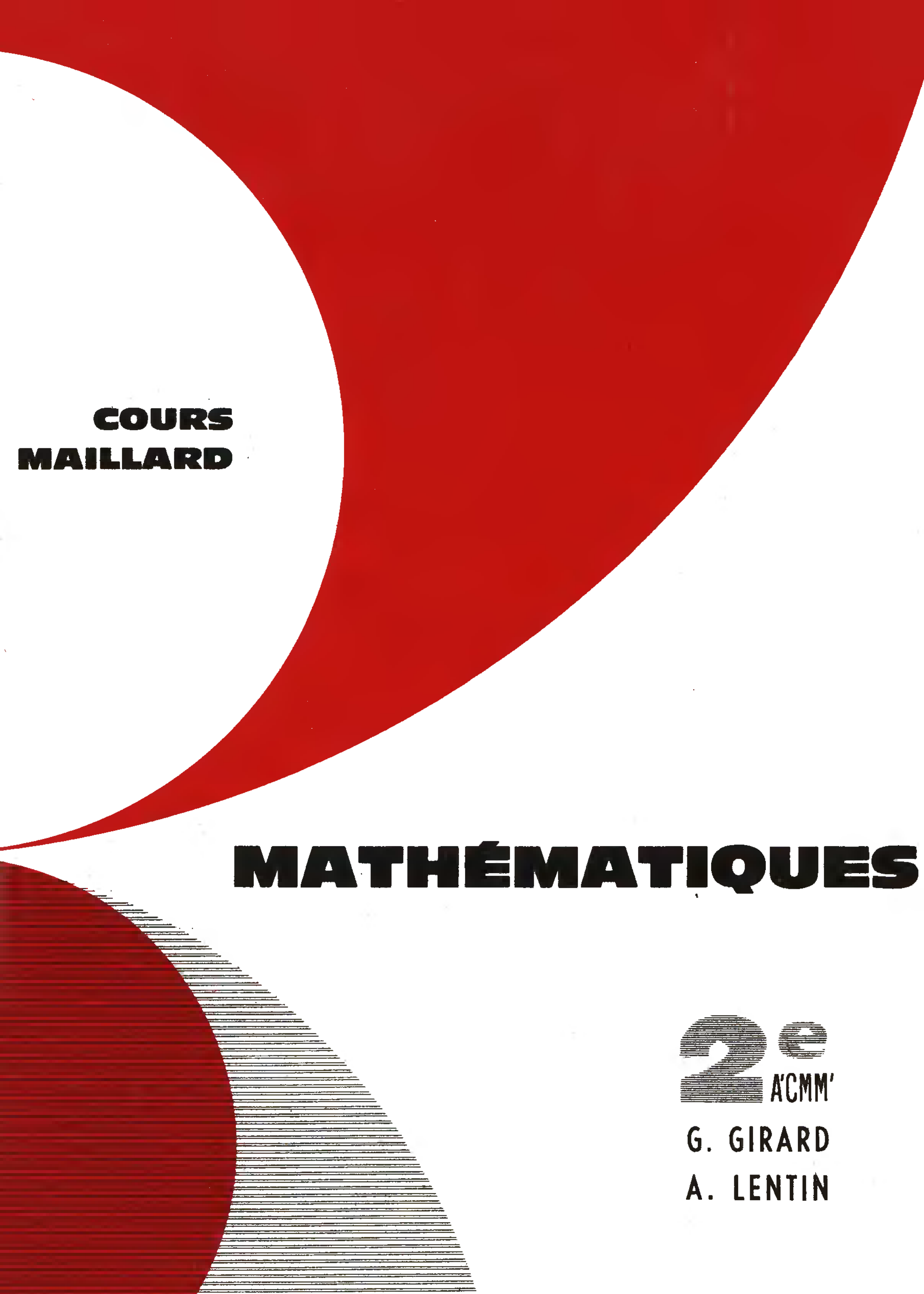


MATHÉMATIQUES

2e A'CMM'

G. GIRARD
A. LENTIN

HACHETTE

MATHÉMATIQUES

NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUES

conforme aux programmes de 1957, 1958 et 1960.

publié sous la direction de M. Roland Maillard.
Inspecteur général de l'Instruction publique.

Classes de Sixième : *Mathématiques,* par R. CAHEN
Un volume

Classes de Cinquième : *Mathématiques,* par R. CAHEN
Un volume

Classes de Quatrième : *Mathématiques,* par R. MAILLARD et E. CARALP
Un volume

Classes de Troisième : *Mathématiques,* par R. MAILLARD
R. CAHEN et E. CARALP
Un volume

Classes de Seconde A'CMM' : *Mathématiques,* par G. GIRARD et A. LENTIN
Un volume

COURS DE MATHÉMATIQUES

par

ROLAND MAILLARD
Inspecteur général
de l'Instruction publique.

et

ALBERT MILLET
Professeur au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'E. N. S. E. T.

Classes de Première classique A et B : *Mathématiques.* Un volume.

Classes de Première classique C et Moderne :

Algèbre et Trigonométrie. Un volume. *Géométrie.* Un volume.

Classe de Mathématiques :

Algèbre. Un volume.
Arithmétique. Un volume.
Cosmographie. Un volume.
Géométrie. Un volume.
Géométrie descriptive. Un volume.
Mécanique. Un volume.
Trigonométrie. Un volume.

Classe de Philosophie :

Cosmographie. Un volume. *Trigonométrie-Algèbre.* Un volume.
Mathématiques (Trigonométrie-Algèbre et Cosmographie) en un volume.

Classe de Sciences expérimentales :

Cosmographie. Un volume.
Mathématiques (moins la Cosmographie). Un volume.

CLASSIQUES HACHETTE

COURS DE MATHÉMATIQUES
SOUS LA DIRECTION DE M. ROLAND MAILLARD
Inspecteur général de l'Instruction publique

MATHÉMATIQUES



GEORGES GIRARD
ANDRÉ LENTIN
Professeurs agrégés
de Mathématiques

PROGRAMME DU 18 JUILLET 1960

CLASSIQUES
HACHETTE
79, Bd St Germain - Paris

EXTRAITS DES INSTRUCTIONS RELATIVES AUX PROGRAMMES DU 18 JUILLET 1960

Les programmes de mathématiques du Premier Cycle ont permis aux jeunes élèves de prendre contact, à partir de leur monde familier, avec un certain nombre de notions, avec quelques représentations symboliques d'êtres et de relations, avec les éléments d'un raisonnement logique. Ces connaissances, non négligeables, ne peuvent pas être considérées comme définitivement acquises et disponibles, car il faut tenir compte de l'âge des enfants, comme des difficultés et des défauts inhérents à tout enseignement collectif; il convient donc, au début du Second Cycle, de les reprendre pour les ordonner, les clarifier et les consolider.

Certains chapitres du nouveau programme des classes de Seconde A', C, M, M' répondent à cette exigence; parmi eux figure naturellement celui qui concerne la « géométrie dans l'espace » dont les éléments présentés sommairement dans la classe de Troisième doivent maintenant être étudiés de façon méthodique. [...]

L'initiation au raisonnement logique.

[...] C'est à l'enseignement du Second Cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve, à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles.

L'exposé des premiers éléments d'algèbre et de géométrie.

[...] La présentation des toutes premières notions pose, dès l'abord, un problème délicat, car la tentation est bien naturelle d'essayer de bâtir, dans l'abstrait, un édifice d'une parfaite rigueur. [...]

Un exposé strictement axiomatique, séparant totalement les êtres mathématiques de leur origine concrète, du cadre réel de leur création, ne peut guère donner de résultats valables en Seconde et en Première; mais il n'est pas exclu, bien au contraire, d'attirer l'attention, dès ce moment, sur la nature et la signification des définitions et des hypothèses que l'on adopte, sur les faits et les propriétés que l'on « admet » afin de réserver l'avenir et de faire comprendre que de nouvelles étapes restent à parcourir.

Importance du calcul numérique.

Le calcul numérique doit tenir, dans l'enseignement des mathématiques, une place de choix. S'il n'est mentionné dans le texte du programme que sous telle ou telle rubrique, il est bien évident que de nombreux problèmes fournissent l'occasion naturelle de proposer un exercice raisonnable de calcul. [...]

Les notions « modernes ». Le vocabulaire et le symbolisme.

Le libellé du programme ne fait pas explicitement mention de certaines notions simples sur les ensembles ni du vocabulaire actuellement admis pour les désigner : réunion, intersection, ensembles complémentaires, inclusion, appartenance.... Il n'est nullement question d'en proscrire l'emploi; les unes et les autres se rencontrent en fait très fréquemment, dans la plupart des théories; il convient de les dégager peu à peu, de les faire reconnaître, puis de les définir, à partir de nombreux exemples où elles interviennent naturellement. Ainsi apparaîtra leur intérêt par les applications qu'on peut en faire, par la simplification ou la clarification qu'elles sont susceptibles d'apporter dans une recherche ou dans un exposé.

D'autres notions, telles que celles qui touchent aux structures d'ensembles : groupes, anneaux, corps, pourront aussi être introduites, à condition que le terrain ait été d'abord soigneusement préparé; elles peuvent faciliter la présentation de certaines synthèses et permettre des comparaisons utiles pour l'avenir.

PRÉFACE

LE PRÉSENT OUVRAGE est conforme aux nouveaux programmes de Mathématiques des classes de Seconde A′, C, M et M′, prescrits par l'arrêté du 18 Juillet 1960.

Pour éviter les redites et souligner l'unité des Mathématiques, nous avons réuni en un seul volume Algèbre et Géométrie.

*L'*INTRODUCTION, *qui fait appel au simple bon sens des élèves plus qu'à leurs connaissances, a pour but immédiat de présenter les quelques signes et symboles logiques que l'on utilisera constamment dans le corps de l'ouvrage. Un but plus lointain, et sans doute plus important, est d'opérer un double transfert :*

— faire passer les règles de bon sens, que l'on applique plus ou moins instinctivement, du domaine de l'instinct au domaine de la conscience claire;

— faire ensuite passer ces règles du domaine de la conscience à celui des automatismes acquis.

Nous avons essayé de familiariser les élèves avec l'esprit des Mathématiques modernes, sans nous rendre esclaves d'un formalisme exagéré.

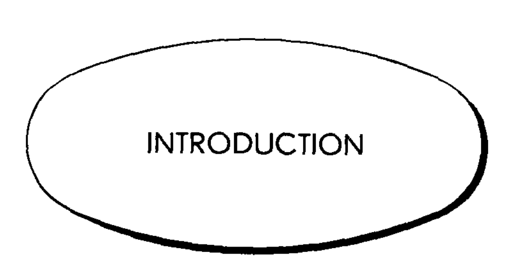
*Si l'exposition de l'*ALGÈBRE *témoigne plus immédiatement peut-être de cette préoccupation, on constatera aussi un souci constant de présenter la* GÉOMÉTRIE *d'une manière propre à éviter plus tard une revision « déchirante ». Les premiers linéaments sont tracés et les pierres d'attente posées en vue de la construction axiomatique que nous estimons souhaitable et utile au niveau de la classe de* Mathématiques.

On sait quelle extension considérable prend le CALCUL NUMÉRIQUE *dans la Science contemporaine, grâce aux machines. Sous son aspect moderne, il fait certain appel à la logique mathématique mais continue très évidemment d'utiliser les notions classiques sur lesquelles nous n'avons pas craint d'insister.*

On trouvera, à la fin de l'ouvrage, des tables de valeurs numériques et aussi un Lexique *rappelant les définitions de quelques expressions et mots importants ou nouveaux.*

Il paraît assurément difficile à l'heure actuelle de contenter tous ceux qui se préoccupent de l'enseignement des Mathématiques, et, à vouloir garder un juste milieu, on s'expose peut-être à recevoir des critiques sur les deux flancs.... Nous espérons cependant que notre effort sera acueilli avec sympathie et, en retour, nous recevrons avec reconnaissance toutes les observations qui nous permettront de servir mieux encore la cause qui nous est chère.

LES AUTEURS.



REVISION ALGÈBRE

REVISION GÉOMÉTRIE

ÉQUATIONS
INÉQUATIONS

LE CERCLE

GÉOMÉTRIE
DANS L'ESPACE

VECTEURS

FONCTIONS
GRAPHES

TRIANGLES SEMBLABLES
RELATIONS MÉTRIQUES
TRIGONOMÉTRIE

MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

UN PEU DE LOGIQUE

M. JOURDAIN. — Quoi! quand je dis, Nicole, apportez-moi mes pantoufles et me donnez mon bonnet de nuit, c'est de la prose?
LE MAITRE DE PHILOSOPHIE. — Oui, Monsieur.
M. JOURDAIN. — Par ma foi, il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que j'en susse rien....
(MOLIÈRE, *Le Bourgeois Gentilhomme.* Acte II, scène VI.)

I. L'IMPLICATION

1. Pourquoi de la logique? — S'il n'en est pas déjà conscient, le lecteur de ces pages découvrira bien vite que, chaque jour et depuis fort longtemps, il fait de la logique aussi naturellement que M. Jourdain disait de la prose.

Version à traduire, théorème à démontrer, question à régler dans notre vie quotidienne, autant d'occasions d'exercer nos facultés de logiciens. Sans doute, ne s'agit-il là que d'une logique aussi modeste en son genre que la prose domestique de M. Jourdain, mais, toute petite qu'elle est, cette logique gouverne notre pensée. C'est elle déjà qui nous permet d'employer à bon escient, en parlant ou en rédigeant, des mots ou tournures tels que :

un, une	*au moins un*	*si . . . alors*
le, la	*chaque*	*or . . ,*
les	*toujours*	*donc*
des	*parfois*	*réciproquement*

et bien d'autres encore.

Mais les mots du langage courant présentent souvent des ambiguïtés ou des obscurités. Ainsi dans le proverbe : *Un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire*, le premier article *un* veut dire un [sot] *quel qu'il soit* (et non pas *un seul* sot, ni *un certain* sot), on pourrait remplacer cet article par l'adjectif indéfini *tout.* Le second article *un* signifie *au moins un* (pas nécessairement *un seul*, mais pas *n'importe lequel*). En mathématiques, il convient de distinguer entre ces acceptions de l'article *un* et, plus généralement, entre les diverses significations des mots outils.

Pour obvier à ces ambiguïtés et obscurités du langage courant nous allons apprendre au lecteur l'usage de termes spécialisés et de quelques symboles qui aident à formuler clairement une pensée claire.

Les mots nouveaux se comprendront à simple lecture quand ils paraîtront pour la première fois au cours de cette introduction; de plus, un lexique placé en fin d'ouvrage permettra de retrouver facilement, lors d'un emploi ultérieur, telle définition qu'on aurait pu oublier.

2. L'hypothèse et la thèse (ou conclusion), l'implication.

S'il pleut sur mon jardin, mon gazon est arrosé.
Si un quadrilatère est un rectangle, les diagonales en sont égales.

Le simple bon sens pour la première, une démonstration pour la seconde, montrent que les phrases précédentes expriment des vérités.

Bien que ces phrases diffèrent par leur contenu, on reconnaît qu'elles sont coulées dans le même moule. Nous écrirons :

il pleut sur le jardin $\Longrightarrow$ le gazon est arrosé.
ABCD est un rectangle $\Longrightarrow$ $AC = BD$.

Le signe $\Longrightarrow$ traduit *une implication au sens courant.*

D'une façon générale, désignons par h et t deux affirmations qui peuvent, selon les cas, se réaliser ou non, être vraies ou fausses.

Ecrire $h \Longrightarrow t$, c'est poser que, quand h se produit (quand h est *vrai*), t se produit (t est vrai).

Dans la relation d'implication h s'appelle *l'hypothèse* et t la *thèse* (ou *conclusion*).

Le mot *thèse* signifie « proposition que l'on avance » et le préfixe *hypo-* a le sens de « au-dessous ». L'hypothèse apparaît donc comme une fondation capable de supporter l'édifice que constitue la thèse.

VOCABULAIRE. — On dit que h est pour t une *condition suffisante :*
Qu'il pleuve, et cela suffit pour que mon gazon soit arrosé.
Que ABCD soit un rectangle et cela suffit pour que $AC = BD$.

On dit que t est une *conséquence nécessaire* de h. L'adjectif *nécessaire* signifie « qui ne peut pas ne pas être ».

Peut-être comprendra-t-on mieux ce sens si nous disons que l'adverbe *nécessairement* est le mot propre que les élèves remplacent par « forcément ». C'est une erreur de leur part car il ne faut pas confondre la *nécessité logique* avec la « raison du plus fort ».

C'est par un abus de langage que l'on dit aussi que t est une *condition* nécessaire pour h.

Soulignons enfin le rôle et l'importance de la conjonction *si*; elle permet d'énoncer des vérités d'une façon indépendante des circonstances actuelles : ce que nous disions plus haut de la pluie et du gazon reste vrai quel que soit le temps qu'il fait au moment où nous prononçons cette phrase.

3. La déduction : son aspect le plus simple. — Je dois m'absenter et j'ai chargé mon voisin de me donner des nouvelles du pays. Je reçois de lui cette carte : « Il pleut sans arrêt depuis votre départ ». Je fais aussitôt, globalement sans doute, un raisonnement qui peut se détailler comme suit :

a) S'il pleut sur mon jardin, le gazon est arrosé.
b) Or il pleut.
c) Donc mon gazon est arrosé.

Schématiquement :

a) $p \Rightarrow q$
b) p
c) q

D'une implication juste dont le premier membre, l'hypothèse, est vrai, nous pouvons *détacher* une *conclusion* : la vérité de la thèse.

Nous appellerons un tel raisonnement un *raisonnement élémentaire direct*. Les démonstrations mathématiques consistent généralement en un enchaînement de tels raisonnements.

Un exemple de déduction directe. — Soit (O) un cercle centré en O; A, B et C trois points distincts de (O); B et C sont diamétralement opposés (*fig. 1*).

1. Si deux segments sont rayons d'un même cercle ils sont égaux.
Or OA et OC sont rayons de (O).
Donc OA = OC.

2. Si un triangle a deux côtés égaux, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.
Or OA = OC.
Donc $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$.

3. Si un angle est angle extérieur d'un triangle, il est égal à la somme des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.
Or $\widehat{AOB}$ est extérieur pour AOC.
Donc $\widehat{AOB} = \widehat{OCA} + \widehat{OAC}$.

4. Si, entre des angles α, β et γ, on a, à la fois :
$\beta = \alpha + \gamma$ et $\alpha = \gamma$, alors $\beta = 2\gamma$.
Or $\widehat{AOB} = \widehat{OCA} + \widehat{OAC}$ et $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$.
Donc $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{OCA}$.

Conclusion générale $\hat{O} = 2\,\hat{C}$.

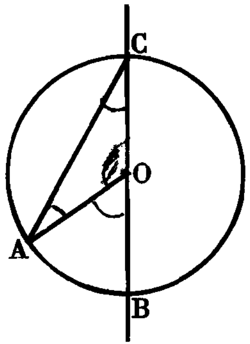


Fig. 1.

Les raisonnements élémentaires directs s'enchaînent selon le schéma (*fig. 2*) :

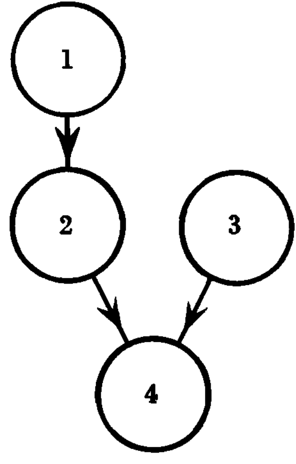


Fig. 2.

Dans la pratique, on ne s'astreint pas à détailler chaque raisonnement élémentaire direct. On emploie des tours que permet l'usage, et que seul l'usage peut enseigner. Il est admis, par exemple, de remplacer 1. et 2. par une phrase telle que : « OA et OC étant égaux comme rayons d'un même cercle, le triangle OAC est isocèle, d'où résulte que $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$ ».

Exercices. 1. — Trouver en français des tournures équivalentes à :

« Si "h" est vrai, alors "t" est vrai ».

Exemple : Le fait que "h" est vrai entraîne le fait que "t" est vrai.

2. — Former des implications correctes reliant deux affirmations choisies parmi les suivantes :

Le nombre n se termine par le chiffre 6.
Le nombre n est pair.
Le nombre n est le triple d'un nombre pair.
Le nombre n est divisible par 24.

3. — Rechercher dans la théorie du parallélogramme un emploi mathématique du mot *nécessaire* pris dans son acception première : penser aux angles consécutifs ou opposés, aux côtés opposés, aux diagonales.

4. — Se convaincre de ce que le mot *nécessaire*, pris dans son acception première, appartient aussi à la langue littéraire, et, pour cela, en chercher des exemples.

5. — Mettre sous forme détaillée le raisonnement qui montre que, si la somme des nombres représentés par les chiffres d'un nombre est divisible par 9, ce nombre est divisible par 9.

6. — Même question pour le théorème : si un trapèze est isocèle, les angles qui ont pour sommets les extrémités d'une base sont égaux. Schéma du raisonnement. **Exercices.**

II. L'ÉQUIVALENCE LOGIQUE

4. Rôles respectifs de la thèse et de l'hypothèse. — Si j'apprends que mon gazon vient d'être arrosé, en conclurai-je qu'il a plu récemment sur la région où se trouve ma maison? Non : peut-être le jardinier aura-t-il mis en marche le tourniquet; peut-être se sera-t-il produit quelque circonstance imprévue que je n'imagine même pas...

La pluie est pour l'arrosage une *condition suffisante*, elle entraîne *nécessairement* (au sens premier) celui-ci; mais la pluie n'est pas une *condition nécessaire* pour l'arrosage.

On ne saurait trop souligner l'importance de cette dissymétrie possible entre les rôles de l'hypothèse et de la thèse. En voici un autre exemple : L'existence des deux implications :

$$\text{ABCD rectangle} \Longrightarrow \text{AC} = \text{BD}$$
$$\text{ABCD trapèze isocèle} \Longrightarrow \text{AC} = \text{BD}$$

montre que le schéma d'implication

$$\text{AC} = \text{BD} \Longrightarrow \ldots$$

ne saurait conduire à une implication correcte si l'on remplace le pointillé par l'une ou l'autre des deux propositions qui jouaient plus haut le rôle d'hypothèse : *la réciproque* n'est pas vraie.

La déduction : un autre aspect. — Mon voisin m'appelle au téléphone, il m'apprend que mon gazon souffre de la sécheresse. De ce renseignement je peux tirer en toute certitude une conclusion :

Il n'a pas plu sur mon jardin.

Je peux d'ailleurs conclure aussi que le jardinier n'est pas venu arroser... Si l'on voulait détailler le raisonnement on dirait :

S'il pleut, le gazon est arrosé.
Or le gazon n'est pas arrosé.
Donc il ne pleut pas.

D'une façon générale, à partir de toute implication juste :

$$h \Longrightarrow t,$$

on peut en former une autre. On considérera la proposition obtenue en *niant* la thèse, désignons-la par $\bar{t}$. On prendra de même la *négation* de l'hypothèse, soit $\bar{h}$, et l'on aura :

$$\bar{t} \Longrightarrow \bar{h}.$$

Par exemple :

$$\text{AC} \neq \text{BD} \Longrightarrow \text{ABCD } \textit{n'est pas} \text{ un rectangle.}$$

5. L'équivalence logique. — Rappelons ces deux théorèmes :

TH. 1 : *Si ABCD est un parallélogramme, les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu.*

TH. 2 : *Si AC et BD se coupent en leur milieu, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.*

Désignons par p la proposition « ABCD est un parallélogramme » et par m la proposition « AC et BD se coupent en leur milieu ».

Le premier théorème se traduit par l'implication :

$$p \Longrightarrow m,$$

le second par :

$$m \Longrightarrow p.$$

On écrit alors au moyen d'un seul signe :

$$p \Longleftrightarrow m.$$

$\Longleftrightarrow$ note *l'implication mutuelle* de deux propositions; chacune d'elles est pour l'autre une *condition suffisante;* chacune d'elles est de l'autre une *conséquence nécessaire;* chacune d'elles est pour l'autre une *condition nécessaire et suffisante.*

On use aussi des tournures *il faut* (correspondant à condition nécessaire) et *il suffit* (correspondant à condition suffisante). Reprenant l'exemple ci-dessus on dira donc :

« Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme » il faut et il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu.

Implication mutuelle. — Dans certains cas, on peut donc passer de $p \Longrightarrow q$ à $q \Longrightarrow p$, mais il s'agit alors d'un *nouveau* théorème à démontrer et non pas d'un théorème démontrable à partir de $p \Longrightarrow q$ par une simple manipulation logique, comme celle qui permet d'écrire $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$.

EXEMPLES. 1° Pour que deux droites soient parallèles il faut et il suffit que deux angles alternes-internes formés avec une sécante commune soient égaux.

α) La condition est nécessaire (il faut), cela signifie que l'hypothèse :

les deux droites sont parallèles,

entraîne la conclusion (thèse) :

les angles alternes-internes sont égaux.

β) La condition est suffisante (il suffit), cela signifie que la nouvelle hypothèse (ancienne conclusion) :

les angles alternes-internes sont égaux

entraîne la conclusion (ancienne hypothèse) :

les deux droites sont parallèles.

Nous avons donc là un exemple d'implication mutuelle ou *d'équivalence logique* entre deux propositions :

les droites sont parallèles $\Longleftrightarrow$ les angles alternes-internes sont égaux.

2° Mais il est clair que la proposition :

« Pour que les diagonales d'un quadrilatère soient égales, il *suffit* que ce quadrilatère soit un rectangle » ne conduit pas à une équivalence logique, cette condition (nous l'avons rappelé plus haut) n'étant pas nécessaire.

3° Enfin, la proposition :

« Pour que deux angles soient tous les deux droits, il faut qu'ils soient égaux » ne donne pas non plus lieu à une équivalence logique, cette condition nécessaire n'étant manifestement pas suffisante.

PROPOSITIONS APPARENTÉES. — Si $p \Longrightarrow q$ traduit un théorème et si $q \Longrightarrow p$ est vraie, $q \Longrightarrow p$ constitue le théorème *réciproque* du premier.

Ayant obtenu un théorème, on ne sait pas *a priori* si la proposition réciproque va se trouver vraie ou fausse : on se pose ce problème sans idée préconçue.

D'une manière un peu plus générale nous allons dresser la liste des problèmes que l'on peut envisager à partir de deux faits mathématiques p et q, que l'on a quelque raison de rapprocher.

Nous envisageons donc des *propositions* telles que :

$$p \Longrightarrow q$$

sans en garantir d'avance la vérité (non plus que la fausseté). Il ne s'agit pas de théorèmes. Voici le vocabulaire consacré :

$p \Longrightarrow q$ (1) étant la proposition *directe.*

$q \Longrightarrow p$ (2) se nomme la proposition *réciproque.*

$\bar{p} \Longrightarrow \bar{q}$ (3) se nomme la proposition *contraire.*

$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ (4) se nomme la *réciproque contraire.*

Nous avons montré que si $p \Longrightarrow q$ (1) est vraie alors $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ l'est aussi :

$$p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$$

donc : (1) $\Longleftrightarrow$ (4)

De la même manière : (2) $\Longleftrightarrow$ (3).

EXEMPLES. 1° p : M est équidistant des deux points distincts A et B.
q : M est sur la médiatrice du segment AB.

On sait que $p \iff q$, il en résulte que $\bar{p} \iff \bar{q}$ ou :
Si un point M n'est pas équidistant des points A et B il ne se trouve pas sur la médiatrice du segment AB, et réciproquement.

2° p : deux angles sont droits.
q : ces deux angles sont égaux.

On sait que $p \implies q$, donc on sait que $\bar{q} \implies \bar{p}$, ou :
Si deux angles ne sont pas égaux, ils ne peuvent être tous deux droits.

Par contre $q \implies p$ est fausse, on ne peut affirmer que $\bar{p} \implies \bar{q}$, ou :
Si deux angles ne sont pas tous les deux droits, on ne peut pas en inférer qu'ils sont inégaux.

REMARQUE. Il arrive que l'on appelle, par extension, réciproque d'une proposition $p \implies q$, une proposition où l'on n'échange pas purement et simplement p et q : ceci se produit lorsque p et q sont des énoncés complexes, comportant au moins un ET.

EXEMPLES.

1° p : AM = MB et AN = NC et M, A, B alignés et N, A, C alignés, A, B, C non alignés.
q : MN // BC et $MN = \frac{BC}{2}$ (*fig. 3*).

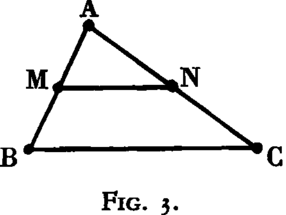


FIG. 3.

On sait que :

$$p \implies q \qquad (1)$$

c'est le théorème relatif au segment qui joint les milieux de deux des côtés d'un triangle.

2° Soit alors dans un triangle ABC (propre) :
p' : AM = MB et MN // BC et M, A, B alignés et N, A, C alignés.
q' : AN = NC et $MN = \frac{BC}{2}$:

On démontre que :

$$p' \implies q' \qquad (2)$$

et l'on appelle (2) une réciproque de (1).
(Voir Exercice n° 13.)

PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE. — Un être mathématique ayant été défini, on l'étudie et on lui découvre des propriétés. Par exemple :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
Propriété 1 : *Tout parallélogramme est convexe.*
Propriété 2 : *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*

On voit que le parallélogramme partage la propriété 1 avec bien d'autres quadrilatères, mais on sait qu'il est le seul d'entre eux à posséder la propriété 2, qui le caractérise au même titre que sa définition.

D'une façon générale si un être mathématique (E) défini par la définition d, possède une propriété q telle que :

$$d \iff q,$$

on dit que q *est une propriété caractéristique de* (E).

6. La déduction, un nouvel aspect : la réduction à l'absurde. — Analysons maintenant quelques exemples de déduction par voie indirecte. Soit à démontrer le théorème de géométrie plane :

Deux droites distinctes parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

L'hypothèse est h : (D_1) distincte de (D_2), $(D_1) \parallel (\Delta)$ et $(D_2) \parallel (\Delta)$.

La conclusion est t : $(D_1) \parallel (D_2)$.

Pour démontrer que $h \implies t$ nous allons prouver que la thèse contraire $\bar{t}$: (D_1) coupe (D_2) (en un certain point A) est incompatible avec l'hypothèse.

En effet, en admettant *simultanément* h et $\bar{t}$ on arrive à la proposition p. p : par un point A il passe deux droites distinctes (D_1) et (D_2) parallèles à (Δ).

Cette proposition p est fausse, elle contredit un théorème que l'on démontre en se basant sur l'axiome d'Euclide.

Nous avons raisonné logiquement à partir d'une certaine base de départ et nous avons obtenu une conséquence fausse : c'est donc que la base de départ est impossible.

Il est impossible d'avoir simultanément h et $\bar{t}$, si l'on garde h on ne peut avoir que t, donc $h \implies t$.

Autre exemple. — Soit à démontrer le théorème :

Le plus petit diviseur (autre que l'unité) d'un nombre est nécessairement premier.

h : a divise n, $a \neq 1$, a est le plus petit diviseur.
t : a est premier.
$\bar{t}$: a est composé $a = bc$.
$(h$ et $\bar{t}) \implies b$ divise n et $b < a$.

Donc en admettant simultanément h et $\bar{t}$ on arrive à la conclusion que h est fausse! Admettre simultanément h et $\bar{t}$ conduit à une *contradiction*, à savoir que h et son contraire sont vraies en même temps. On en conclut que h ne peut coexister avec $\bar{t}$, h n'est compatible qu'avec t, donc $h \implies t$.

La déduction par voie indirecte. — Dans les deux exemples précédents nous avons prouvé indirectement une thèse à partir d'une hypothèse en montrant que la thèse contraire, si on l'adjoint à l'hypothèse, conduit à une proposition reconnue fausse (ex. 1) ou contradictoire (ex. 2).

Un tel raisonnement opère une *réduction à l'absurde* de la proposition contraire à celle qu'on veut prouver : c'est un *raisonnement par réduction à l'absurde.*

7. La négation. — Pour bien manier le raisonnement par réduction à l'absurde, il importe de savoir former correctement la négation d'une proposition. Envisageons quelques exemples.

Proposition p : Ce ballon est jaune et sphérique. La proposition contredisant, $\bar{p}$, doit être fausse quand p est vraie et vraie quand p est fausse. Or p affirme deux choses; pour qu'elle soit fausse il faut que l'une au moins le soit, et cela suffit d'ailleurs. Donc :

Proposition $\bar{p}$: Ce ballon n'est pas à la fois jaune et sphérique.
Ce peut être un ballon de football qui n'est pas jaune. Si c'est un ballon de rugby, il peut être jaune.

Autre exemple. — *Proposition* q : Ces élèves sont toujours à l'heure.
Pour que cette proposition soit tenue pour fausse il faut pouvoir donner un exemple de retard, et cela suffit. Donc :

Proposition $\bar{q}$: Il arrive à ces élèves d'être en retard.

Autre exemple. — *Proposition* r : S'il pleut à la St-Médard, il pleut quarante jours plus tard.
Pour infirmer ce dicton il faut pouvoir citer l'exemple d'une année où il a plu à la St-Médard et pourtant pas quarante jours plus tard. Donc :

Proposition $\bar{r}$: Il peut pleuvoir à la St-Médard sans qu'il pleuve quarante jours plus tard.

Sur la conjonction « OU ». — Un proverbe affirme : « Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée ». On peut dire, d'autre part : « S'il pleut ou si je me sens fatigué, je n'irai pas à la campagne ».
La même conjonction *ou* possède deux sens différents que certaines langues distinguent. Dans le proverbe, le *ou* est *exclusif* (ou *alternatif*) : les deux possibilités envisagées s'excluent mutuellement.

Dans la seconde phrase le *ou* est *inclusif* (ou *disjonctif*) : la personne envisage deux possibilités et prendra la décision de rester en ville si l'une *au moins* se réalise, mais elles peuvent très bien se réaliser toutes deux.

Le *ou* inclusif apparaît dans la négation d'une proposition qui comporte un *et*. L'énoncé : « La fleur que donne cet arbuste est odorante et mauve » sera tenu pour faux si *l'une au moins* des propriétés attribuées à la fleur n'est pas vraie, par exemple si la fleur est inodore et mauve; si elle est odorante et jaune; et, bien sûr, si l'arbuste produit des fleurs inodores et jaunes.

Exemples.

1. *Proposition* p. La fleur que donne cet arbuste est odorante et mauve.
   Proposition $\bar{p}$. La fleur que donne cet arbuste est inodore *ou* d'une autre couleur que mauve.
2. *Proposition* p. Cet enfant est grand et calme.
   Proposition $\bar{p}$. Cet enfant est petit *ou* turbulent.

Exercices. 7. — Justifier l'écriture $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$.

8. — Former toutes les implications simples (correctes) et les implications mutuelles (correctes) possibles en utilisant les propositions suivantes.
p : la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 18.
q : la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9.
r : un nombre est divisible par 18.
s : un nombre est divisible par 9.
t : un nombre est divisible par 9 et 2.
n : un nombre est divisible par 3 et 6.

9. — Énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme.

10. — On a démontré le théorème : *Si un quadrilatère est un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*
Quelles sont les propositions réciproques possibles? Sont-elles exactes?

11. — On démontrera le théorème : *Si* OA = OB, *les bissectrices des angles* $\widehat{A}$ *et* B *du triangle* OAB *se coupent sur la hauteur* OH.
Énoncer et démontrer une réciproque.

12. — Si deux cercles centrés respectivement en O et O′ se coupent en A et B, OO′ est la médiatrice de AB.
Étudier les propositions, réciproque, contraire et réciproque contraire.

13. Soit les énoncés concernant un triangle ABC (propre)
h : $AM = MB$ et $MN = \dfrac{BC}{2}$ et M, A, B alignés et N, A, C alignés
c : $AN = NC$ et $MN \,//\, BC$.
La proposition $h \Longrightarrow c$ est-elle exacte?

14. — 1° En s'inspirant des exemples précédents, analyser la démonstration du théorème relatif à l'angle extérieur (avant l'introduction du postulat d'Euclide) : *L'angle extérieur est plus grand que chacun des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.*
2° Mettre ce théorème sous la forme $h \Longrightarrow t$.
Formuler $\bar{t}$ et $\bar{h}$, et le théorème $\bar{t} \Longrightarrow \bar{h}$. Énoncer ce théorème.

15. — Formuler la négation de la proposition :
« Toutes les anémones sont rouges. »

16. — Former la négation de chacune des propositions suivantes :
p : la droite (Δ) passe par les points A et B.
q : ABC est un triangle rectangle et isocèle.
r : les points cherchés sont tous sur le cercle (C).
s : les points cherchés sont tous à l'intérieur du cercle (C).
t : si le nombre n est entier, m l'est aussi.

17. — En logique on note le *ou* inclusif par le signe **V** et le *ou* exclusif par le signe **W**.
Recopier les phrases suivantes en remplaçant le *ou* par le symbole approprié.
1° Avant l'affaire, le roi, l'âne ou moi, nous mourrons. (La Fontaine).
2° Sa perte ou son salut dépend de ma réponse. (Racine).
3° On demande pour petits travaux de manutention un homme ou une femme.

18. — Le latin traduit-il de la même façon le *ou* exclusif et le *ou* inclusif? Préciser le sens des conjonctions *vel* et *aut*.

19. — Former la négation des propositions suivantes :
a) Le nombre x appartient à l'intervalle $2 < x < 5$ ou à l'intervalle $6 < x < 8$.
b) Le point M est tel que MA < 5 cm ou que MB < 5 cm. Examiner le sens de *ou*.

Exercices.

III. NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES

8. Ensembles. Appartenance. Inclusion. — Nous ne chercherons pas à définir le mot *ensemble* (synonymes : *collection* ou, parfois, *famille* et *classe*) ni le mot *élément* que nous employons dans des phrases telles que :

La Grande Ourse est un ensemble d'étoiles, Alcor et Mizar sont deux éléments de cet ensemble.

Les nombres entiers naturels 1, 2, 3,... qui servent à dénombrer les ensembles finis d'objets distincts, forment eux-mêmes un ensemble, mais un ensemble *infini* N^* où tout élément n admet un consécutif $n + 1$.

Dans un plan donné (π) on appelle cercle de centre O et de rayon R l'ensemble des points situés à la distance R de O; la propriété $OM = R$ *caractérise* cet ensemble (Γ).

Pour noter qu'un élément *est dans* un ensemble, lui *appartient*, on use du signe $\in$, dit symbole d'appartenance,

$$8 \in N^*; \qquad M \in (\Gamma)$$

Le nombre zéro n'étant pas un entier *naturel*, on écrira, en barrant le signe précédent : $0 \notin N^*$.

On lit : zéro n'appartient pas à N^*. En adjoignant 0 à N^* on forme un ensemble N tel que $0 \in N$.

Inclusion. — Les nombres pairs forment un ensemble P dont tous les éléments appartiennent à N; on dit que P est *inclus* dans N dont il est un *sous-ensemble*, ou une *partie*, et l'on écrit : $P \subset N$,
en se servant du signe d'*inclusion* $\subset$.

L'ensemble A formé des nombres 4, 8 et 60 est lui-même un sous-ensemble de P et, manifestement, de N. D'une façon générale :

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset C \implies A \subset C.$$

La relation d'inclusion est *transitive* : elle passe à travers B de A à C (latin : *trans, ire*).

Exercices. 20. — Soit A l'ensemble formé des trois lettres a, b, c. On écrira $A = \{ a, b, c \}$. Former tous les sous-ensembles de A; écrire toutes les inclusions.

21. — Diagramme d'inclusion. — Étant donné une famille de sous-ensembles d'un ensemble donné, on représente chaque sous-ensemble par un point. Si $B \subset C$ on met le point représentatif de C plus haut que celui de B, puis on joint les points par un trait.
Faire le diagramme pour les sous-ensembles de l'exercice précédent.

22. — On trace quatre droites deux à deux concourantes. Elles déterminent plusieurs surfaces polygonales. Les déterminer et faire le diagramme d'inclusion.

23. — Même question pour trois disques deux à deux sécants. **Exercices**

INTERSECTION. — Soit A l'ensemble des multiples de trois et B l'ensemble des nombres entiers qui s'écrivent au moyen de deux chiffres (dans le système décimal), ces deux ensembles ont une partie commune C, que l'on appelle leur intersection : elle comprend 12, 15, ... 99. On écrit :

$$A \cap B = C.$$

le signe $\cap$ s'énonce « *intersection* » ou « *inter* ».

D'une façon générale : $a \in A \cap B \iff a \in A$ et $a \in B$.

L'ensemble des nombres entiers dont le chiffre des unités est trois et l'ensemble des carrés parfaits n'ont aucun élément commun : ils sont *disjoints*; leur intersection est *vide*, on écrit dans un tel cas :

$$A \cap B = \emptyset$$

le signe $\emptyset$ représentant un ensemble conventionnel, *l'ensemble vide*, qui correspond au nombre cardinal « zéro ».

En astronomie, on partage l'ensemble des étoiles en sous-ensembles disjoints appelés constellations, où chaque étoile reçoit une lettre grecque ou un numéro.

Si l'on partage un ensemble en deux parties disjointes, chacune est dite *complémentaire* de l'autre. Par rapport à N^* l'ensemble des nombres pairs a pour complémentaire l'ensemble des nombres impairs.

L'ensemble des nombres premiers a pour complémentaire l'ensemble obtenu en réunissant l'ensemble des nombres composés et le nombre un, qui n'est ni premier ni composé.

Exercices. **24.** — On appelle bande l'ensemble des points d'un plan situés sur ou entre deux droites parallèles. Quelle est l'intersection de deux bandes (de directions non parallèles)?

25. — Quelle est l'intersection des ensembles suivants :

a) ensemble des multiples de 3, ensemble des multiples de 5?

b) ensemble des multiples de 9, ensemble des multiples de 21?

c) ensemble des carrés, ensemble des cubes?

26. — Étant donnés deux ensembles A et B, on forme leur *réunion* en gardant tous les éléments qui figurent au moins dans l'un d'entre eux; le résultat se note $A \cup B$ (A union B).

D'une façon générale : $a \in A \cup B \iff a \in A$ ou $a \in B$ avec un « *ou* » *inclusif*.

Soit M l'ensemble des entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant 999$, A le sous-ensemble de M formé par les multiples de 3 et B le sous-ensemble formé par les multiples de 5.

Combien A compte-t-il d'éléments? Même question pour B. Même question pour $A \cup B$. (Attention aux multiples de 15!)

27. — Un marchand vend du matériel pour écoles maternelles; son stock comprend :

des cubes rouges, verts, jaunes, violets,

des boules des mêmes couleurs.

Quel est le complémentaire de l'ensemble des objets rouges? de l'ensemble des cubes verts ou jaunes? de l'ensemble formé par les cubes non rouges et des boules non vertes? **Exercices.**

9. Sur la notion d'égalité. — Les écritures différentes :

$$147 \quad \text{et} \quad 3 \times 7^2$$

représentent un seul et même nombre; on peut les substituer l'une à l'autre au cours d'un calcul ou d'un raisonnement. On écrit donc :

$$147 = 3 \times 7^2.$$

Les écritures :

$$(a + b)^2 \quad \text{et} \quad a^2 + 2\,ab + b^2$$

sont différentes, mais elles représentent deux polynomes qui prennent la même valeur numérique quelles que soient les valeurs attribuées à a et à b. On considère qu'il s'agit du même polynome sous deux aspects différents et l'on écrit[1] :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2.$$

D'une façon générale si α et β sont deux éléments d'un ensemble E écrire :

$$\alpha = \beta,$$

c'est affirmer que α et β représentent de façons éventuellement différentes un seul et même élément et que l'on peut en toutes circonstances substituer α à β, ou l'inverse.

Malheureusement le mot *égalité* possède en géométrie une signification différente que l'on définit en géométrie « concrète » par la possibilité de coïncider et en géométrie « abstraite » par certains axiomes.

C'est la raison pour laquelle les mathématiciens emploient parfois le mot *congruence* à la place d'*égalité*.

On remarquera à ce sujet que le signe = n'est pas utilisé en géométrie pour noter l'égalité des triangles; par contre, il sert pour l'égalité des segments parce qu'on pense inconsciemment à l'égalité de leurs mesures.

Propriétés de l'égalité. — L'égalité possède les propriétés suivantes :

1° $a = a$ *réflexivité.*

2° $a = b \Longrightarrow b = a$ *symétrie.*

3° $a = b$ et $b = c \Longrightarrow a = c$ *transitivité.*

Mais ces trois propriétés ne sont pas spécifiques de l'égalité : on remarquera que l'égalité géométrique et la similitude des triangles les possèdent aussi.

Les relations qui sont simultanément réflexives, symétriques et transitives s'appellent des *relations d'équivalence.*

Le lecteur vérifiera sans difficulté que l'égalité des triangles est une relation d'équivalence.

1. — La question de l'identité est reprise plus loin (n° 11).

Exercices. **28.** — Dans l'ensemble des nombres décimaux (positifs) on convient de poser $a \doteq b$ si et seulement si a et b ont pour différence (dans un sens ou dans l'autre) un nombre entier. Par exemple :

$$7{,}1 \doteq 9{,}1 \qquad 3{,}1416 \doteq 0{,}1416.$$

Montrer que la relation $\doteq$ possède les mêmes propriétés que l'égalité. Peut-on la traduire par une égalité? Comment classer les nombres pour s'adapter au mieux à cette relation? Examiner l'extension de cette relation aux nombres décimaux négatifs.

29. — Dans l'ensemble des horloges en état de marche on pose $H_1 \doteq H_2$ si H_1 et H_2 indiquent la même minute et la même seconde.
Examiner cette relation.
On se restreint aux horloges qui marquent l'heure exacte pour leurs fuseaux horaires respectifs; préciser la classe qu'elles forment. Et les autres? Comment les classer?

30. — Pourquoi dit-on que $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$?
Trouver une fraction telle que si l'on ajoute 3 à chacun de ses termes elle devient égale à $\frac{4}{5}$ et que si on retranche 4 à chacun de ses termes elle devient égale à $\frac{1}{3}$.
Peut-on remplacer le résultat par une fraction égale?

31. — Un pays occupe un archipel; certaines îles sont reliées par des ponts. Dans l'ensemble des îles A, B, C, ... on pose :

$$A \longleftrightarrow B$$

si l'on peut aller à pied de A à B (ou en auto!) Étudier cette relation et les classes qu'elle permet de définir dans ce pays.
Faire un dessin et mettre une couleur par classe. Une classe peut-elle comprendre une seule île? **Exercices.**

Remarques sur le verbe « être ». — Nous avons dit que les mots du langage courant présentaient souvent des sens ambigus. Considérons les phrases :

(1) Louis XIV est le Roi-Soleil.
(2) 21 est le triple de 7.
(3) Louis XIV est un Bourbon.
(4) 21 est impair.
(5) Les Bourbons sont des descendants de saint Louis.
(6) Les multiples de 21 sont des multiples de 7.

Dans les phrases (1) et (2) *est* se traduit logiquement par $=$:
Louis XIV = le Roi-Soleil; $21 = 3 \times 7$.

Dans les phrases (3) et (4), il correspond à $\in$:
Louis XIV $\in \mathcal{B}$ (ensemble des Bourbons); $21 \in \mathrm{I}$.

Dans les phrases (5) et (6), *sont* exprime l'inclusion $\subset$, avec des notations évidentes :

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{L}; \qquad \mathcal{M}_{21} \subset \mathcal{M}_7.$$

Ainsi le même verbe correspond à des notions logiques distinctes, et ces notions n'épuisent pas, tant s'en faut, la multiplicité des emplois possibles du verbe *être*.

10. Des articles aux quantificateurs. — Voici des énoncés relevant de domaines divers :

La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.
Les cétacés sont adaptés à la vie aquatique.
Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.
Chaque partie de cet ouvrage peut être lue indépendamment des autres.
L'homme est mortel.
Un carré possède quatre axes de symétrie.

LE QUANTIFICATEUR UNIVERSEL. — Au moyen de tournures grammaticalement différentes, chacune de ces propositions affirme que les éléments d'un certain ensemble possèdent *tous* une certaine propriété (l'adaptation à la vie aquatique, une somme d'angles constante, etc.).

On pourrait uniformiser ces énoncés en adoptant une formulation du type : x étant un élément de A, quel que soit x il possède la propriété $\mathfrak{P}$.

L'abréviation consacrée est :

$$x \in A \qquad \forall x \qquad x \text{ possède } \mathfrak{P}.$$

Le signe $\forall$ se lit « *quel que soit* », ou « *pour tout* ». On l'appelle le *quantificateur universel.*

Par exemple, en appelant (d) la médiatrice du segment AB, on écrira :

$$M \in (d) \qquad \forall M \qquad MA = MB.$$

LE QUANTIFICATEUR D'EXISTENCE. — Voici maintenant des énoncés d'un autre type :

Il existe un appât capable d'attirer ce genre de poissons.
Il y a un poste à essence dans la localité.
Un point du segment, au moins, satisfait à la condition imposée.

Ces propositions affirment chacune que, parmi les éléments d'un ensemble donné, il en *existe au moins un* possédant une certaine propriété. On pourrait les uniformiser sur le modèle : x étant élément de A, il existe au moins un x qui possède la propriété $\mathfrak{P}$. L'abréviation consacrée est :

$$x \in A \qquad \exists x \qquad x \text{ possède } \mathfrak{P}.$$

Le signe $\exists$ se lit « *il existe* (au moins) *un* ». On l'appelle le *quantificateur existentiel.*

Donnons un exemple. Le nombre 7 744 est le carré de 88, il possède la propriété de s'écrire sous la forme $\overline{aabb}$. Je peux donc affirmer que dans l'ensemble C des carrés il existe un nombre n qui possède cette propriété $\mathfrak{P}$

$$n \in C \qquad \exists n \qquad n \text{ possède } \mathfrak{P}$$

ce faisant on n'affirme pas que n est unique.

EMPLOI SIMULTANÉ DES DEUX QUANTIFICATEURS. — J'assiste à une discussion entre pêcheurs. L'un d'eux, homme d'un certain âge et plein d'expérience affirme : « Quel que soit le poisson, il existe un appât qui permet de le prendre ». Un autre, jeune et plein de fougue, s'écrie : « Il existe

un appât capable de faire prendre le poisson, quel que soit ce poisson ».
Ces deux personnages disent-ils la même chose? Non! Le plus âgé, fort de son expérience, pense qu'il saura choisir judicieusement dans son attirail de vers, blé cuit, etc., tantôt l'une et tantôt l'autre des esches qui lui permettront de capturer telle ou telle catégorie de poissons.

Le plus jeune croit à l'existence d'un appât universel attirant aussi bien l'ablette et le goujon que la carpe ou le brochet.... Quoi qu'il en soit, voici comment apparaît la différence des deux opinions quand on les traduit avec les symboles logiques.
Soit A l'ensemble des appâts, P l'ensemble des espèces de poissons, on obtient respectivement

$$a \in A \quad p \in P \quad \forall p \ \exists a, \quad a \text{ fait prendre } p. \qquad (1)$$
$$a \in A \quad p \in P \quad \exists a \ \forall p, \quad a \text{ fait prendre } p. \qquad (2)$$

L'ordre d'écriture des quantificateurs joue donc un rôle essentiel. En voici un autre exemple :

$$n \in N, \quad p \in N \quad \forall n \quad \exists p \quad p > n \qquad (3)$$

exprime que, quel que soit un nombre entier, il en existe au moins un qui lui est supérieur : c'est une vérité.

$$n \in N \quad p \in N \quad \exists p \quad \forall n \quad p > n \qquad (4)$$

exprime qu'il existe un entier p plus grand que tous les autres : c'est manifestement faux.

Exercices. 32. — Étudier d'un point de vue logique le proverbe déjà cité « Un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire ». Est-ce possible pour une population finie?

33. — Parmi les propositions suivantes, les unes sont exactes et les autres fausses, reconnaître leur caractère.

(1) $a \in N \quad b \in N \quad \forall a \ \forall b \ \exists x \quad \text{et} \quad a + x = b \quad x \in N.$
(2) $a \in N \quad b \in N \quad x \in N \quad \forall a \ \forall b \ \exists x \quad xa > b.$
(3) $a \in N \quad b \in N \quad \forall a \ \forall b \ \exists x \quad x = pa = qb \quad p \in N \quad q \in N.$
(4) $\forall a \ \forall b \quad a < b \implies a + c < b + c.$
(5) $\forall a \ \forall b \ \forall c \quad a = b \implies ac = bc.$
(6) $\forall a \ \forall b \ \forall c \quad ac = bc \implies a = b.$

Exercices.

11. Identités. Équations. Inéquations.

— Si a et b représentent des nombres (entiers ou autres), les nombres $(a + b)^2$ d'une part, $a^2 + 2\,ab + b^2$ d'autre part, sont égaux. Ceci est vrai, quelles que soient les valeurs attribuées à a et b. On peut donc écrire :

$$\forall a \ \forall b \quad (a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2. \qquad (1)$$

Un usage, antérieur, consiste à écrire :

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2\,ab + b^2 \qquad (2)$$

et à dire que l'on a noté une *identité*.

Une identité est donc une égalité qui suit, ou s'accompagne, de quantificateurs du seul type $\forall$, quantificateurs que l'usage permet de sous-entendre si, du moins, il n'en résulte pas d'obscurités.

ÉQUATIONS. — L'expression $5x$ prend des valeurs numériques quand on donne à x des valeurs numériques. Il en va de même pour l'expression $x^2 + 1$.

Les deux valeurs numériques ainsi prises peuvent-elles être égales? Il s'agit d'un *problème* qui s'énonce :

Existe-t-il un x tel que $5x = x^2 + 1$?

Nous adopterons l'écriture conventionnelle :

$$\exists x? \quad 5x = x^2 + 1$$

qui fait porter l'interrogation sur le quantificateur. Nous venons d'écrire une *équation*. Une équation est la traduction d'un problème relatif à l'égalité *demandée* des deux valeurs numériques prises par deux expressions. On sait, et l'on verra à nouveau, que la « même » équation peut s'écrire :

$$\exists x? \quad 0 = x^2 + 1 - 5x$$

le membre de gauche ayant cette fois-ci la valeur zéro.

Il est essentiel de noter l'ensemble auquel appartient *l'inconnue* (les inconnues). Ainsi :

$$x \in \mathrm{N} \quad \exists x? \quad 3x = 5$$

n'admet pas de *solution*. Par contre dans l'ensemble Q des nombres rationnels :

$$x \in \mathrm{Q} \quad \exists x? \quad 3x = 5$$

admet une solution unique $x = \frac{5}{3}$.

De même on sait que :

$$x \in \mathrm{Q} \quad \exists x? \quad x^2 = 2$$

n'a pas de solution.

INÉQUATIONS. — Un problème du type : « Existe-t-il un x tel que $5x$ soit plus petit que $x^2 + 1$? » conduit à une *inéquation* :

$$x \in \mathrm{Q} \quad \exists x? \quad 5x < x^2 + 1.$$

On voit immédiatement que cette inéquation admet comme solutions tous les nombres négatifs ou nuls, mais elle en a peut-être d'autres. Il existe pour résoudre l'équation et l'inéquation formée à partir de $5x$ et $x^2 + 1$ une méthode que nous étudierons plus tard.

Dans l'usage courant, on sous-entend souvent $\exists x$?

Exercices. 34. — Résoudre : $x \in \mathrm{N}$, $y \in \mathrm{N}$ $\exists x$ $\exists y$? $3x = 5y$.

35. — Résoudre : $x \in \mathrm{Q}$ $y \in \mathrm{Q}$ $\exists x$? $\exists y$? $3x = 5y$.

36. — Résoudre : $x \in \mathrm{N}$ $\exists x$? $x^2 + x > 18$.

37. — Résoudre : $x \in \mathrm{N}$, $y \in \mathrm{N}$ $\exists x$? $\exists y$? $x + y \leqslant 25$. **Exercices.**

PROBLÈMES

38. — Diagramme de Venn. — Quand on raisonne sur les sous-ensembles d'un ensemble U il est commode de représenter U par un rectangle et les sous-ensembles par des régions intérieures au rectangle. On obtient ainsi un diagramme de Venn[1] (*fig. 4 et 5*) où l'intersection, l'union, le complément... apparaissent intuitivement.

Utiliser un tel diagramme pour résoudre le problème suivant (posé par Venn en 1888) :

Fig. 4.
A hachuré, son complément A′.

Les statuts d'un club comportent les prescriptions suivantes :

(1) Le Comité des finances doit être formé de membres du Comité directeur.

(2) Personne ne peut faire partie à la fois du Comité directeur et de la Commission de la bibliothèque sans appartenir aussi au Comité des finances.

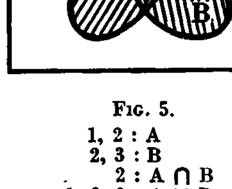


Fig. 5.
1, 2 : A
2, 3 : B
2 : $A \cap B$
1, 2, 3 : $A \cup B$.

(3) Aucun membre de la Commission de la bibliothèque ne devra faire partie du Comité des finances.

Simplifier la rédaction des statuts.

39. — Même question pour le problème suivant (Venn). Dans le personnel d'une grande librairie, trois employés ont les attributions suivantes : Jean s'occupe des livres politiques anglais et des romans étrangers reliés, Jacques des livres politiques reliés et des romans anglais (mis à part ceux qui ont un caractère politique), Henri des livres anglais reliés et des romans à caractère politique, mais non reliés.

Déterminer les catégories de livres qui sont de la compétence de deux des employés, de trois des employés.

40. — En vous aidant de diagrammes de Venn, montrer que l'intersection est distributive par rapport à l'union :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (1),

et que l'union est distributive par rapport à l'intersection :

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (2)

Comparez (1) à :

$$a.(b + c) = (a.b) + (a.c) \quad (1\ bis)$$

Peut-on étendre l'analogie à une formule (2 *bis*) dont les membres seraient $a + (b.c)$ et $(a + b).(a + c)$?

41. — Démontrer les théorèmes suivants :

1° $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
2° $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
3° $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4° $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
5° $A \cap (A \cup B) = A$
6° $A \cup (A \cap B) = A$.

42. — Des personnes participent à une réunion. En arrivant, chaque participant échange une poignée de main avec ceux qu'il connaît personnellement.

Démontrer que le nombre de ceux qui donnent un nombre impair de poignées de main est un nombre pair.

(On pourra chercher la parité du nombre total de poignées de main échangées.)

43. — L'implication des logiciens. — Les logiciens posent que :

$$p \Longrightarrow q$$

a lieu dans tous les cas où l'on n'a pas simultanément p vrai et q faux : ils ne s'intéressent pas à la *nature du contenu* de p et q, mais seulement à leur valeur logique *vrai ou faux*.

Pour éviter une confusion nous écrirons l'implication des logiciens au moyen du signe $\Rightarrow$

1° Étudier les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou non, au sens des logiciens :

$\sqrt{2}$ est rationnel $\Rightarrow$ 10 est premier.

La baleine est un cétacé $\Rightarrow$ $6^2 = 36$.

La baleine est un poisson $\Rightarrow$ $3^5 = 5^3$.

2° Montrer que l'implication des logiciens diffère de notre implication $\Longrightarrow$ essentiellement parce qu'elle utilise des propositions qui ne sont pas des *variables logiques*. Les triangles sont *parfois* isocèles, parfois non isocèles.

1. — *John Venn*, logicien américain.

LIVRE I

REVISION D'ALGÈBRE

■

CHAPITRE I

LES NOMBRES RELATIFS

I. LES EXTENSIONS SUCCESSIVES DE LA NOTION DE NOMBRE

12. Les nombres « arithmétiques ». — Les premiers nombres que l'on étudie sont les entiers naturels 1, 2, 3, ... Ils forment un ensemble N^* que l'on complète par zéro pour obtenir l'ensemble N *des entiers « arithmétiques »*. On peut alors dénombrer toute collection finie (ou vide) d'objets identiques ou rassemblés en vertu de quelque propriété commune.

On définit ensuite les fractions « arithmétiques ». Une fraction emploie deux entiers « arithmétiques » aux rôles différents : le numérateur et le dénominateur (ce dernier non nul). Toutes les règles concernant les fractions sont données dans le tableau des pages 28 et 29. Rappelons qu'on assimile à des entiers les fractions telles que $\frac{15}{3}$ dont le dénominateur divise le numérateur. L'ensemble Q^+ des *rationnels « arithmétiques »* comprend donc les fractions « arithmétiques » et les entiers « arithmétiques » que l'on peut regarder désormais comme des fractions particulières.

Les nombres décimaux comme :

$$3{,}8; \qquad 2{,}315\,254; \qquad \text{etc.}$$

font partie de Q^+ car un nombre décimal est égal à une fraction dont le dénominateur est de la forme 10^n.

Les nombres irrationnels. — Mais les rationnels ne suffisent pas à mesurer les grandeurs idéales que propose la géométrie. On sait, par exemple, que la diagonale d'un carré dont le côté a pour mesure 1 ne se mesure point par un rationnel mais par le nombre *irrationnel* que l'on désigne par $\sqrt{2}$. Ce nombre peut être apprécié avec telle ou telle précision imposée : il suffit de poursuivre assez loin le mécanisme d'extraction qui ne s'arrête ni ne se répète jamais.

Nous ne développerons pas une théorie rigoureuse des irrationnels : elle relèverait des Mathématiques Supérieures. Nous ferons simplement remarquer que l'on peut faire avec ces nombres :

a) des calculs théoriques cohérents comme :

$$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7;$$

b) des calculs pratiques avec une approximation donnée comme :

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\simeq 0{,}366,$$

à 1/1 000 près par défaut, d'où *l'encadrement* :

$$0{,}366<\frac{\sqrt{3}-1}{2}<0{,}367.$$

Ces remarques permettront au lecteur d'admettre que les fractions « arithmétiques » et les irrationnels « arithmétiques » peuvent être réunis dans un ensemble plus vaste, l'ensemble des *nombres « arithmétiques »* qui se représentent au moyen d'un développement décimal *fini* ou *infini* et permettent, par exemple, de mesurer avec un segment unité donné tous les segments de droite.

Irrationnel veut dire : *qui n'est pas égal à un rapport de nombres entiers.*

On croit parfois que le mot « irrationnel » signifie : où figurent des radicaux. La condition de comporter des radicaux (portant sur des nombres ou expressions qui ne permettent pas une extraction exacte) suffit pour qu'on puisse employer à bon droit le mot irrationnel. Mais il y a bien d'autres façons d'obtenir des nombres (ou expressions) irrationnels.

Le nombre π donne l'exemple d'un irrationnel de nature plus compliquée.

Nous représenterons l'ensemble des nombres « arithmétiques » par R^+.

13. Définitions et règles diverses concernant les ensembles N, Q^+, R^+. — L'essentiel se trouve résumé dans le tableau qui occupe les pages 28 et 29. Nous ajouterons quelques brèves remarques.

Sur les règles relatives aux fractions. — Introduites par diverses considérations relatives à la mesure des grandeurs, ces règles ont été justifiées dans le Cours de Cinquième.

On pourrait suivre une démarche en quelque sorte inverse : définir formellement une fraction comme une association de deux entiers qui jouent

des rôles différents, poser *a priori* les règles que donne le tableau (en faire, en un mot, des *axiomes*) et constater ensuite leur efficacité pratique. Mais il faudrait alors démontrer que ces règles forment un tout cohérent. Il faudrait, par exemple, démontrer que, de la définition posée pour l'égalité et de la définition posée pour la somme, il résulte bien que si l'on remplace deux fractions par deux fractions respectivement égales, la nouvelle somme reste égale à l'ancienne.

Voir à ce sujet des exercices proposés ci-dessous. On pourra utiliser le tableau qui figure aux pages suivantes.

Exercices. 44. — Démontrer que $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}$ et $\frac{p'}{q'}=\frac{a'}{b'}$ entraînent

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right).$$

On ne se servira que des définitions *formelles* de l'égalité et de la somme.

Indication sur la solution :

Hypothèse : $pb = aq$ et $p'b' = a'q'$.

Par définition :

$$\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{(pq'+qp')}{(qq')} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{(ab'+ba')}{(bb')}.$$

Le problème consiste à comparer :

$$\mathrm{A}=(pq'+qp')(bb') \quad \text{et} \quad (qq')(ab'+ba')=\mathrm{B}.$$

45. — Démontrer que $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}$ et $\frac{p'}{q'}=\frac{a'}{b'}$ entraînent $\frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}$.

46. — Question analogue pour la division.

47. — Démontrer que $\frac{p}{q}<\frac{a}{b} \iff pb<aq$;

et que : $\frac{p}{q}<\frac{a}{b} \implies \frac{p}{q}+\frac{r}{s}<\frac{a}{b}+\frac{r}{s}$.

48. — Les anciens Égyptiens concevaient sans doute les fractions ordinaires, mais — mise à part la fraction $\frac{2}{3}$ pour laquelle ils avaient un signe spécial — ils n'écrivaient que les *quantièmes* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.
Les fractions ordinaires étaient donc immédiatement converties en somme de quantièmes, à l'aide de tables. Le Papyrus Rhind donne un exemple qui se traduirait par :

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}.$$

a) Vérifier cet exemple.

b) Construire une table d'addition des quantièmes de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{9}$ (pour deux fractions).

c) Construire une table pour les mêmes quantièmes avec trois fractions.

Exercices.

Premières extensions de la notion de nombre (nombres « arithmétiques »).

Ensemble considéré	**N** Ensemble des entiers naturels, complété par zéro.	$\mathbf{Q}^{+}$ Ensemble des fractions arithmétiques (plus tard : des rationnels positifs).	$\mathbf{R}^{+}$ Ensemble de tous les nombres « arithmétiques » (plus tard : des réels positifs).
Définition	Un entier naturel caractérise la propriété commune à une famille de collections finies, superposables élément par élément. Ex. : Les saisons, les points cardinaux, les fils Aymon ont en commun le cardinal quatre.	Les fractions ont été introduites pour mesurer des grandeurs continues. Elles se présentent finalement comme des couples ordonnés d'entiers $\frac{p}{q}$ avec $q \neq 0$.	Les nombres arithmétiques en général permettent de mesurer toutes les longueurs. On est conduit à considérer des nombres qui s'écrivent avec une infinité de chiffres décimaux.
Égalité	Résulte de la définition.	$q \neq 0, \quad q' \neq 0$ $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff p \cdot q' = q \cdot p'$	$a \in \mathrm{N} \quad b \in \mathrm{N} \quad c$ et c' chiffres $\mathrm{A} = a + 0, c_1 c_2 c_3 \ \ldots$ $\mathrm{B} = b + 0, c'_1 c'_2 c'_3 \ldots$ $\mathrm{A} = \mathrm{B} \iff a = b$ et $\forall i \quad c_i = c'_i$
Somme	Par réunion de collections disjointes.	$q \neq 0 \quad q' \neq 0$ $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{(p \cdot q' + q \cdot p')}{(q \cdot q')}$	Voir le chapitre « Calcul numérique ».

Comparaison	$m < n \iff \exists p \quad p \neq 0$ $m + p = n.$	$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \iff \exists \frac{p'}{q'}, \quad \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{r}{s}$	*id.*
Différence	Si $m < n$ $n - m = p \iff n = m + p$	Si $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ $\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}$	Voir le chapitre « Calcul numérique » pour l'encadrement pratique d'une différence.
Produit	$\forall a \quad a.0 = 0 \qquad a.1 = a$ $a.b \quad b \neq 0$ et $b \neq 1$ se définit par répétition de l'addition.	$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{(p \cdot p')}{(q \cdot q')}$	Voir également le chapitre « calcul numérique ».
Quotient	Non toujours possible. Si $n = mq \qquad n : m = q$ $m = 0$ impossible. On écrit $q = \frac{n}{m}$.	$p' \neq 0 \quad \frac{p}{q} : \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q'}{p'}$	*id.*
Convention d'extension	Sans objet	$p \in N \qquad \frac{p}{q} \in Q^+$ $p = \frac{p}{1} = \frac{pq}{q}$	On assimile par exemple 0,97 à 0,970 000 00... ou à 0,969 999... ; $\frac{1}{3}$ à 0,333 3...

Le principe des tiroirs. Application aux rationnels. — **Si l'on range m objets dans q tiroirs et si $m \geqslant q + 1$, l'un au moins des tiroirs contient deux objets.**
Ce principe s'applique souvent en Mathématiques.

Convertissons la fraction $\frac{p}{q}$ en un nombre décimal. La division aboutit parfois à un reste nul. Dans le cas contraire la division se poursuit avec une infinité de restes partiels (objets) qui, abstraction faite de la virgule, ne peuvent prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, q - 1$ (tiroirs). Au $q^{\text{ième}}$ stade — et ce peut être avant — nous retombons certainement sur une valeur déjà rencontrée et l'opération va se reproduire périodiquement.

Exemple. $\frac{71}{11}$ conduit à 6,454 545 454 ....

Les rationnels dont le développement décimal est illimité admettent, à partir d'un certain stade, une période.

Appliquons la loi logique $(h \Longrightarrow t) \Longrightarrow (\bar{t} \Longrightarrow \bar{h})$.

▪ THÉORÈME. — **Un développement non périodique ne peut définir qu'un irrationnel.**

14. La symétrisation. — La hauteur des montagnes au-dessus du niveau des mers, d'une part, la profondeur des fosses marines, d'autre part, sont des grandeurs de même nature (longueur) mais de *sens opposés*. On peut citer bien des couples analogues : gains et pertes, énergie absorbée ou dégagée au cours d'une réaction chimique, etc... Tous ces faits incitent à passer des nombres « arithmétiques » aux *nombres relatifs*.

La construction se base sur N, ou sur Q^+ ou sur R^+. Soit E l'un de ces trois ensembles (nous préciserons plus tard), A, B, C, ... ses éléments. Pour créer à partir d'un nombre, A par exemple, deux nouveaux êtres, nous pouvons conférer à ce A l'un ou l'autre des deux attributs suivants : un signe $^+$, ou un signe $^-$; nous obtenons alors un nombre *positif* A^+ et un nombre négatif A^-, dont A représente la commune *valeur absolue*. Le petit signe qui attribue à A la qualité de positif, ou de négatif, est un *signe prédicatoire* (prédicat est synonyme d'attribut).

Comment calcule-t-on dans ce nouvel ensemble? Les règles ont été introduites à partir de situations concrètes puis longuement justifiées dans le Cours de Quatrième. Nous en résumons l'essentiel dans le tableau de la page 31. Ajoutons-y quelques remarques.

Le point de vue formel. — Comme il a été dit à propos des fractions on pourrait poser *a priori* ces règles de calcul, sans faire appel à leur origine concrète. Mais il faudrait alors démontrer qu'elles forment un tout cohérent. On pourra se reporter aux exercices consacrés à cette question.

Extension par symétrisation. — La construction terminée, on convient d'assimiler les anciens nombres « arithmétiques » aux nombres positifs. Est-ce légitime? Si l'on se bornait aux nombres A^+ on s'apercevrait que les règles font calculer avec les A^+ comme on calculait avec les A. La distinction se réduisant à l'écriture du signe prédicatoire, on peut convenir qu'elle ne représente rien d'essentiel et faire l'assimilation.

Il apparaît alors que l'on a prolongé $E = E^+$ par une partie symétrique E^-. La nomenclature est la suivante :

N symétrisé par N^- donne l'ensemble Z des *entiers relatifs.*
Q^+ symétrisé par Q^- donne l'ensemble Q des *rationnels relatifs.*
R^+ symétrisé par R^- donne l'ensemble R de *tous* les nombres relatifs ou *nombres réels.*

La règle des signes. — Le tableau des règles comporte deux sortes de signes : les signes $^+$ et $^-$: signes prédicatoires, les signes + et — : signes *opératoires,* qui indiquent les opérations à effectuer.

La règle des signes donnée en premier lieu dans le tableau est en fait la *règle des signes prédicatoires* (voir classe de Quatrième, chapitres III et IV).

La construction terminée, on ne se sert plus des signes prédicatoires, et l'on peut démontrer une seconde règle des signes, règle des *signes opératoires.*

Symétrisation d'un ensemble E de nombres arithmétiques.

ENSEMBLES CONSIDÉRÉS	N engendre Z Q^+ — Q R^+ — R
Définition	Un entier relatif α est un couple formé d'un nombre arithmétique A (sa valeur absolue) et d'un signe prédicatoire : A^+ ou A^-; $A^+ \in E^+$, $A^- \in E^-$. La valeur absolue se note $\lvert\alpha\rvert$
Égalité	$\alpha = \beta \iff \lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$ et signe de α = signe de β, ou bien α et β nuls tous les deux.
Addition	$A^+ + B^+ = (A + B)^+$ $A^- + B^- = (A + B)^-$ $A^+ + B^- = \begin{cases} (A - B)^+ & \text{si } A > B \\ (B - A) & \text{si } B > A \\ 0 & \text{si } B = A \end{cases}$
Nombre opposé	L'opposé de A^+ est A^- et réciproquement.
Soustraction	$\alpha - \beta = \alpha +$ opposé de β.
Comparaison	$\alpha < \beta \iff \beta - \alpha \in E^+$.
Multiplication	$A^+ . B^+ = (AB)^+$ $A^+ . B^- = (AB)^-$ $A^- . B^+ = (AB)^-$ $A^- . B^- = (AB)^+$
Division *N. B. : la division par zéro est impossible.*	Si elle est possible dans E, donc si A : B = C le quotient est donné par C affecté du signe qui obéit aux conditions précédentes.
Convention d'extension	$A^+ = A$.
Simplifications diverses dans l'écriture	$A^+ = - A^-$. On peut tout écrire sans signe prédicatoire.

Exercices. *Calculer :*

49. $7-(-12)$; $-7-(-12)$; $+7-(+12)$.

50. $-5{,}3-(-8{,}4)$; $(-5{,}3)-(+8{,}4)$; $(+5{,}3)-(-8{,}4)$.

51. $\left(-\frac{5}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$; $-\frac{5}{3}-\left(+\frac{3}{4}\right)$; $+\frac{5}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)$.

52. $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}-\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}-\left(-\frac{5}{6}\right)$

Effectuer les divisions :

53. $-52:13$; $12:(-4)$; $180:(-36)$.

54. $+221:(-17)$; $(-374):(-11)$; $(-55{,}8):(-6{,}2)$.

55. $\frac{-8}{-15}:\frac{-48}{-45}$; $\frac{3}{4}:\left(\frac{15}{8}\right)$; $\left(-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}\right)$.

Calculer $a-b=d$, *puis* $d:c=q$, *puis* $q+e=s$, *puis* $s.f=p$, *puis* $p+g=t$, *avec les données suivantes :*

	a	b	c	e	f	g
56.	$a=3$,	$b=4$,	$c=5$,	$e=6$,	$f=7$,	$g=8$.
57.	3,	-4,	5,	-6,	7,	-8.
58.	-3,	4,	-5,	6,	-7,	8.
59.	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{7}$,	$\frac{1}{8}$.
60.	$\frac{1}{3}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{7}$,	$\frac{1}{8}$.
61.	$-\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{7}$,	$-\frac{1}{8}$.
62.	3,	$\frac{1}{4}$,	5,	$\frac{1}{5}$,	6,	$\frac{1}{6}$.
63.	$\frac{1}{3}$,	4,	$\frac{1}{5}$,	5,	$\frac{1}{6}$,	6.
64.	3,	$-\frac{1}{4}$,	5,	$-\frac{1}{5}$,	6,	$-\frac{1}{6}$.
65.	-3,	$\frac{1}{4}$,	-5,	$\frac{1}{5}$,	-6,	$\frac{1}{6}$.
66.	$\frac{1}{3}$,	-4,	$\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{6}$,	7,	$-\frac{1}{8}$.

67. — 367 personnes participent à un Congrès scientifique. Que peut-on dire de leurs anniversaires?

68. — Calculer les valeurs décimales approchées à $\frac{1}{10^{10}}$ près par défaut des nombres :

$$a=\frac{1}{7},\quad b=\frac{1}{15},\quad c=\frac{1}{21}\cdot$$

Utiliser ces valeurs pour calculer $a+b+c$ et caractériser la précision avec laquelle est donné ce résultat.

69. — Le nombre :

$$a = 0{,}\ 101\,001\,000\,100\,001\,0\ \ldots.$$

est donné par une loi précise : entre deux chiffres 1 on met successivement 1, puis 2, puis 3, ... puis n chiffres zéro, indéfiniment.

Ce nombre a est-il rationnel?

Exercices.

II. PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS

15. Associativité et commutativité. — Dans tous les ensembles de nombres jusqu'ici considérés, l'addition et la multiplication possèdent les propriétés suivantes :

$$\forall a\ \forall b\ \forall c \left\{ \begin{array}{lll} \text{I} & (a+b)+c = a+(b+c) & \\ & (a\times b)\times c = a\times(b\times c) & \textit{Associativité.} \\ \text{II} & (a+b) = (b+a) & \\ & (a\times b) = b\times a & \textit{Commutativité.} \end{array} \right.$$

L'addition des angles, l'addition des segments, l'addition des vecteurs possèdent ces deux propriétés; bien d'autres opérations s'exerçant dans des ensembles que nous apprendrons à connaître plus tard possèdent la première (et certains d'entre eux la seconde, également). De I résulte le théorème suivant :

- THÉORÈME D'ASSOCIATIVITÉ. — **Dans une suite d'opérations (de même nature) on peut remplacer plusieurs éléments consécutifs par le résultat des opérations effectuées sur ces éléments et, plus généralement, sans changer l'ordre, associer les éléments selon des groupements quelconques.**

Les propriétés I et II conduisent au théorème plus général :

- THÉORÈME D'ASSOCIATIVITÉ ET DE COMMUTATIVITÉ. **Dans une suite d'opérations (de même nature) on peut disposer les éléments dans un ordre quelconque et les associer en groupements quelconques.**

En raison de leur importance, nous allons donner une idée de la démonstration de ces théorèmes et, puisqu'ils s'appliquent aussi bien à la multiplication qu'à l'addition, et sont valables dans tous les domaines où se trouve définie quelque opération possédant la propriété I — pour le premier — les propriétés I et II — pour le second — nous allons employer au lieu du signe « + » ou du signe « × » un nouveau signe, l'étoile « * ». De même qu'une lettre représente un nombre quelconque, le signe * représentera à volonté +, ou ×, ou toute autre opération possédant la (les) propriété (s) requise (s).

Le lecteur a remarqué aussi qu'au lieu d'employer le mot *terme* réservé aux sommes, ou le mot *facteur* réservé aux produits, nous avons usé du mot plus général : *éléments*. On pourrait employer le mot *opérande* (féminin) dont on se sert dans la théorie des machines à calculer.

Et maintenant abordons la démonstration du premier théorème.

LE THÉORÈME D'ASSOCIATIVITÉ. — Ce théorème n'a pas à être démontré s'il y a moins de trois opérandes.

1. Pour trois opérandes l'égalité :

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

traduit précisément la propriété I, le théorème est vrai et l'on note le commun résultat sous la forme $a * b * c$, sans parenthèses.

2. Pour plus de trois opérandes, une façon de les grouper consiste à aller pas à pas de gauche à droite selon le schéma :

$a * b$	avec les deux premières
$(a * b) * c$	en introduisant la 3e.
$[(a * b) * c] * d$	en introduisant la 4e.
$\{[(a * b) * c] * d\} * e$	en introduisant la 5e,

et ainsi de suite.

On obtient ainsi un résultat que nous appellerons le P(as) (à) P(as) (de) G(auche) (à) D(roite) ou P. P. G. D. et que nous noterons $a * b * c * d * e * \ldots$

3. Le théorème affirme donc qu'en mettant les parenthèses de toute autre façon, on obtiendra toujours le même résultat, donc toujours le P. P. G. D.

4. Exerçons-nous avec 4 opérandes.

Par exemple :

$$a * [(b * c) * d] = [a * (b * c)] * d, \quad \text{par I},$$

attention : la « boîte » fermée $(b * c)$ compte pour une seule opérande : le résultat à y marquer; puis :

$$[a * (b * c)] * d = [(a * b) * c] * d, \quad \text{par I},$$

en travaillant à l'intérieur de la « grande boîte » [ ].

Enfin :

$$[(a * b) * c] * d = a * b * c * d, \quad \text{c'est le P. P. G. D.}$$

5. Exerçons-nous encore avec 4 opérandes; dans un autre cas :

$$(a * b) * (c * d) = [(a * b) * c] * d, \quad \text{par I},$$

et l'on retrouve le P. P. G. D.

6. Il resterait d'autres cas à traiter avec 4 opérandes, nous admettrons que leur examen conduit aux mêmes résultats.

7. Ainsi nous avons pu monter de 3 à 4 opérandes. On démontre et nous admettrons que l'on peut étendre la démonstration des cas de 3 ou 4, aux cas de 5, puis de 6 opérandes, etc.

Voir à ce sujet l'exercice 85 page 37.

LE THÉORÈME DE COMMUTATIVITÉ. — Nous avons successivement :

LEMME 1. *Les six résultats obtenus à partir de trois opérandes sont égaux.*

En effet :

$$\text{II} \Longrightarrow (a * b) * c = c * (a * b)$$
$$\text{I} \Longrightarrow c * (a * b) = (c * a) * b, \text{ etc.}$$

LEMME 2. *On peut permuter les deux dernières opérandes sans changer le P. P. G. D.*

Soit par exemple :

$$R = a * b * c * d * e * f * g.$$

Posons : $S = a * b * c * d * e,$

alors : $R = S * f * g,$

donc : $R = S * g * f$ par Lemme 1,

et : $R = a * b * c * d * e * g * f.$

LEMME 3. — *On peut permuter deux opérandes consécutives sans changer le P. P. G. D.*

Montrons par exemple qu'on peut permuter c et d. On a :

$$a * b * c * d = a * b * d * c \quad \text{par Lemme 2.}$$

Soit T cette valeur commune, formons $T * e * f * g$, on obtient bien :

$$a * b * c * d * e * f * g = a * b * d * c * e * f * g.$$

LEMME 4. — *On peut passer d'une première disposition des opérandes à toute autre disposition imposée, par une suite de permutations portant sur deux opérandes consécutives.*

En effet on peut transporter une opérande de sa place initiale à la place imposée par une suite de telles permutations.

Le théorème résulte manifestement du théorème d'associativité et des quatre lemmes précédents.

REMARQUE. Il résulte de ce théorème que si un *produit* contient le facteur *zéro*, ce produit est *nul*.

Exercices d'applications numériques.

Calculer les sommes suivantes :

70. $(+5) + (-3) + (-10) + (+7)$.

71. $(+1\,072) + (-540) + (-743) + (+12{,}5)$.

72. $(-10{,}75) + (+21{,}45) + \left(-\frac{5}{4}\right) + (-17{,}7)$.

Calculer en groupant les termes de la façon la plus commode pour le calcul :

73. $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(+\frac{4}{2}\right)$.

74. $\left(-\frac{5}{11}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{16}{11}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right)$.

75. $(+1{,}53) + (-2{,}45) + (-5{,}23) + (+1{,}35) + (-1{,}3)$.

76. — On considère la somme :

$$S = a + b + c.$$

Calculer S si :

1° $a = -12$; $b = -17$; $c = +29$.

2° $a = +5$; $b = -19$; $c = +14$.

3° $a = -\frac{5}{3}$; $b = +\frac{17}{3}$; $c = -4$.

Si S est nul, que peut-on dire de chacun des nombres a, b, c par rapport à la somme des deux autres nombres?

77. — Calculer le produit :

$$(3) \times \left(\frac{1}{7}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times (-7) \times (-11) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times (5) \times \left(-\frac{1}{11}\right).$$

78. — Calculer, en groupant les facteurs de la façon la plus commode pour le calcul :

$$\frac{-6}{35} \times \frac{7}{11} \times \frac{1}{39} \times \frac{11}{32} \times \frac{5}{3} \times \frac{13}{63}.$$

79. — On considère le produit :

$$P = a \times b \times c.$$

Calculer P si :

1° $a = -11$; $b = \frac{3}{22}$; $c = +7$.

2°	$a = 2$;	$b = 32$;	$c = \frac{-1}{128}$.
3°	$a = 3$;	$b = \frac{-1}{21}$;	$c = -77$.
4°	$a = -8$;	$b = \frac{1}{-56}$;	$c = -\frac{1}{5}$.
5°	$a = -2$;	$b = -100$;	$c = -\frac{1}{1\,000}$.

Exercices d'applications numériques.

Exercices de caractère théorique.

80. — Une opération courante consiste à prendre la moyenne m de deux nombres a et b :

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Exemple : $\frac{\text{note d'histoire} + \text{note de géographie}}{2}$.

Notons cette opération à l'aide du signe $*$, soit $m = a * b$.

a) Est-elle commutative?

b) Augier a eu 13 à sa version anglaise, 11 au thème et 14 aux questions. Calculer $(13 * 11) * 14$ et $13 * (11 * 14)$. Conclusion pour l'opération $*$?

c) Conclusion pour les axiomes I et II?

81. — Dans R^+ on définit l'opération $a \mathbf{M} b$ dont le résultat est le plus grand des deux nombres a et b (opération « Maximum »). Exemples :

$$3 \mathbf{M} 4 = 4, \quad 3 \mathbf{M} 3 = 3, \quad 2 \mathbf{M} 1 = 2.$$

a) Calculer $2{,}35^3 \mathbf{M} 3{,}60^2$,

puis : $\frac{1}{1{,}414} \mathbf{M} \frac{1{,}414}{2}$.

b) Étudier l'opération $\mathbf{M}$ du point de vue associativité et commutativité.

82. — Dans R^+ on définit l'opération $a \mathbf{m} b$ dont le résultat est le plus petit des deux nombres a et b (opération « minimum »). Exemple $3 \mathbf{m} 4 = 3$.

a) Que dire de $(a \mathbf{m} b) + (a \mathbf{M} b)$?

b) Calculer $\left[\left(\frac{22}{7}\right)^2 \mathbf{m}\ 10\right] \mathbf{M}\ 9{,}8696$.

c) Étudier l'opération $\mathbf{m}$ du point de vue associativité et commutativité.

83. — Dans l'ensemble D^+ des nombres décimaux positifs compris entre 0 et 1 on définit l'opération « intercalage »

$$a \mathbf{i} b.$$

Exemple : $0{,}37 \mathbf{i} 0{,}58 = 0{,}3578$,
$0{,}4512 \mathbf{i} 0{,}36 = 0{,}43561020$.

a) Étudier cette opération du point de vue commutativité et associativité.

b) Résoudre l'équation :

$$x \in D^+ \quad \exists x? \quad 0{,}45 \mathbf{i} x = b.$$

1° pour $b = 0{,}4351$.
2° pour $b = 0{,}29$.

84. — En Électricité et en Optique on étudie des grandeurs $a, b, c, \ldots,$ qui se composent selon la loi $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Soit : $c = a * b$.

a) L'opération qui donne c est-elle commutative, associative?

b) Calculer c pour $a = 3$ et $b = 5$

pour $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{5}$.

85. — Théorème d'associativité. — Supposons démontré le théorème pour n opérandes, avec $n \leqslant 7$, et essayons de l'étendre au cas de 8 opérandes.
1° Envisager le cas le plus simple, celui où la dernière opérande est isolée à l'extrême droite, par exemple :

$$\{ [(a * b * c) * (d * e)] * (f * g) \} * h$$

démontrer que, dans ce cas, on obtient toujours le P. P. G. D. quelle que soit la répartition à l'intérieur du $\{ \}$.
2° Étudier un cas différent, par exemple :

$$[(a * b) * (c * d) * e] * [f * (g * h)].$$

Chaque [ ] contient moins de sept opérandes. En sera-t-il toujours ainsi? Remplacer le contenu de chaque [ ] par le P. P. G. D. On arrive à :

$$[a * b * c * d * e] * [f * g * h]$$

qui est de la forme :

$$A * [f * g * h]$$

avec 4 opérandes A, f, g, h. En déduire l'exactitude du théorème dans ce cas.
3° Tout autre cas se traite de la même façon : l'étoile non enfermée découpe deux blocs qui ont moins de sept opérandes chacun.
4° Passer maintenant de 8 à 9.

Exercices de caractère théorique.

16. Éléments neutres et éléments symétriques.

— Dans tous les ensembles jusqu'ici considérés on a les propriétés suivantes :

$$\forall a \quad a + 0 = a; \qquad \forall a \quad a \times 1 = a.$$

On exprime ces faits en disant que zéro est un élément *neutre pour l'addition* et 1 un élément *neutre pour la multiplication*. D'une façon générale si

$$\forall a \quad e * a = a * e = a.$$

On dit que e est neutre pour l'opération $*$.

Autre exemple. Soit la famille $\mathcal{F}$ formée par les ensembles suivants :

A, ayant pour éléments les nombres 3 et 5.
B, ... 3, 4 et 5.
C, ... 3.

Les opérations d'intersection et d'union, entre membres de la famille $\mathcal{F}$, donnent les résultats consignés dans les tableaux suivants :

∩	A	B	C
A	A	A	C
B	A	B	C
C	C	C	C

∪	A	B	C
A	A	B	A
B	B	B	B
C	A	B	C

B est neutre pour l'opération $\cap$, C neutre pour l'opération $\cup$.

ÉLÉMENTS SYMÉTRIQUES. — **Étudions les équations :**

(1) $\exists x ?\quad a + x = 0,$ (1 *bis*) $\exists x ?\quad a \times x = 1.$

dans les divers ensembles de nombres considérés.

Dans N, Q^+ et R^+, l'équation (1) n'a aucune solution, sauf pour $a = 0$, auquel cas $x = 0$.

Dans les ensembles symétrisés Z, Q, R, l'équation

$\exists x ?\quad a + x = 0$ admet la solution unique $x = -a$.

EXEMPLES.

$\exists x ?\quad (-4) + x = 0.$ Rép. : oui, $x = +4.$
$\exists x ?\quad 3 + x = 0.$ Rép. : oui, $x = -3.$

On dit que $-a$ est le *symétrique* de a pour l'opération $+$.

Dans N, (1 *bis*) n'a aucune solution, sauf pour $a = 1$, auquel cas $x = 1$.

Dans Q^+ et R^+ (ainsi que dans Q et R), l'équation (1 *bis*) $\exists x ?\quad a \times x = 1$, avec $a \neq 0$ admet la solution unique $x = \frac{1}{a}$.

EXEMPLES.

$\exists x ?\quad 3 \times x = 1$ Rép. : oui, $x = \frac{1}{3}$.

$\exists x ?\quad (-5)\, x = 1$ Rép. : oui, $x = -\frac{1}{5}$.

$\exists x ?\quad \left(-\frac{4}{5}\right) x = 1$ Rép. : oui, $x = -\frac{5}{4}$.

On dit que $\frac{1}{a}$ est le *symétrique* de a pour l'opération « $\times$ ».

D'une façon générale, si une opération $*$ admet un élément neutre e et si, pour un élément a, existe un élément a' tel que :

$$a * a' = a' * a = e$$

on dit que a' est le symétrique de a pour l'opération $*$.

REMARQUES. — Z contient tous les symétriques, ou opposés, des éléments de N, pour la loi d'addition. Il ne contient pas d'autre élément.

Q^+ contient tous les symétriques, on inverses, des éléments de N, pour l'opération de multiplication : ces éléments sont les *quantièmes* :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.$$

Mais à côté des quantièmes, Q^+ contient d'autres éléments $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$, etc.

L'analogie s'avère donc partielle seulement.

LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES. — Étudions maintenant les équations :

(2) $\exists x ?\quad a + x = b$ (2 *bis*) $\exists x ?\quad a \times x = b$

dans les mêmes ensembles de nombres.

EXEMPLES.

A) $\exists x ?\ 3 + x = 5$ $\qquad \exists x ?\ 3 \times x = 5$
B) $\exists x ?\ (-3) + x = 5$ $\qquad \exists x ?\ (-3) \times x = 5$
C) $\exists x ?\ 0 + x = 8$ $\qquad \exists x ?\ 0 \times x = 8$

(2) est toujours résoluble et admet la solution unique $x = b + (-a)$ dans les ensembles symétrisés Z, Q et R. Dans les ensembles N, Q^+ et R^+ la solution n'existe que si $a \leqslant b$.

EXEMPLES.

Pour $3 + x = 5$, on obtient $x = 5 + (-3) = 2$, et $2 \in N$.
Pour $5 + x = 3$, on obtient $a = 3 + (-5) = -2$, et $-2 \notin N$, la solution (-2) n'existe que dans le cadre de Z.

L'équation (2 *bis*) est résoluble dans les ensembles Q et R sous la réserve que a soit différent de zéro.

EXEMPLES.

Pour $3 \times x = 5$ on obtient $x = \frac{5}{3}$.

Pour $(-3) \times x = 5$ on obtient $x = -\frac{5}{3}$.

Dans le cas :

$$\exists x ? \qquad 0 \times x = 8$$

on sait que $\forall x \quad 0 \times x = 0$, donc x ne figure dans l'équation que d'une manière conventionnelle, et en apparence seulement. Le problème :

$$\exists x ? \qquad 0 \times x = b,$$

ne dépend pas du choix de x. Il est *impossible* pour $b \neq 0$ et *indéterminé* pour $b = 0$.

Dans N, l'équation $\exists x ?\ a \times x = b$ n'admet de solution que si b est un multiple de a, ou, en d'autres termes, que si a divise b.

EXEMPLES.

$x \in N \quad \exists x ?\ 5 \times x = 11$ $\qquad$ Non.
$x \in N \quad \exists x ?\ 5 \times x = 45$ $\qquad$ Rép. oui $x = 9$.

UN THÉORÈME ESSENTIEL. — L'équation :

$$a \neq 0 \quad x \in R \quad \exists x ? \quad a \times x = 0$$

admet la solution unique $x = 0$, car :

$$a \neq 0 \text{ et } x \neq 0 \implies a \times x \neq 0.$$

On peut donc écrire l'équivalence logique :

$$a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0 \qquad (\text{« ou » inclusif})$$

et énoncer le théorème :

- **THÉORÈME. — Pour qu'un produit de facteurs soit nul il faut et il suffit que l'un (au moins) des facteurs soit nul.**

Exercices d'applications numériques.

Résoudre les équations suivantes ou en constater l'impossibilité :

86. $x \in N$ $\exists x?$ $3x - 15 = 0$ $\exists x?$ $19x = 0$

$\exists x?$ $5^2 \times 7^3 \times 11^2 x - 5^3 \times 7^3 \times 11^4 = 0$

$\exists x?$ $5^2 \times 7^3 \times 11^2 x - 5^3 \times 7^3 \times 11 = 0.$

87. $x \in Z$ $\exists x?$ $7x + 343 = 0.$

$x \in Z$ $\exists x?$ $(2\times 3 + 3\times 5 + 5\times 7)x + (3\times 5 + 5\times 7 + 7\times 9) = 0.$

88. $x \in Q^+$ $\exists x?$ $x\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) = 0.$

89. $x \in R$ $\exists x?$ $(3 + 2\sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2}) = 0.$

$x \in R$ $\exists x?$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$

Exercices d'applications numériques.

Exercices de caractère théorique.

90. — On suppose qu'il existe, pour une opération $*$, un élément neutre e :

$$\forall a \quad e * a = a * e = a \qquad (1)$$

On se propose d'examiner s'il peut en exister un autre e' :

$$\forall a \quad e' * a = a * e' = a. \qquad (2)$$

Appliquer la relation (1) au cas où $a = e'$, puis la relation (2) au cas où $a = e$. Comparer les résultats. En déduire l'unicité de l'élément neutre.

91. — Montrer que l'opération « moyenne »

$$a * b = \frac{a+b}{2}$$

n'admet pas d'élément neutre.

92. — On considère la famille $\mathcal{F}$ formée par l'ensemble

$$E = \{a, b, c\}$$

et ses sous-ensembles :

$$A = \{b, c\}; \quad B = \{c, a\}; \quad C = \{a, b\}$$
$$A_1 = \{a\}; \quad B_1 = \{b\}; \quad C_1 = \{c\}$$

et enfin $\varnothing$, ensemble vide.

1° Montrer que, sur $\mathcal{F}$, l'opération d'union $\cup$ admet $\varnothing$ comme élément neutre, mais qu'il n'y a pas de symétrique d'un élément.

2° Montrer que l'opération d'intersection admet un élément neutre, E, mais qu'il n'y a pas de symétrique.

3° Montrer que les opérations $\cap$ et $\cup$ sont commutatives et associatives.

93. — Dans l'ensemble $a \in R$ $b \in R$ on convient de poser :

$$(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b).$$

Exemple : $(3,4) * (5,6) = (15, 22)$.

Montrer que $(1, 0)$ est neutre et que, si $a \neq 0$, (a, b) admet un symétrique. Le calculer et en déduire qu'il est unique.

94. — Soit E l'ensemble des quatre as d'un jeu de cartes, A l'ensemble formé par l'as de cœur et l'as de trèfle. Étudier l'équation :

$$\exists X? \quad A \cap X = \varnothing \quad X \in \text{Ensemble des parties de E.}$$

95. — Pour l'opération « moyenne » $m = a * b = \frac{a+b}{2}$, étudier les équations :

$x \in N$ $\exists x?$ $5 * x = 3,$

$x \in N$ $\exists x?$ $5 * x = 1,$

$x \in N$ $\exists x?$ $5 * x = b$; discuter.

Exercices de caractère théorique.

17. La distributivité. — On a dans N :

$$5 \times (8 + 3) = 5 \times 8 + 5 \times 3 = 55.$$

De telles égalités, qu'il est facile de vérifier individuellement, se démontrent globalement en appliquant la définition même de la multiplication des entiers.

Dans Q^+ on aura par exemple :

$$\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{11}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{11} = \frac{171}{385}.$$

D'une façon générale on a, dans R :

$$\text{III} \quad \forall a\ \forall b\ \forall c \qquad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

On dit que la multiplication est *distributive par rapport à l'addition.*

La définition de la soustraction dans les ensembles symétrisés, savoir :

$$a - b = a + \text{opposé de } b,$$

permet d'écrire :

$$\text{III } bis \quad \forall a\ \forall b\ \forall c \qquad a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c).$$

Dans les ensembles non symétrisés N, Q^+ et R^+ cette égalité ne vaut que si $(b - c)$ existe.

La distributivité s'étend facilement au cas où la somme comporte plus de deux termes :

$a \times (b + c + d) = a \times [(b + c) + d];$	associativité.
$a \times [(b + c) + d] = a(b + c) + a d;$	distributivité.
$a \times (b + c) + a \times d = a \times b + a \times c + a \times d;$	distributivité et associativité.

Règles touchant les parenthèses, crochets, etc. — La règle de distributivité comprend comme cas particulier la multiplication d'une somme algébrique par $(+ 1)$ ou par $(- 1)$, c'est-à-dire les règles bien connues touchant la suppression des parenthèses. Ainsi :

$$[3 - (8 - 11)] - [-2 + (-15 + 3)]$$
$$= (+1)[3 + (-1)(8 - 11)] + (-1)[-2 + (-15 + 3)]$$
$$= 3 + (-1)(8 - 11) + 2 + (-1)(-15 + 3)$$
$$= 3 - 8 + 11 + 2 + 15 - 3.$$

Dans la pratique on n'écrira pas les facteurs $(+ 1)$ ou $(- 1)$ et l'on appliquera directement la règle :

- Règle. — **Parenthèse précédée du signe + : peut être supprimée sans changer les signes du contenu.**

  Parenthèse précédée du signe — : peut être supprimée à condition de changer dans le contenu les + en —, et les — en +.

  Dans les calculs numériques il faut aussi supprimer le signe — ou + devant la parenthèse.

La même règle permet, en sens inverse, l'introduction de parenthèses et la mise en facteur :

$$a^2 - (b + c)\,a + bc = a\,(a - b) + c\,(b - a) = (a - b)\,(a - c).$$

Développement d'un produit. — Enfin, en appliquant plusieurs fois la règle de distributivité, on obtient le mécanisme donnant le développement du produit de deux sommes, par exemple :

$$(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d$$
$$= (a \times c) + (b \times c) + (a \times d) + (b \times d).$$

Rappelons à ce sujet que, dans Z ou Q ou R, on appelle *somme algébrique* une somme où les termes du type $+ (- a)$ sont écrits sous la forme $- a$. Pour développer un produit de deux sommes algébriques il importe alors de respecter la règle des signes.

Exemples.

$$(5a^2 - 2\,ab + 7\,b^2)\,(2\,a - 3\,b)$$
$$= (5\,a^2 - 2\,ab + 7\,b^2)\,2\,a + (5\,a^2 - 2\,ab + 7\,b^2)\,(-3\,b)$$
$$= 10\,a^3 - 4\,a^2b + 14\,ab^2 - 15\,a^2b + 6\,ab^2 - 21\,b^3$$
$$= 10\,a^3 - 19\,a^2b + 20\,ab^2 - 21\,b^3.$$

Exercices d'applications numériques.

Calculer : 1° en faisant de chaque parenthèse un seul nombre; 2° en supprimant d'abord les parenthèses et en associant les termes qui donnent un résultat simple :

96. $\left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+1\right)-\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-2\right)+\left(-2+\frac{5}{3}\right)$

97. $-(214 - 63 - 72) - (303 - 84 + 52) + (240 - 20).$

Supprimer les parenthèses et les crochets dans les expressions :

98. $\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\right]-\left[1-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]-\left[1-\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right)\right]$

99. $[(a - c) - (a - b)] - [(b - c) - (a + c)].$

100. $1 - [1 - (1 - a)] - [1 - (1 - b)] - [1 - (b - a)].$

101. $[a - (a - b)] - [(2\,a - b) + (-a - 2\,b) - (-3\,b + a)].$

102. — Démontrer que la différence de deux nombres relatifs n'est pas changée si l'on ajoute à ces deux nombres un même nombre relatif.

103. — Dans la somme algébrique :

$$S = -16 + 24 - 64 + 32,$$

mettre en facteur commun le plus grand nombre entier possible en le supposant : 1° positif; 2° négatif.

104. — Calculer de deux façons différentes les nombres :

$$\left(-1+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)(-4); \qquad \left(-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{2}{9}\right)\left(\frac{18}{5}\right)$$
$$\left(\frac{4}{9}-\frac{11}{27}\right)\left(2-\frac{4}{3}\right); \qquad \left(\frac{3}{5}-\frac{7}{15}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right).$$
$$\frac{7}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right); \qquad \left(-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right).$$

105. — Calculer de deux façons différentes, les valeurs du produit :

$$(a + b)(c - d)$$

quand on remplace a, b, c, d par les valeurs suivantes :

$$a = 75 \quad ; \quad b = 25 \quad ; \quad c = 13 \quad ; \quad d = 4$$
$$a = 75 \quad ; \quad b = -25 ; \quad c = 17 \quad ; \quad d = -7.$$
$$a = -75 ; \quad b = -25 ; \quad c = -13 ; \quad d = -4.$$

106. — Que peut-on dire des nombres a, b, c si l'on a :

$$abc = 0; \quad abc \neq 0;$$
$$(a - b)(b - c)(c - a) = 0;$$
$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0;$$
$$(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0?$$

Exercices d'applications numériques.

Exercices de caractère théorique.

107. — Démontrer soigneusement à l'aide de III et I que :

$$a \times (b + c + d + e) = (a \times b) + (a \times c) + (a \times d) + (a \times e)$$

108. — D'une façon générale s'il existe deux opérations, l'une marquée $*$, l'autre marquée $\circ$, on dira que $*$ est distributive pour $\circ$ si :

$$\forall a \ \forall b \ \forall c \begin{cases} a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c) & \text{III}_1 \\ (b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a) & \text{III}_2. \end{cases}$$

a) Que peut-on dire si $*$ est commutative?

b) Que faut-il supposer de plus pour pouvoir développer $(a \circ d) * (b \circ c)$?

109. — L'addition est-elle distributive par rapport à la multiplication?

110. — Montrer que l'opération « moyenne » $a * b = \dfrac{a + b}{2}$ est *auto-distributive* : $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$.

111. — Dans R^+ on a défini en exercice l'opération Maximum $a \mathbf{M} b$ et l'opération minimum $a \mathbf{m} b$. Les étudier du point de vue distributivité. Étudier comment se comporte la multiplication $\times$ par rapport à $\mathbf{M}$ et $\mathbf{m}$.

Exercices de caractère théorique.

18. Groupes. Anneaux. Corps.

★ *La présente section présente un caractère facultatif, elle n'est pas indispensable à l'intelligence du reste de l'ouvrage et peut être sautée.*

Il est possible de résumer l'étude des divers ensembles de nombres en donnant quelques définitions préalables.

☆ DÉFINITION. — **On appelle « groupe » un ensemble où se trouve définie une opération associative, avec élément neutre et telle que tout élément admette un symétrique. Les axiomes sont :**

A : Existence d'une opération $*$.
B : $\forall a \ \forall b \ \forall c \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
C : $\exists e \ \forall a \quad a * e = e * a = a$.
D : $\forall a \ \exists a' \quad a * a' = a' * a = e$.

Nous avons rencontré les groupes suivants Z, Q, R pour l'addition, l'élément neutre étant 0; et Q^{*+}, R^{*+}, Q^*, R^*, pour la multiplication, l'élément neutre étant 1. Rappelons que Q^{*+} est l'ensemble des rationnels positifs moins 0.

☆ DÉFINITION. — **On appelle « anneau » un ensemble où se trouvent définies deux opérations : une addition commutative, qui fait de cet ensemble un groupe et une multiplication associative, distributive par rapport à l'addition.**

Les axiomes sont donc :

A : Existence de $+$.
B : $\forall a \; \forall b \; \forall c \quad (a + b) + c = a + (b + c)$.
C : $\exists 0 \; \forall a \quad a + 0 = 0 + a = a$.
D : $\forall a \; \exists a' \quad a + a' = a' + a = 0$; a' se note $-a$.
E : $\forall a \; \forall b \quad a + b = b + a$.

A_1 : Existence de « $\times$ ».
B_1 : $\forall a \; \forall b \; \forall c \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
F : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$.

L'axiome D implique qu'un anneau formé de nombres est *symétrisé*. Les autres axiomes y étant vérifiés on peut faire la liste des anneaux rencontrés, ce sont :

Z, Q, R.

☆ DÉFINITION. — **On appelle « corps » un anneau dans lequel la multiplication fait de l'ensemble (privé de zéro) un groupe multiplicatif.**
Les axiomes sont donc ceux d'un anneau et :

C_1 : $\exists e \; \forall a \quad e \times a = a \times e = a$.
D_1 : $\forall a \; \exists a'' \quad a \times a'' = a'' \times a = e$.

C_1 et D_1 impliquent l'existence d'un *inverse*, la liste des corps rencontrés se réduit donc à :

Q, corps des rationnels, et R, corps des réels.

N. B. — De même qu'un Limousin est un Français, de même qu'un carré est un rectangle, un corps est un anneau.

L'anneau Z n'est pas un corps car il ne contient pas les inverses des entiers.

Exercices. 112. — On considère un certain nombre d'actions possibles A_0, A_1, A_2, A_3 ....
Si l'on peut faire d'abord l'action A_1 puis l'action A_2, le résultat global est une action que l'on convient de noter $A_1 \circ A_2$.
a) On considère un interrupteur et deux actions possibles
A_0 le laisser en place.
A_1 le manœuvrer.
Montrer que $\{ A_0, A_1 \}$ est un groupe pour l'opération $\circ$.
b) Émile fait son lit, il en arrive au matelas. Quatre actions possibles :
A_0 le laisser en place.
A_1 le retourner dans le sens pieds-tête.

A_2 le retourner dans le sens gauche-droite.
A_3 faire A_1 puis A_2.

Montrer que $\{ A_0, A_1, A_2, A_3 \}$ forment un groupe pour $\circ$.
Consigner les résultats dans un tableau à double entrée.

113. — Montrer que les nombres entiers relatifs pairs ... — 6, — 4, — 2, 0, 2, 4, ... forment un anneau. La multiplication admet-elle, dans cet anneau, un élément neutre?

114. — Montrer que les nombres décimaux relatifs qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres forment un anneau. Et pourquoi pas un corps?

115. — Soit un ensemble A de nombres de la forme :

$$a + b\sqrt{2} \qquad a \in Z \qquad b \in Z.$$

1°) Démontrer que ces nombres forment un anneau.
2°) Calculer $(\sqrt{2} + 1)^n$ pour $n = 2, 3, 4, 5$.
3°) Calculer $(-\sqrt{2} + 1)^n$ pour $n = 2, 3, 4, 5$. Que remarque-t-on?
4°) Calculer $(\sqrt{2} + 1)\ (\sqrt{2} - 1)$. Application :
Calculer $\dfrac{5 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$; montrer qu'il reste dans l'anneau.
5°) Si $a \in Q$ et $b \in Q$ les nombres étudiés forment un corps.

Exercices.

III. PROPRIÉTÉS DES RELATIONS

19. L'inégalité. — Dans les différents ensembles de nombres est définie une relation, l'inégalité, qui se note $<$ et se lit « inférieur à », ou bien $>$ et se lit « supérieur à », et $a < b \iff b > a$.

Étant donné deux nombres a et b

ou bien	$a = b$	
ou bien	$a < b$	ces « ou » sont *exclusifs*.
ou bien	$b < a$	

Dans N, Q^+ et R^+ on voit que :

$$a < b \iff \exists d,\ d \neq 0 \text{ et } a + d = b.$$

Dans Z, Q et R on peut définir la relation $<$ en se servant de la différence qui existe toujours et poser (par exemple dans R) :

$$\begin{cases} a - b = 0 & \iff a = b \\ a - b \in R^{*+} & \iff b < a \\ a - b \in R^{*-} & \iff a < b. \end{cases}$$

Ces définitions entraînent aussitôt que :

$$\begin{cases} a \in R^{*+} \quad \forall a & 0 < a \\ a \in R^{*-} \quad \forall a & a < 0 \end{cases}$$

les nombres positifs sont plus grands que zéro, les négatifs plus petits.

La règle des signes s'interprète alors comme suit :

$$a > 0 \text{ et } b > 0 \implies a \times b > 0$$
$$a > 0 \text{ et } b < 0 \implies a \times b < 0$$
$$a < 0 \text{ et } b < 0 \implies a \times b > 0.$$

Comportement de l'inégalité vis-a-vis de l'addition. — Dans l'inégalité :

$$80 < 9^2 \tag{1}$$

nous dirons que 80 est le *premier membre* et 9^2 le *second membre*.

Dans l'inégalité :

$$\sqrt{2} > 1{,}4 \tag{2}$$

le premier membre est $\sqrt{2}$, le second 1,4.

Nous dirons que (1) et (2) sont des inégalités de *sens contraires*. On pourrait exprimer (1) par :

$$9^2 > 80. \tag{1 bis}$$

Nous dirons que (2) et (1 *bis*) sont des inégalités de *même sens*.

Rappelons enfin l'équivalence logique :

$$a < b \iff (b - a) > 0$$

dire que a est inférieur à b, c'est dire que la différence $b - a$ est un nombre positif.

Ces définitions rappelées, supposons :

$$a < b \tag{I}$$

et comparons $a + c$ à $b + c$.

$$a < b \iff (b - a) > 0$$

or : $$(b - a) = [(b + c) - (a + c)]$$

donc : $$[(b + c) - (a + c)] > 0$$

d'où : $$a + c < b + c. \tag{II}$$

De là, posant $d = -c$, on tire :

$$a - d < b - d.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\forall a\ \forall b\ \forall c \quad a < b \iff a + c < b + c$$
$$\forall a\ \forall b\ \forall c \quad a < b \iff a - d < b - d$$

et dire que la relation d'inégalité est *stable* pour l'addition. En d'autres termes :

- **Si l'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens.**

Comportement de l'inégalité vis-a-vis de la multiplication. — Supposons encore :

$$a < b \tag{I}$$

et soit $c \neq 0$. Comparons ac avec bc. Deux cas se présentent.

1° $c \in R^{*+}$. Alors :

$$a < b \iff (b - a) \in R^{*+}.$$

Or $bc - ac = (b - a) \times c$

et $(b - a) \in R^{*+}$ et $c \in R^{*+} \implies (b - a)c \in R^{*+}$.

Donc : $$bc - ac \in R^{*+},$$

et : $$ac < bc.$$

2° $c \in R^{*-}$. Une démonstration analogue montre que :

$$ac > bc.$$

La relation d'inégalité est stable pour la multiplication par les *nombres positifs*, sinon, le sens est affecté :

- **Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre positif, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.**
  Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraire.

Inégalité au sens strict, au sens large. — A côté de la relation $<$ dite inégalité au sens *strict* on considère souvent la relation $\leqslant$ dite inégalité *au sens large* qui se lit « inférieur ou au plus égal à » et qui est vérifiée si l'une ou l'autre des relations $<$ ou $=$ est vérifiée. On sait que :

$a < b$ et $b < c \implies a < c$ et que : $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \implies a \leqslant c$.

Ces relations sont transitives.

Exercices d'applications numériques.

116. — Ranger par ordre de grandeur croissante les nombres :
-5; $+5$; $-\frac{4}{3}$; $+\frac{4}{3}$; -2; $+2$; $-\frac{1}{3}$; $+\frac{1}{3}$; $+1$; -1; 0.

117. — Démontrer que les inégalités :
$$a < b \quad \text{et} \quad c < d$$
entraînent : $$a + c < b + d.$$

Quels sont les nombres x tels que l'on ait à la fois :

118. $x < 3$ et $x < -2$?

119. $x < -2$ et $x < -5$?

120. $x < -2$ et $x < -4$?

121. $1 < x < 5$ et $-1 < x < +3$?

122. $-5 < x < +3$ et $-6 < x < 0$?

Montrer qu'il n'existe pas de nombre x vérifiant simultanément :

123. $-1 < x < 4$ et $-5 < x < -2$.

124. $0 < x < 5$ et $-2 < x < 0$.

125. $x < 3$; $x > -1$; $4 < x$.

Exercices d'applications numériques.

Exercices de caractère théorique.

126. — Quel est le nombre x vérifiant simultanément :

$$-1 \leqslant x \leqslant 3; \quad -4 \leqslant x \leqslant -1; \quad -3 \leqslant x \leqslant +5?$$

127. — RELATIONS D'ORDRE. — Il existe dans divers ensembles des relations analogues à $<$ ou à $\leqslant$.

1° Dans l'ensemble H des humains, morts ou vifs, la relation :

$$a \mathcal{A} b$$

« a est un ascendant de b » est antisymétrique et transitive. Mais, alors qu'on peut toujours classer deux nombres pour $<$, on ne peut pas toujours classer deux humains pour $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ définit un ordre *partiel* et $<$ un ordre *total.*

On peut représenter $\mathcal{A}$ au moyen d'arbres généalogiques.

2° Dans N on pose $a|b$ si a divise b. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel. Faire un diagramme représentant cette relation pour le sous-ensemble $\{2, 3, 21, 42, 63\}$.

3° E étant l'ensemble des villes situées sur un fleuve F et ses affluents $f_1, f_2, \ldots$, étudier la relation « ... est en amont de ... ». La carte donne le diagramme de cette relation.

4° Dans un ensemble de propositions la relation logique $\Longrightarrow$ est elle une relation d'ordre pour l'implication mutuelle?

Exercices de caractère théorique.

IV. PUISSANCES — RACINES — PROPORTIONS

20. Puissances. — Soit $a \in R$, $a \neq 0$. Étudions l'ensemble A des nombres que l'on peut former à partir du seul a par des opérations consistant uniquement en multiplications ou divisions.

On peut former successivement :

$a \times a$ que l'on note a^2 (au carré)
$a^2 \times a = a \times a^2$, noté a^3 (au cube)
$a^3 \times a = a \times a^3 = a^2 \times a^2$, noté a^4 (puissance 4), etc.
$a \times a \times \ldots \times a = a^p$, s'il y a p facteurs que l'on peut d'ailleurs associer en groupements quelconques.

On peut former $a : a = 1$; $1 : a = \frac{1}{a}$; $\frac{1}{a} : a = \frac{1}{a^2}$; .

Écrivons le schéma suivant :

Z	.....	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
A	.....	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	a^4	...

montrant à droite les nombres obtenus par multiplication, à gauche les nombres obtenus par division.

On peut souligner la correspondance entre les deux échelles en posant par définition :

$$a = a^1, \quad 1 = a^0, \quad m \in N \qquad \frac{1}{a^m} = a^{-m}.$$

Nous allons voir que l'analogie constatée n'est pas superficielle mais se poursuit du point de vue opératoire.

RÈGLES CONCERNANT LE CALCUL DES PUISSANCES.

A. *Calcul de $(abc)^p$.*

1° Si p est positif $(a \times b \times c)^p$ est égal à :

$$\underbrace{(a \times b \times c)}_{1^{ere}} \times \underbrace{(a \times b \times c)}_{2^{eme}} \times \dots \underbrace{(a \times b \times c)}_{p^{ième}\text{ parenthèse}}.$$

En vertu de l'associativité et de la commutativité de la multiplication, ce produit peut s'écrire :

$$a \times a \times \dots a \times b \times b \times \dots \times b \times c \times c \times \dots c = a^p \times b^p \times c^p.$$

2° Si p est négatif, posant $p = -p'$ avec $p' > 0$ on aura :

$$(a \times b \times c)^p = \frac{1}{(a \times b \times c)^{p'}} = \frac{1}{a^{p'} \times b^{p'} \times c^{p'}} = a^{-p'} \times b^{-p'} \times c^{-p'}$$
$$= a^p \times b^p \times c^p.$$

3° Pour $p = 0$ $(a \times b \times c)^p = 1$ et $a^p \times b^p \times c^p = 1$.

B. *Calcul de $a^p \times a^q$.*

1° $p > 0$ $q > 0$ $a^p \times a^q = a^{p+q}$ d'après le théorème d'associativité.

Les cas particuliers $p = 0$, ou $q = 0$ se traitent facilement et donnent la même conclusion.

2° $p < 0$, $q < 0$; posons $p = -p'$; $q = -q'$; alors $p' \in N$ et $q' \in N$

$$a^p \times a^q = \frac{1}{a^{p'}} \times \frac{1}{a^{q'}} = \frac{1}{a^{p'+q'}} = a^{-p'-q'} = a^{p+q}$$

3° $p > 0$, $q < 0$. $a^p \times a^q = a^p \times \frac{1}{a^{q'}}$.

Si $p > q'$ le résultat est $a^{p-q'} = a^{p+q}$

Si $p < q'$ — $\frac{1}{a^{q'-p}} = a^{-q'+p} = a^{p+q}$

Si $p = q$ — $1 = a^0 = a^{p+q}$.

▪ RÈGLE.

$$p \in Z \quad q \in Z \quad \forall p \forall q \qquad a^p \times a^q = a^{p+q}.$$

C. *Calcul de $(a^p)^q$.*

1° Si $p > 0$ et $q > 0$

$$(a^p)^q = a^p \times a^q \times \dots a^p = a^{p+p+\dots+p} = a^{pq}.$$

2° Si $p < 0$ et $q > 0$, posons $p = -p'$, $p' > 0$

$$(a^p)^q = \left(\frac{1}{a^{p'}}\right)^q = \frac{1}{(a^{p'})^q} = \frac{1}{a^{p'q}} = a^{-p'q} = a^{pq}.$$

3° Si $p > 0$ et $q < 0$, posons $q = -q'$

$$(a^p)^q = \frac{1}{(a^p)^{q'}} = \frac{1}{a^{pq'}} = a^{-pq'} = a^{pq}.$$

4° Si $p < 0$ et $q < 0$

$$(a^p)^q = \frac{1}{(a^p)^{q'}} = \frac{1}{a^{pq'}} = a^{-pq'} = a^{pq}.$$

5° Pour $p = 0$ ou $q = 0$ $(a^p)^q = 1$ et $a^{pq} = 1$.

En résumé :

■ RÈGLES.

$$p \in Z \quad q \in Z \quad \forall p \forall q \quad a^p \times a^q = a^{p+q} \qquad (1)$$
$$p \in Z \quad \forall p \quad (a \times b \times c)^p = a^p \times b^p \times c^p \qquad (2)$$
$$p \in Z \quad q \in Z \quad \forall p \forall q \quad (a^p)^q = (a^q)^p = a^{pq}. \qquad (3)$$

EXEMPLES.

1° $3^5 \times 3^7 = 3^{5+7} = 3^{12}$.

2° $5^{-4} \times 5^{-11} = \frac{1}{5^4} \times \frac{1}{5^{11}} = \frac{1}{5^4 \times 5^{11}} = \frac{1}{5^{15}} = 5^{-15}$.

résultat que l'on obtiendrait directement par l'application de la règle.

3° $7^{-3} \times 7^4 = \frac{1}{7^3} \times 7^4 = \frac{7^4}{7^3} = 7^1 = 7^{4-3} = 7$

4° $6^{12} \times 6^{-17} = 6^{12} \times \frac{1}{6^{17}} = \frac{6^{12}}{6^{17}} = \frac{1}{6^5} = 6^{-5}$, c'est ce que donne la règle, avec $6^{12-17} = 6^{-5}$.

Exercices d'applications numériques.

Effectuer les calculs indiqués :

128. $(-7)^2$; $(9)^2$; $(-10)^3$; $(+8)^3$; $(-11)^2$.

129. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{1}{4}\right)^2$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{10}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$.

130. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(\frac{2}{-3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{-4}\right)^2$.

131. $(-1)^3 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$

132. $(-3)^4 \times (-3^5)$; $\frac{(-3)^4}{(-3)^6}$; $[(-3)^{-2}]^{-1}$.

133. $(-2)^{-1} \times (-3)^{-1} \times (-1)^{-1}$.

134. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}$.

135. $77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}}$

136. Calculer 2^{2^2} et 3^{2^3}. Attention, les exposants de ces deux nombres sont respectivement 2^2 et 2^3.

137. Soit $\frac{(3^2 \times 7^{-2})^{8^4}}{3^{5^2} \times 7^{(-4)^5}}(3^8 \times 4^{-1})^{(3\times4)^2}$. Mettre ce nombre sous la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma$.

138. Mettre le nombre $\left(\frac{ab}{c}\right)^{ab} \times {}^{(ab)^c} \times a^{(bc)^{bc}}$ sous la forme $a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$.

Calculer les nombres α, β, γ *de l'exercice* 138 *pour :*

139.	$a = 8$	$b = -2$	$c = -1$.
140.	$a = -8$	$b = 2$	$c = 1$.
141.	$a = 8$	$b = -2$	$c = -3$.
142.	$a = -8$	$b = -2$	$c = -3$.
143.	$a = -8$	$b = 2$	$c = 3$.

Exercices d'applications numériques.

Exercices de caractère théorique.

144. — Démontrer $\forall p\ \forall q \quad a^p : a^q = a^{p-q}$.

145. — Si a est négatif, a^p est-il positif ou négatif? Discuter. Liste des puissances de (-1)?

146. — Écrire sous forme de nombres décimaux :

$$10^{-1}, \quad 10^{-3}, \quad 10^{-6}.$$

Règle donnant le nombre de zéros après la virgule?

Résoudre : $\qquad x \in Z \quad \exists x$?

147. $\quad (4^x)^x = (4^8)^2$.

148. $\quad 100 \times 10^x = (1\,000)^{-5x} \times 100^{25}$.

149. $\quad 2^x + 4^x = 20$.

150. $\quad 3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

151. $\quad [4^{(2+x)}]^{3-x} = 1$.

152. $\quad (10^{x-1})^{x-4} = (100)^2$.

Exercices de caractère théorique.

21. Rapports. — Rappelons la définition :

☆ DÉFINITION. — **Rapport du nombre a au nombre $b \neq 0$:**
Le rapport de a à $b \neq 0$ est le nombre r tel que $a = b \times r$.

Pour $a \in N$ et $b \in N^*$ ce rapport est le rationnel $\frac{a}{b}$ admettant a comme numérateur et b comme dénominateur.

Dans le cas où a et b sont des éléments quelconques de R et R*, on continue à écrire $r = \frac{a}{b}$ et à employer les mots numérateur et dénominateur.

Il ne s'agit plus nécessairement d'une fraction ordinaire mais d'un rapport ou *fraction généralisée.*

EXEMPLES. $\qquad a = -\sqrt{3}, \quad b = 2, \quad r = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$a = \sqrt{8}, \quad b = \sqrt{2}, \quad r = 2.$$

PROPRIÉTÉ DES RAPPORTS. — On calcule avec les rapports comme avec les fractions ordinaires. Montrons, par exemple, qu'on ne change pas un rapport si l'on multiplie ses deux termes par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = r \quad b \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b \times r \quad K \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad Ka = K(br) = Kb \times r$$

Donc : $\qquad \frac{a}{b} = r \quad b \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{Ka}{Kb}.$

On peut donc *réduire deux rapports au même dénominateur.*

Exercices. *Effectuer les opérations suivantes :*

153. $\dfrac{3-\frac{2}{5}+\frac{4}{3}}{2+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$; $\dfrac{6-\frac{5}{2}+\frac{3}{8}}{3-\frac{5}{2}-\frac{7}{4}}$;

154. $\dfrac{1-\frac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}$; $\dfrac{1+\frac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}$.

155. $\dfrac{0{,}2-\frac{1}{1\,000}+0{,}02}{\frac{3}{4}+\frac{1}{1\,000}-0{,}04}$; $\dfrac{-4-0{,}5-8{,}5}{-\frac{4}{3}+\frac{7}{4}}$.

156. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\times\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{7}{3}}{1-\frac{5}{6}}\times\dfrac{-\frac{2}{5}+1}{\frac{2}{5}-1}$.

157. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{5}}\times\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{3}}:\dfrac{\frac{4}{5}-1}{1-\frac{2}{3}}$.

158. $\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{5}}\times\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}\times\dfrac{\frac{1}{4}-5}{1+\frac{1}{4}}$.

159. — Que peut-on dire des nombres a, b, c si l'on a :

$$\frac{a-b}{c}=0;\quad \frac{a-c}{b}=0;$$
$$\frac{a+b}{b-c}=0;\quad \frac{a+b-c}{c}=0?$$

160. — Pour quelles valeurs de x les fractions :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)};\quad \frac{x}{(x+3)(x-2)}$$

n'ont-elles pas de sens?

Exercices.

22. Racines. — Étudions dans les divers ensembles de nombres les problèmes du type :

$$A \in \ldots\ x \in \ldots\ \exists x?\ x^2 = A.$$

1. Une condition de possibilité apparaît aussitôt : x^2 étant positif ou nul, le problème ne se pose que pour $A \geqslant 0$, sinon il est impossible.

2. Supposons $A > 0$. La réponse dépend des ensembles où l'on se place. Nous présentons dans le tableau page 53 le résumé de la discussion.

3. Si un problème admet une solution dans N, dans Q^+, dans R^+, il admet dans Z, Q ou R deux solutions : la précédente et l'opposée de celle-ci.

Convention : le **symbole** $\sqrt{\ }$ **désigne la solution positive** (quand elle existe).

La valeur de $\sqrt{(a-3)^2}$ est : $a-3$, si $a \geqslant 3$,
$3-a$, si $a \leqslant 3$.

On peut écrire dans tous les cas :

$$\sqrt{(a-3)^2} = |a-3|.$$

EXEMPLE. Pour $a = 2$ $\sqrt{(2-3)^2} = \sqrt{(-1)^2} = 1.$
Pour $a = 5$ $\sqrt{(5-3)^2} = \sqrt{2^2} = 2.$

$A \in$ / $x \in$	N	Q^+ (mais pas de N)	R^+ (mais pas de Q^+)
N	Possible seulement si A est un carré $\sqrt{n^2} = n \in N$		
Q^+	Si impossible dans N, impossible dans Q^+	possible si A est un carré	
R^+	Toujours possible : $\sqrt{A}$ Si impossible dans N, on obtient une infinité de décimales (apériodiques)	cf. case à gauche	cf. case à gauche
Z	Si possible dans N, on a $\sqrt{n^2}$ et $-\sqrt{n^2}$		
Q	Voir Q^+	si possible dans Q^+, deuxième solution	
R	On a les solutions $\sqrt{A} \in R^+$ $-\sqrt{A} \in R^-$	cf. case à gauche	cf. case à gauche

EXEMPLES.

$x \in N$ $\exists x$? $x^2 = 25$ *Rép.* : $x = 5$
$x \in N$ $\exists x$? $x^2 = 26$ *Rép.* : non
$x \in Z$ $\exists x$? $x^2 = 25$ *Rép.* : $x = 5$ et $x = -5$
$x \in Q^+$ $\exists x$? $x^2 = \frac{18}{8}$ *Rép.* : $x = \frac{3}{2}$
$x \in Q$ $\exists x$? $x^2 = \frac{27}{12}$ *Rép.* : $x = \frac{3}{2}$ et $x = -\frac{3}{2}$
$x \in Q$ $\exists x$? $x^2 = 3$ *Rép.* : non
$x \in R^+$ $\exists x$? $x^2 = 3$ *Rép.* : $x = \sqrt{3} = 1{,}732\,05 \ldots$.
$x \in R$ $\exists x$? $x^2 = 3$ *Rép.* : $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$.

Racine carrée d'un produit. — Pour $AB \in R^+$, soit à calculer $\sqrt{AB}$.

$$AB > 0 \implies A > 0 \text{ et } B > 0 \quad \text{ou} \quad A < 0 \text{ et } B < 0.$$

Plaçons-nous dans le premier cas.

Soit : $\quad a = \sqrt{A} \quad$ et $\quad b = \sqrt{B}$.

Alors : $\quad \sqrt{AB} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(ab) \times (ab)} = ab.$

D'où : $\quad \sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} \qquad A > 0 \qquad B > 0.$

Dans le second cas :

$$\sqrt{AB} = \sqrt{-A}\,\sqrt{-B} \qquad A < 0 \qquad B < 0.$$

Exemples.

1. $\sqrt{228} = \sqrt{2 \times 144} = \sqrt{2 \times 12^2} = \sqrt{2} \times 12 = 12\sqrt{2}$;

on a fait *sortir 12 du radical.*

2. $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = |a| \times \sqrt{b}.$

3. $\sqrt{27} \times \sqrt{3} = \sqrt{27 \times 3} = \sqrt{81} = 9,$

cet exemple montre qu'un résultat rationnel peut se cacher sous une « apparence » irrationnelle.

Racine carrée d'un quotient. — Pour $\frac{A}{B} > 0$ soit à calculer $\sqrt{\frac{A}{B}}$.

$$\frac{A}{B} > 0 \implies A > 0 \text{ et } B > 0 \quad \text{ou} \quad A < 0 \text{ et } B < 0.$$

Premier cas. Soit $\quad a = \sqrt{A}$ et $b = \sqrt{B}$.

Alors $$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Deuxième cas. $$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}}, \qquad A < 0, \qquad B < 0.$$

Exemples. $$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; \qquad \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$1{,}224 < \sqrt{\frac{3}{2}} < 1{,}225.$$

On remarquera l'avantage, du point de vue pratique, de ce procédé.

Résumé des règles.

$$\sqrt{AB} = \sqrt{|A|}\sqrt{|B|}$$
$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$$
$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{|A|}}{\sqrt{|B|}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$$

Exercices. **161.** — Calculer à 10^{-3} près $a = \dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Solution : Nous utilisons l'identité

$$\forall a \ \forall b \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$a = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}-3-2+\sqrt{2}}{2-1} = 4\sqrt{2}-5.$$

Nous avons ***rendu le dénominateur rationnel*** en le multipliant par la *quantité conjuguée.*

Si nous prenions : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

nous aurions : $5{,}656 < 4\sqrt{2} < 5{,}660$

l'encadrement se fait à 4.10^{-3}.

Il faut prendre un chiffre de plus

$$1{,}414\,1 < \sqrt{2} < 1{,}414\,2.$$
$$5{,}656\,4 < 4\sqrt{2} < 5{,}656\,8.$$
$$5{,}656 < 4\sqrt{2} < 5{,}657.$$
$$0{,}656 < a < 0{,}657.$$

162. — Calculer à 10^{-3} près les nombres :

$$a = \frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \quad b = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}; \quad c = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Calculer les nombres :

163. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\quad \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

164. $\sqrt{98}-\sqrt{50}-\sqrt{8}$; $\quad \sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{2}$.

165. $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{12}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$; $\quad \dfrac{\sqrt{75}-\sqrt{12}-\sqrt{27}}{49}$.

166. $\dfrac{(3\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1}$; $\quad \dfrac{(3\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}$.

167. — On a : $\quad 0 < a < 1 < b.$

Ranger par ordre de grandeur croissante ces nombres et les nombres :

$$\sqrt{a}; \quad a^2; \quad a^3; \quad b^2; \quad b^3; \quad \sqrt{b}.$$

Calculer en nombres décimaux exacts, ou approchés à 10^{-2}, près les nombres suivants :

168. $\sqrt{8}$; $\quad \sqrt{12}$; $\quad \sqrt{50}$; $\quad \sqrt{75}$.

169. $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{72}$; $\quad \sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{75}$.

170. $\dfrac{5-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; $\quad \dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$; $\quad \dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; $\quad \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$.

171. — Calculer la valeur numérique des expressions :

$$a+b^2; \quad (a+b)^2; \quad 5\,ab^2; \quad (5\,ab)^2$$

quand : $\quad a = 1-\sqrt{2}, \quad b = \sqrt{2}.$ **Exercices.**

23. Proportions.

☆ DÉFINITION. — **On appelle proportion l'égalité de deux rapports.**

$\frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ est une proportion (vérifier l'exactitude de cette affirmation).

Le terme $\sqrt{20}$, écrit en premier, et le terme $\sqrt{5}$, écrit en dernier, s'appellent les *extrêmes*. 5 et 2 qui, dans l'ordre usuel de l'écriture, s'intercalent entre les extrêmes, sont les *moyens*.

PROPRIÉTÉS D'UNE PROPORTION. — Soit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \qquad \frac{c}{d} = \frac{cb}{bd} \qquad \text{(propriété des rapports)}$$

Donc :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd} \implies ad = cb.$$

■ **Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.**

Partons maintenant d'une égalité de la forme $uv = wx$. Peut-on en déduire une ou des proportions?

Aucun des couples (u, v) et (w, x) n'est spécialement prédestiné à jouer le rôle de moyens, ou d'extrêmes : on peut simplement dire que si l'un donne les moyens l'autre donnera les extrêmes.

D'autre part, pour passer à la forme proportion, il convient d'avoir des dénominateurs non nuls.

Écartons donc les cas : $0 \times 0 = 0 \times 0$

et : $u \neq 0 \quad 0 \times u = 0 \times 0$

Le cas : $u \neq 0 \quad x \neq 0 \quad u \times 0 = 0 \times x$,

admet une écriture sous forme de proportion :

$$\frac{0}{u} = \frac{0}{x}.$$

Reste maintenant le cas général, où

$$uvwx \neq 0.$$

On peut choisir u et v comme extrêmes et wx comme moyens, il reste encore à choisir les places respectives de u et v, puis de w et x :

$$uv = wx \implies \frac{uv}{vx} = \frac{wx}{vx} \implies \frac{u}{x} = \frac{w}{v}$$

$$uv = wx \implies \frac{uv}{uw} = \frac{wx}{uw} \implies \frac{v}{w} = \frac{x}{u} \qquad \text{etc.}$$

$uvwx \neq 0$ et $uv = wx$ permettent d'écrire toutes les proportions donnant uv comme produit de moyens ou d'extrêmes et wx comme produit d'extrêmes ou de moyens.

Pratiquement on a souvent à faire ces deux opérations légitimes :
— permuter deux extrêmes, ou deux moyens;
— inverser les deux rapports.

SUITE DE RAPPORTS ÉGAUX. — Supposons que l'on ait :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Soit r la valeur commune de ces rapports et soient k, l, m des nombres non nuls.

On peut écrire :

$$\frac{a'}{a} = r \implies a' = ar \implies ka' = ka \times r$$

et de même :

$$lb' = lb \times r, \qquad mc' = mc \times r$$

d'où :

$$ka' + lb' + mc' = (ka + lb + mc) \times r.$$

k, l et m étant quelconques, on aura donc en général $ka + lb + mc \neq 0$ et par conséquent :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{ka' + lb' + mc'}{ka + lb + mc}.$$

Le cas où l'on prend $k = l = m = 1$ se présente assez souvent dans la pratique.

MOYENNE PROPORTIONNELLE. — Si une proportion se présente sous la forme :

$$\frac{a}{q} = \frac{q}{d}$$

on dit que q est *moyenne proportionnelle* de a et de d.

Cette définition équivaut à :

$$q^2 = ad$$

et q n'existe que pour $ad > 0$: $q' = \sqrt{ad}, \qquad q'' = -\sqrt{ad}.$

EXEMPLES :

Pour $a = 8$ et $d = 2$, $q' = 4$ et $q'' = -4$.
Pour $a = 9$ et $d = 2$, $q' = 3\sqrt{2}$ et $q'' = -3\sqrt{2}$.

Exercices. 172. — Compléter les proportions

$$\frac{\frac{4}{3}}{-5} = \frac{-\frac{2}{5}}{\quad}; \qquad \frac{8}{25} = \frac{\quad}{\frac{1}{4}}.$$

on dit que l'on calcule *la quatrième proportionnelle.*

173. — Calculer les moyennes proportionnelles et la demi-somme des nombres a et b dans chacun des cas suivants :

1° $a = 4$; $b = 9$; 2° $a = -4$; $b = -9$;

3° $a = \sqrt{8}$; $b = \sqrt{18}$; 4° $a = -\sqrt{8}$; $b = -\sqrt{18}$.

Dans chaque cas, ranger par ordre de grandeur croissante les nombres a, b et les nombres calculés.

Pourrait-on faire les calculs demandés avec la donnée :

$$a = \sqrt{8} \quad \text{et} \quad b = -\sqrt{18}?$$

Exercices

Exercices d'entraînement au calcul numérique.

Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple :

174. $\frac{25}{30} + \frac{-12}{15} - \frac{-7}{28}$; $\frac{30}{45} - \frac{5}{7} + \frac{-4}{-28}$.

175. $\frac{35}{40} \times \frac{-12}{14} \times \frac{-8}{15}$; $\frac{2^3}{3^2} \times \frac{4^2}{5^2} \times \frac{(15)^2}{8}$.

176. $\left(\frac{13}{39} + \frac{-2}{5}\right) \times \frac{3}{4}$; $\left(\frac{13}{5^2} \times \frac{-4}{-5}\right) : \frac{15}{-3}$.

177. $\sqrt{\frac{3}{5}} \times \sqrt{\frac{24}{5}}$; $\sqrt{\frac{3}{15}} : \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{45}}$.

178. $\sqrt{\frac{3^3}{5^3}} \times \sqrt{\frac{1}{15}}$; $\sqrt{\frac{288}{169}} : \sqrt{\frac{8}{225}}$.

Exercices d'entraînement au calcul numérique.

CHAPITRE II

CALCUL ALGÉBRIQUE

I. EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES. MONÔMES

24. Expressions algébriques. Variables. — Le triangle ABC (*fig. 6*) rectangle en A a pour côtés AB = 2 cm et AC = 3 cm. Évaluons son aire en cm². Un raisonnement simple — on complète le rectangle — montre que celle-ci vaut :

$$\frac{2 \times 3}{2} = 3.$$

Le raisonnement est indépendant des valeurs particulières 2 et 3. Si AB et AC mesurent respectivement x et y, on a :

$$x \in \mathrm{R}^+ \quad y \in \mathrm{R}^+ \quad \forall x \forall y \quad \text{aire (ABC)} = \frac{1}{2}xy.$$

Pour chaque triangle rectangle *particulier* x et y reçoivent des valeurs numériques déterminées, mais dans la formule *universelle* $\frac{1}{2}xy$ ces lettres sont « en attente », ce sont des *variables* qui *prennent leurs valeurs* dans R^+. Le même exemple nous montre que l'on peut, dans certaines conditions, parler du produit de deux variables. Le périmètre du triangle rectangle ABC conduirait à la formule :

FIG. 6.

$$\mathrm{P} = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

D'une façon générale, on appelle *expression algébrique* l'indication de calculs tels que somme, produit, racine, quotient à faire sur des variables et, éventuellement, des nombres.

VALEUR NUMÉRIQUE. — Le résultat obtenu en donnant aux variables des valeurs numériques particulières et en se conformant aux indications fournies par une expression algébrique A, s'appelle la *valeur numérique* prise par l'expression A pour les valeurs attribuées aux variables.

EXEMPLES.
$$A = (x + y)\,z + \frac{1}{u},$$

prend pour $x = 1$, $y = +2$, $z = +7$ et $u = -1$, la valeur :

$$(1 + 2)\,7 + \frac{1}{-1} = 20.$$

Pour ces mêmes valeurs, l'expression :

$$B = x + yz + \frac{1}{u},$$

prend la valeur numérique $1 + 2 \times 7 + \dfrac{1}{-1} = 14.$

Pour ces mêmes valeurs, l'expression :

$$C = x + y\frac{z + 1}{u},$$

prend la valeur
$$1 + 2\frac{7 + 1}{-1} = -15.$$

Précises et délicates, les conventions qui président à l'écriture des expressions algébriques doivent être comprises, et *respectées*. Le moindre déplacement d'une parenthèse ou d'une barre de fraction bouleverse la signification d'une expression : c'est ce dont témoignent les trois exemples précédents.

DOMAINE DE DÉFINITION. — Dans l'expression algébrique :

$$A = \frac{1}{x - 1},$$

on ne peut attribuer à x la valeur numérique 1. Le *domaine de définition de* A est donc R privé de 1, ce que nous écrirons $R - \{1\}$. En fait, il serait plus correct d'écrire;

$$x \in R - \{1\} \qquad A = \frac{1}{x - 1},$$

et, si l'usage autorise à sous-entendre la restriction, du moins celle-ci doit être présente à la pensée.

L'expression $B = \sqrt{x - 1}$ a pour domaine de définition l'ensemble caractérisé par $x \geqslant 1$.

VOCABULAIRE. — Une expression algébrique est dite *entière* si elle ne contient pas de variable en dénominateur, *rationnelle* si elle ne contient pas de variable sous un radical. Si, toutes les extractions possibles ayant été faites, il reste des variables sous radical, l'expression est *irrationnelle*.

Exécution des calculs. — Une expression algébrique complexe peut s'articuler en une suite d'opérations simples. Ainsi, pour :

$$P = x + y + \sqrt{x^2 + y^2},$$

on formera :

1. $Q = x + y$, 3. $S = y^2$, 5. $U = \sqrt{T}$.
2. $R = x^2$, 4. $T = R + S$, 6. $P = Q + U$.

Exercices. 179. — Quels sont les domaines de définition des expressions algébriques suivantes, où x et y ne peuvent représenter que des éléments de R?

$$\frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{1}{x^2 - y^2}, \quad \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

180. — Valeurs numériques pour $a = 4$ et $b = 2$ des expressions :

$$a + \frac{2\,b}{3}, \quad \frac{a + 2\,b}{3}, \quad (a + 2)\frac{b}{3}.$$

Conclusion pratique?

181. — L'expression $\sqrt{4\,a^2b^2}$ est-elle rationnelle ou irrationnelle? Calculer sa valeur 1° pour $a = 5$ et $b = 2$; 2° pour $a = -5$ et $b = 2$; 3° pour $a = -5$ et $b = -2$.

Dans quels cas cette expression est-elle égale à $2\,ab$?

182. — On considère les expressions :

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y}; \quad u = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}.$$

Calculer (si possible) leurs valeurs 1° pour $x = 1$ et $y = 1$
2° pour $x = 2$ et $y = 8$ 3° pour $x = -1$ et $y = -1$
4° pour $x = 4$ et $y = 1$ 5° pour $x = 3$ et $y = 1$.

183. — Calculer les valeurs numériques des expressions :

$$(a^2 + 3\,b)(a - 4\,b); \quad a^2 + 3\,ba - 4\,b; \quad a^2 + 3\,b\,(a - 4\,b)$$

pour : 1° $a = 4$; $b = 1$. 2° $a = 4$; $b = -1$.

184. — Calculer les valeurs numériques des expressions :

$$a + 3\,[(a - 5) \times 4 + 3\,(a - 2)]; \quad (a + 3)(a - 5) \times (4 + 3)(a - 2).$$

1° pour $a = 2$; 2° pour $a = 5$; 3° pour $a = -3$.

185. — Calculer les valeurs numériques des expressions :

$$a + 3\sqrt{a + b}; \quad (a + 3)\sqrt{a + b}; \quad (a + 3)\sqrt{a} + b.$$

1° pour $a = 5$, $b = 4$; 2° pour $a = 4$, $b = -5$. **Exercices.**

25. Monômes. — Soit x une variable; les puissances entières et positives de x :

$$x^1 = x, \quad x^2, \quad x^3, \ldots, \quad x^n, \ldots$$

auxquelles on peut joindre $x^0 = 1$, sont des expressions algébriques que nous appellerons les *monômes fondamentaux relatifs à la variable x.*

On obtient un *monôme en x* en multipliant un monôme fondamental par un coefficient numérique.

Exemples. Le monôme $\frac{1}{2}x^2$, qui représente l'aire du triangle rectangle et isocèle de côté x.

Le monôme $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ (aire du triangle équilatéral).

Le monôme $x^3 = 1 \times x^3$ (volume du cube).

Le monôme $-\frac{24}{5}x^8$.

L'exposant de x est le *degré* du monôme. Deux monômes qui proviennent du même monôme fondamental sont dits *semblables*, ils ont le même degré, la même *partie littérale*, ils diffèrent éventuellement par leurs *coefficients*.

Exemples. $\frac{1}{2}x^2$ et $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ sont semblables et de degré 2.

Cas de deux variables. — Soit x et y deux variables; les expressions algébriques :

$$x, y;\quad x^2, xy, y^2;\quad x^3, x^2y, xy^2, y^3;\quad \dots\quad \dots;\quad \dots, x^4y^2, \dots;\quad \dots.$$

sont des monômes fondamentaux relatifs à l'ensemble des variables x et y.

On obtient un monôme en x et y en multipliant un monôme fondamental par un coefficient numérique.

L'exposant de x est le degré en x, celui de y le degré en y, la somme des exposants est le degré du monôme par rapport à l'ensemble des variables.

Exemples. $5\,x^3y^8$ est de degré 3 en x, de degré 8 en y, et de degré 11 par rapport à l'ensemble des deux variables.

Deux monômes qui proviennent du même monôme fondamental sont dits *semblables*, ils ont la même partie littérale, le même degré en x, le même degré en y, le même degré global. Ils diffèrent éventuellement par leurs coefficients.

Exemple. $\frac{1}{3}x^5y^2$ et $-\frac{3}{8}x^5y^2$.

Cas général. — Ces définitions s'étendent facilement au cas de trois variables x, y, z; au cas de quatre variables x, y, z, t, etc...

Les constantes, c'est-à-dire les nombres, peuvent être considérées comme des monômes relativement à n'importe quelles variables : $3 = 3\,x^0y^0z^0$.

26. Opérations sur les monômes. — Nous avons mentionné plus haut la possibilité de faire des opérations algébriques dont les éléments (ou opérandes) seraient elles-mêmes des expressions algébriques. Traitons de façon détaillée la multiplication des monômes.

Multiplication des monômes. — Pour toutes les valeurs numériques x_0, y_0, attribuées aux lettres, les monômes $\frac{1}{2}xy$ et $3\,x^2y$ deviennent des produits de nombres et prennent des valeurs numériques. En vertu de l'associativité et de la commutativité de la multiplication, on peut écrire pour des *nombres* :

$$x_0 \in R \quad y_0 \in R\ .\ \forall x_0\ \forall y_0 \quad \left(\frac{1}{2}x_0y_0\right) \times (3x_0^2y_0) = \frac{3}{2}x_0^3y_0^2 \qquad (1)$$

Le monôme $\frac{3}{2}x^3y^2$ prend donc pour toutes les valeurs numériques attribuées à x et à y, une valeur numérique égale au produit des valeurs numériques des monômes $\frac{1}{2}xy$ et $3\,x^2y$. Il est donc naturel de considérer ce

monôme comme le produit des deux autres et d'écrire pour les *monômes* :

$$\left(\frac{1}{2}xy\right) \times (3x^2y) = \frac{3}{2}x^3y^2 \qquad (2)$$

La relation (2) exprime au niveau des monômes le contenu que possédait la relation (1) au niveau des nombres particuliers (et arbitraires) x_0 et y_0.

L'exemple précédent ayant une portée universelle, nous poserons :

☆ DÉFINITION. — **On appelle produit de deux monômes, un monôme dont le coefficient est le produit des coefficients des monômes facteurs et où chaque variable figure avec un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les monômes facteurs.**

On reconnaît aussitôt que la multiplication des monômes est associative et commutative. Si $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont trois monômes :

$$(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') \times \mathcal{M}'' = \mathcal{M} \times (\mathcal{M}' \times \mathcal{M}'')$$
$$\mathcal{M} \times \mathcal{M}' = \mathcal{M}' \times \mathcal{M}.$$

Réduction d'un monôme. — D'après la définition précédente, une écriture telle que : $yxy\,3\,x^2\,8\,xy^3$ a un sens et représente le monôme produit des monômes (y); (xy); $(3\,x^2)$; $(8\,xy^3)$. Le produit s'écrit plus simplement $24\,x^4y^5$. On dit que l'on a *réduit* le monôme initial.

Addition de monômes semblables. — En raisonnant comme pour la multiplication nous écrirons, par définition, au niveau des *monômes* :

(2) $$\frac{1}{2}x^5y^2 + \frac{9}{2}x^5y^2 - x^5y^2 = 4\,x^5y^2,$$ et nous dirons :

☆ DÉFINITION. — **La somme algébrique de deux ou plusieurs monômes semblables est le monôme qui leur est semblable et dont le coefficient est la somme algébrique de leurs coefficients.**

La nouvelle opération est encore associative et commutative.

Remarque. La somme peut se réduire au *monôme nul*

$$-3\,x^2 + 5\,x^2 - 2\,x^2 = 0 \times x^2 = 0.$$

Addition de monômes non semblables. — Étant donné deux, ou plusieurs, monômes non tous semblables comme : $3\,x$; $5\,x^2$; $7\,x^3$ nous pouvons concevoir une expression algébrique dont la valeur numérique serait en toutes circonstances la somme des valeurs numériques des différents monômes. Une telle expression sera la somme (par définition) des monômes et, en tant que somme de nombres « virtuels », ne dépendra ni de l'ordre des termes ni des groupements qu'on en pourrait faire.

Mais une telle expression sort du cadre des monômes; elle appartient à une catégorie nouvelle que nous allons étudier.

Exercices. 186. — **Étant donné les expressions algébriques suivantes, reconnaître celles qui sont** *a*) **entières;** *b*) **rationnelles;** *ab*) **rationnelles et entières;** *c*) **irrationnelles;** *ac*) **irrationnelles et entières.**
Caractériser leurs domaines de définition.

$$A = x + \sqrt{x-1} \qquad B = \frac{xy}{y+2} \qquad C = x^2 + xy + y^2$$

$$D = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2+\sqrt{x^2-1}} \qquad E = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \qquad F = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$$

$$G = ax^2 + bx + c \qquad H = \frac{ax+b}{x-\alpha} \qquad I = \sqrt{(x-1)^2+4}$$

$$J = \sqrt{-x^2-3} \qquad K = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \qquad L = \sqrt{|x-1|}.$$

Déterminer le produit des trois monômes $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$ ***dans les cas suivants :***

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}'$	$\mathcal{M}''$
187.	xy	yz	z^n
188.	$\frac{1}{2}x^3$	$\frac{1}{3}x^2$	$36x.$
189.	$\frac{1}{\sqrt{2}}xz$	$2\sqrt{2}\,xz^4$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}x^2y^2.$
190.	$343\,x$	$\frac{1}{7}xy$	$\frac{1}{7}xy^5$
191.	$1\,024\,x^{140}y^3$	$\frac{1}{256}x^{141}y^7$	$\frac{1}{8}x^{142}y^{11}.$

Exercices.

II. POLYNOMES

27. Polynomes.

☆ **Un polynome est une expression algébrique obtenue en faisant une somme de monômes.**

Exemple. L'aire du polygone obtenu en adjoignant au triangle rectangle ABC le carré BCDE construit extérieurement sur l'hypoténuse est donnée en fonction des variables $AB = x$ et $AC = y$ par la formule $\frac{1}{2}xy + x^2 + y^2$, donc par un polynome (*fig. 7*).

Les monômes que l'on ajoute s'appellent les *termes* du polynome. On peut ajouter tous les termes d'un ensemble de termes semblables et les remplacer par leur somme effectuée qui sera en général un monôme semblable aux précédents ou, éventuellement, zéro. On a ainsi *réduit les termes semblables* et le polynome se présente sous sa *forme réduite*.

Après réduction il peut ne rester qu'un seul monôme, il est donc naturel de convenir que les monômes sont des polynomes particuliers. Il peut même ne rester aucun terme, dans ce cas on conviendra que l'on a obtenu le *polynome nul*.

S'il reste deux termes on a un *binome*, s'il en reste trois, un *trinome*.

Ordonner un polynome. — Après réduction, si l'on a un polynome à une seule variable, on peut l'écrire en *l'ordonnant selon les puissances décroissantes* de la variable; par exemple :

$$3\,x^7 + 2\,x^5 - x^4 + \frac{1}{2}x - 7;$$

ou, selon les puissances croissantes :

$$-7 + \frac{1}{2}x - x^4 + 2\,x^5 + 3\,x^7.$$

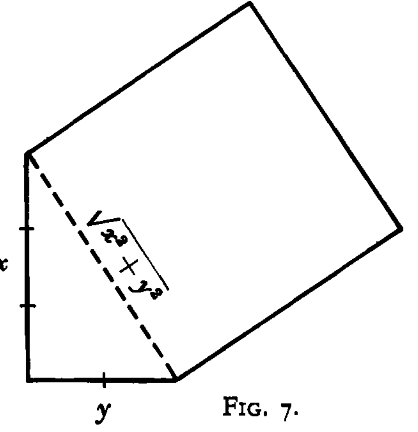


Fig. 7.

Si l'on a un polynome à deux variables, ou plus, on peut l'ordonner en classant d'abord les termes par degré, puis, pour l'ensemble des termes d'un degré donné, en adoptant l'ordre du dictionnaire pour les monômes. Par exemple, l'aire du polygone de la *fig. 7* s'écrira :

$$x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2.$$

Autres exemples. $2\,x^3y + 5\,x - 8\,y^2 - 6\,xy - 27\,x^2y^2 + 14\,y + 8 - y^4$ s'écrira selon les puissances croissantes :

$$8 + 5\,x + 14\,y - 6\,xy - 8\,y^2 + 2\,x^3y - 27\,x^2y^2 - y^4,$$

et :

$$2\,x^3y - 27\,x^2y^2 - y^4 - 6\,xy - 8\,y^2 + 5\,x + 14\,y + 8,$$

selon les puissances décroissantes.

Si une variable joue un rôle particulier, on peut la prendre comme *variable ordonnatrice* et opérer, pour cette variable, selon les puissances décroissantes ou croissantes. C'est ainsi que le polynome :

$$(a - b)\,x^3 + (2\,a + 7)\,x^2 + a^4x + a^2 + 3\,ab + 5,$$

a été ordonné par rapport à la variable ordonnatrice x. Il convient alors d'ordonner, le cas échéant, les coefficients des puissances de x, selon une règle qu'on choisira.

Degré d'un polynome. — Le degré d'un polynome par rapport à une variable est l'exposant le plus élevé de cette variable dans le polynome, après réduction. Le degré d'un polynome par rapport à l'ensemble de deux, ou plusieurs, variables est le degré du monôme ayant, par rapport à ces variables et après réduction, le plus haut degré.

Un polynome dont tous les termes ont le même degré k est dit *homogène* et de degré k.

Exemple. L'aire de la *fig. 7* est représentée par un polynome homogène et du second degré parce que les variables x et y représentent des longueurs.

Notation. — Un polynome en x se représente souvent par une notation telle que $A(x)$, $P(x)$, ...; un polynome en x et y par $A(x, y)$, $P(x, y)$,... la valeur numérique prise par $A(x)$ pour $x = x_0$ se représente par $A(x_0)$.

Exemples. $P(x, y) = 5x^2 - xy + 2y^2$,
$P(1, 2) = 5 - 2 + 8 = 11$.

Exercices. 192. — Réduire les termes semblables dans le polynome suivant, et calculer sa valeur numérique pour $x = \frac{1}{3}$ puis pour $x = -3$.

$$P = 9x^3 - \frac{1}{3}x + 3x^2 - 3x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + 3x - 9x^2 - 3x^3 - 9x + 27.$$

193. — Calculer la valeur numérique pour $x = 2$ du polynome :

$$Q = 1\,024\,x^6 - 256\,x^5 + 512\,x^4 - 8\,x^3 - 2\,048\,x^2 + 64\,x + 1\,024.$$

194. — Calculer la valeur numérique des monômes :

$$5\,x^2y^3; \qquad -4\,x^2yz; \qquad \frac{2}{3}x^2y^2$$

et de leur somme pour : $x = -3$; $y = 75$; $z = -\frac{1}{2}$.

195. — Écrire un polynome réduit du 3e degré en x, ayant tous les termes possibles.
Écrire un polynome homogène et réduit, en x et y, du 3e degré pour chaque lettre et pour l'ensemble des lettres; un polynome homogène en x et y, du 2e degré pour chaque lettre et du 3e degré pour l'ensemble.
Combien ces polynomes ont-ils de termes, au maximum?

Réduire les termes semblables et ordonner :

196. $8x^3 - 5y^3 + 6x^2y + 7xy^2 - 4x^3 - 3y^3 - 3xy^2 - 8x^2y$.

197. $5a^4 - 3a^3b + b^3 - a^2b^2 + ab^3 - 3b^3 + 4a^3 - 2a^2b^2 - ab^3$.

198. — Une expression est *symétrique* par rapport à deux lettres x et y quand cette expression ne change pas si l'on permute ces deux lettres.
Ex. : $x + y$; xy; $x^2 + y^2$.
Écrire un polynome du 3e degré, en x et y, symétrique par rapport à ces deux lettres, et homogène.

199. — Pour quelle valeur de a le polynome :

$$(a - 2)\,x^2 + 2\,(a^2 - 4)\,x + 8\,a - 16$$

se réduit-il au polynome nul?

200. — On donne le polynome P :

$$P = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3.$$

On forme un polynome Q en permutant dans P les lettres x et y.
Que peut-on dire des valeurs numériques prises par P et par Q si l'on donne à x et à y :
1° des valeurs numériques égales?
2° des valeurs numériques quelconques, mais distinctes?

201. — Valeur numérique du polynome : $8x^4 - 5x^2 + 5$
pour $x = -\sqrt{2}$, pour $x = +\sqrt{2}$. Remarques?

202. — Valeur numérique du polynome $3x^5 - 5x^3 + 8x$
pour $x = 0$; $x = -1$ puis $x = 1$;
$x = -2$ puis $x = +2$. Remarques?

Exercices.

28. Opérations sur les polynomes. — Comme il a été remarqué, les monômes, les polynomes, et plus généralement les expressions algébriques par rapport, à une ou plusieurs variables, représentent virtuellement des nombres, et les opérations que l'on peut effectuer à leur propos possèdent les propriétés des opérations portant sur des nombres.

ADDITION DES POLYNOMES. — Considérons les trois polynomes :

$$A = x^2 + 5x + 4$$
$$B = 3x^2 - 5x - 1$$
$$C = 7x^2 + 3x.$$

On peut écrire pour des *nombres*, d'après les propriétés des sommes algébriques :

$$x \in R \quad \forall x_0 \quad (x_0^2 + 5x_0 + 4) + (3x_0^2 - 5x_0 - 1) - (7x_0^2 + 3x_0)$$
$$= x_0^2 + 5x_0 + 4 + 3x_0^2 - 5x_0 - 1 - 7x_0^2 - 3x_0$$
$$= -3x_0^2 - 3x_0 + 3.$$

Il est donc naturel d'écrire, pour des *polynomes*

$$A + B - C = -3x^2 - 3x + 3.$$

- **Une somme algébrique de polynomes est le polynome obtenu en écrivant à la suite les termes de chaque polynome changés ou non de signe selon que le polynome intéressé est affecté ou non du signe — (moins). On réduit, s'il y a lieu, le polynome obtenu.**

L'addition des polynomes est donc associative et commutative. Elle possède un élément neutre, le polynome nul, et chaque polynome admet un polynome symétrique, ou opposé, obtenu en changeant le signe de chaque terme.

Utilisant les définitions données au **nº 18**, on peut dire que les polynomes à une variable x (ou à deux variables x et y, etc...) et à coefficients réels forment un ensemble auquel l'addition précédemment définie confère une structure de groupe.

ADDITION ET DEGRÉ. — Soit A et B deux polynomes de degrés respectifs a et b. Ajoutons A et B; si les termes de plus haut degré ne se détruisent pas, la somme a pour degré le plus grand des deux nombres a et b (leur commune valeur s'ils sont égaux). Si les termes de plus haut degré se détruisent le degré de la somme s'abaisse, ceci ne peut se produire que pour $a = b$. En résumé, si l'on désigne par la notation : $\text{Max}(\alpha, \beta)$ le plus grand des deux nombres α ou β, s'ils sont inégaux, et leur valeur commune, s'ils sont égaux, on conclura :

$$\text{degré de } (A + B) \leqslant \text{Max [degré de A, degré de B]}.$$

Exercices. ***Enlever les parenthèses, réduire et ordonner :***

203. $(x^3 - 4x^2 - 5x - 1) - (4x^3 - 5x^2) + (x^2 + 3x - 1)$.

204. $(x^2 + xy + y^2) - (x^2 - xy - y^2) - (2x^2 - 3xy - y^2)$.

205. $(9a^2 + ab - b^2) - (4a^2 - b^2) - (a^2 - 5ab + b^2)$.

206. — Étant donné les polynomes :

$$A = x^3 + 4x^2 - 5x - 3;$$
$$B = 2x^3 + x^2 + x - 1;$$
$$C = x^3 - 3x^2 - 2x + 1;$$

calculer :

1° $A + B + C$; 2° $A - B + C$; 3° $A + B - C$; 4° $B + C - A$.

Additionner les résultats 2°, 3° et 4° et comparer à 1°.

207. — Déterminer deux polynomes P et Q sachant que :

$$P + Q = x^2 + 1$$
$$P - Q = 2x.$$

208. — Étant donné les polynomes :

$$A = 3x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 7;$$
$$B = 8x^6 + 7x^4 - x^2 + 11;$$
$$C = x^6 + x^4 - 8x^2 + 6;$$

calculer : $A + B$, $B + C$, $C + A$;

$A + B - C$, $B + C - A$, $C + A - B$, $A + B + C$

et faire diverses vérifications.

Tous ces polynomes ont des propriétés communes, les étudier du point de vue degré, changement de x en $-x$, nature des coefficients.

209. — Étant donné les polynomes :

$$A = x; \quad B = x + x^3 \quad C = x + x^3 + x^5$$

montrer que le polynome :

$$P = 3x^5 - 6x^3 + 2x$$

peut se mettre sous la forme $aA + bB + cC$,

a, b et c étant des nombres que l'on déterminera. **Exercices.**

MULTIPLICATION DES POLYNOMES. — Considérons les polynomes :

$$A = (4x^2 - xy + z^2) \quad \text{et} \quad B = x^2 - yz.$$

Si l'on donne à x, y et z des valeurs numériques x_0, y_0 et z_0, ces deux polynomes prennent des valeurs numériques A_0 et B_0. En vertu des propriétés d'associativité, commutativité et distributivité reconnues à l'addition et à la multiplication des nombres, on peut écrire au niveau des *nombres* :

$$\begin{aligned} x_0 \in R\, y_0 \in R\, z_0 \in R \quad \forall x_0 \forall y_0 \forall z_0 \quad A_0B_0 &= (4x_0^2 - x_0y_0 + z_0^2)(x_0^2 - y_0z_0) \\ &= (4x_0^2 - x_0y_0 + z_0^2)\,x_0^2 - (4x_0^2 - x_0y_0 + z_0^2)\,y_0z_0 \\ &= 4x_0^4 - x_0^3y + x_0^2z_0^2 - 4x_0^2y_0z_0 + x_0y_0^2z_0 - y_0z_0^3 \\ &= 4x_0^4 - x_0^3y - 4x_0^2y_0z_0 + x_0^2z_0^2 + x_0y_0^2z_0 - y_0z_0^3, \end{aligned}$$

cette dernière forme respectant l'ordre du dictionnaire.

Le polynome $4x^4 - x^3y - 4x^2yz + x^2z^2 + xy^2z - yz^3$

prend donc en toutes circonstances une valeur numérique égale au produit des valeurs numériques A_0 et B_0.

Selon le processus habituel, nous tiendrons donc ce polynome pour le produit des deux autres et, généralisant à partir de cet exemple, nous poserons la définition suivante :

> ☆ **Le produit de deux polynomes** est la somme des produits obtenus en **multipliant successivement, au sens de la multiplication** des monômes, **tous les termes du premier par tous les termes du second. Naturellement on réduit, s'il y a lieu, le résultat.**

Il en résulte que la multiplication des polynomes est une opération associative, commutative et distributive par rapport à l'addition des polynomes.

En utilisant les notions exposées au n° 18 on peut résumer cette étude et parler d'anneaux de polynomes. Voir à ce sujet l'exercice n° 332.

CAS DE DEUX POLYNOMES ORDONNÉS. — On dispose pratiquement l'opération comme l'indiquent les exemples qui suivent.

EXEMPLES. I. *Soit à calculer le produit* AB *si :*

$$A = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad \text{et} \quad B = x^2 + 3x - 4.$$

On dispose ainsi l'opération :

$$\begin{array}{lrrrrrr}
A = & x^3 & -2x^2 & +3x & +1 & & \\
B = & & x^2 & +3x & -4. & & \\
\hline
\text{Produit de A par } x^2 : & x^5 & -2x^4 & +3x^3 & +x^2 & & \\
\quad — \qquad 3x : & & 3x^4 & -6x^3 & +9x^2 & +3x & \\
\quad — \qquad -4 : & & & -4x^3 & +8x^2 & -12x & -4 \\
\hline
A.B = & x^5 & +x^4 & -7x^3 & +18x^2 & -9x & -4.
\end{array}$$

Le résultat est ainsi tout *réduit* et *ordonné*.

Si le multiplicande contient les termes dont les degrés ne décroissent pas régulièrement d'une unité quand on passe de l'un à l'autre, on laisse en blanc la place des termes qui manquent.

II.

$$\begin{array}{rrrrr}
x^3 & & +2x & -1 & \\
 & & x^2 & +x & \\
\hline
x^5 & & +2x^3 & -x^2 & \\
 & +x^4 & & +2x^2 & -x \\
\hline
x^5 & +x^4 & +2x^3 & +x^2 & -x.
\end{array}$$

Dans une multiplication, il peut se faire que certains termes disparaissent à la réduction. Par exemple, la multiplication ci-dessous donne :

III.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 + xy & + y^2 & \\
 & & x^2 - xy & + y^2 & \\
\hline
x^4 & + x^3y & + x^2y^2 & & \\
 & - x^3y & - x^2y^2 & - xy^3 & \\
 & & + x^2y^2 & + xy^3 & + y^4 \\
\hline
x^4 & & + x^2y^2 & & + y^4.
\end{array}$$

Il y a deux termes (éventuellement confondus en un seul, dans le cas du produit de deux monômes) *qui ne disparaissent jamais*, parce qu'ils ne se réduisent avec aucun autre : ce sont le premier et le dernier, c'est-à-dire les produits des deux plus hautes puissances et des deux plus basses puissances de la lettre ordonnatrice. Par suite :

▪ THÉORÈME. — **Le degré du produit de deux polynomes est égal à la somme des degrés des deux polynomes.**
Le terme de plus haut degré du produit est, sans réduction possible, le produit des termes de plus haut degré des polynomes donnés.
Le terme de plus bas degré du produit est, sans réduction possible, le produit des termes de plus bas degré des polynomes donnés.

PRODUIT NUL. — Il est évident que si l'un des facteurs est le polynome nul, le produit sera le polynome nul.

D'autre part, si aucun des deux polynomes n'est nul, le produit ne le sera pas, puisqu'il aura au moins deux termes. Par suite, nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — **Pour qu'un produit de polynomes soit le polynome nul, il faut et il suffit que l'un d'eux au moins le soit.**

REMARQUE SUR LE POLYNOME NUL. — Représentons par O le polynome nul, peut-on lui attribuer un degré ω? Soit A un polynome de degré a, en multipliant A par O on obtient O; si l'on voulait sauvegarder le théorème sur le degré du produit il faudrait écrire : $\omega + a = \omega$
ce qui est impossible.

Le polynome nul n'a pas de degré.

Exercices. **210.** — Effectuer le produit $A \times A'$ de :

$$A = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k$$
$$A' = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 + e'x^2 + f'xy + g'y^2 + h'x + i'y + k'$$

en disposant l'opération en colonnes. L'ordre du dictionnaire peut-il être ainsi sauvegardé à l'intérieur des blocs homogènes?

211. — Effectuer le produit :

$$(a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$$

le résultat est un trinôme.

212. — Appelons *valuation* d'un polynome P, et représentons-la par $|P|$, le nombre défini par les règles suivantes :

a) pour le polynome nul $|O| = 0$;

b) pour un polynome non nul de degré $n \geqslant 0$, $|P| = 2^n$.

Montrer que la valuation possède les mêmes propriétés que la valeur absolue pour les nombres, savoir :

$$|A \pm B| \leqslant |A| + |B|$$
$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Calculer en posant la multiplication :

213. $(x^4 - x^3y + xy^3 - y^4)(x^2 + xy + y^2)$.

214. $(x^3 - 3x^2 + x - 3)(x^2 - 3x - 1)$.

215. $(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$.

216. $(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2)$.

217. $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b)$. **Exercices.**

29. Étude de deux polynomes en x qui prennent des valeurs numériques égales entre elles, quelle que soit la valeur donnée à x. — Soit $Q(x)$ et $R(x)$ deux polynomes en x, $P(x)$ la différence $Q(x) - R(x)$. Il est clair que :

$$\forall x_0 \quad Q(x_0) = R(x_0) \iff \forall x_0 \quad P(x_0) = 0.$$

Étudions donc un polynome $P(x)$ qui pour tout x prend la valeur zéro.

1° Si $P(x)$ est de la forme $P = a$, on a : $\forall \alpha \quad P(\alpha) = 0$ et $\forall \alpha \quad P(\alpha) = a$; d'où $a = 0$ et le polynome P ne peut être que le polynome nul.

2° Si $P(x)$ est de la forme $P(x) = bx + a$, soit α un nombre réel. Par hypothèse :

$$\forall \alpha \qquad P(\alpha) = b\alpha + a = 0 \qquad (1)$$

et :

$$\forall \alpha \qquad P(2\alpha) = b \times 2\alpha + a = 0 \qquad (2)$$

d'où

$$\forall \alpha \quad 2P(\alpha) - P(2\alpha) = a = 0 \qquad (3)$$

Il en résulte comme au 1° que $a = 0$ et par suite d'après (1) que $b = 0$.

$P(x)$ est encore le polynome nul.

3° Si $P(x)$ est de la forme $P(x) = cx^2 + bx + a$, soit α un nombre réel. Alors

$$\forall \alpha \qquad P(\alpha) = c\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \qquad (1)$$

$$\forall \alpha \qquad P(2\alpha) = 4c\alpha^2 + 2b\alpha + a = 0 \qquad (2)$$

d'où :

$$\forall \alpha \qquad S(\alpha) = 4P(\alpha) - P(2\alpha) = 2b\alpha + 3a = 0. \qquad (3)$$

Le polynome $S(x) = 2bx + 3a$ est nul pour toute valeur de x, d'après le 2°, il est le polynome nul.

Mais alors $2b = 0 \Longrightarrow b = 0$ et $3a = 0 \Longrightarrow a = 0$; ces résultats et (1) montrent que $c = 0$.

Le polynome $P(x)$ est encore le polynome nul.

LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE. — Nous avons traité directement le cas 1° où $P = a = ax^0$.

Nous avons traité le cas 2° où $P = bx + a = bx^1 + ax^0$ en nous basant sur le 1°.

Nous avons traité le cas 3° où $P = cx^2 + bx + a = cx^2 + bx^1 + ax^0$ en nous basant sur le 2°.

On voit la possibilité de passer, par la même méthode, au stade suivant où $P = dx^3 + cx^2 + bx + a$. Mais des stades successifs se présenteront sans fin et seul un effort de caractère théorique peut nous permettre d'embrasser *tous* les cas. Pour cela nous allons montrer que la méthode, qui a réussi dans le passage de 0 à 1, puis de 1 à 2, réussira dans *tous les passages*.

Supposons que nous soyons arrivés jusqu'au stade caractérisé par la puissance λ; nous avons donc montré que :

$$\forall \alpha \qquad l\alpha^\lambda + k\alpha^{\lambda-1} + \ldots + cx^2 + b\alpha + a = 0 \Longrightarrow$$
$$l = k = \ldots = c = b = a = 0$$

et envisageons un polynome $P(x)$ de la forme :

$$mx^{\lambda+1} + lx^\lambda + \ldots + cx^2 + bx + a.$$

Par hypothèse :

(1) $\forall \alpha$

$$P(\alpha) = m\alpha^{\lambda+1} + l\alpha^\lambda + k\alpha^{\lambda-1} + \ldots + c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$$

(2) $\forall \alpha$

$$P(2\alpha) = 2^{\lambda+1}m\alpha^{\lambda+1} + 2^\lambda l\alpha^\lambda + 2^{\lambda-1}k\alpha^{\lambda-1} + \ldots + 4c\alpha^2 + 2b\alpha + a = 0$$

donc : (3) $\forall \alpha$
$$2^{\lambda+1}P(\alpha)-P(2\alpha)=(2^{\lambda+1}-2^{\lambda})l\alpha^{\lambda}+(2^{\lambda+1}-2^{\lambda-1})k\alpha^{\lambda-1}+\ldots+(2^{\lambda+1}-1)a=0.$$

Le polynome $2^{\lambda+1}\,P(x)-P(2x)=S(x)$ est nul pour toute valeur α attribuée à x, or il est de la forme envisagée au stade précédent, donc il est le polynome nul. Il en résulte :

$$\begin{array}{lll}(2^{\lambda+1}-2^{\lambda}\;)\,l=0 & \Longrightarrow & l=0\\ (2^{\lambda+1}-2^{\lambda-1})\,k=0 & \Longrightarrow & k=0\\ \ldots\ldots\ldots & & \\ (2^{\lambda+1}-1\;)\,a=0 & \Longrightarrow & a=0\end{array}$$

aucune des différences $2^{\lambda+1}-2^{\mu}$ n'étant nulle. Il en résulte encore que $m=0$, d'après (1).

Le polynome $P(x)$ est le polynome nul : nous pouvons passer de n'importe quel stade au suivant.

La propriété est toujours vraie.

III. FRACTIONS RATIONNELLES

30. Quotient de deux polynomes. — Considérons deux polynomes, par exemple $A=x^2+x+1$ et $B=x-3$. Pour toute valeur numérique x_0 de x, autre que 3, on peut former le quotient du nombre $(x_0^2+x_0+1)$ par le nombre (x_0-3) :

$x_0\in R-\{3\}$, $\forall x_0$, le quotient du nombre $(x_0^2+x_0+1)$ par le nombre (x_0-3) est le rapport, ou fraction généralisée, $\dfrac{(x_0^2+x_0+1)}{(x_0-3)}$.

Selon une démarche maintenant familière, nous passerons des nombres aux expressions algébriques en définissant le quotient du *polynome* x^2+x+1 par le *polynome* $x-3$ comme l'expression algébrique :

$$x\in R-\{3\}\qquad Q(x)=\frac{x^2+x+1}{x-3}.$$

Ce quotient est une *fraction rationnelle*.

> ☆ **On appelle « fraction rationnelle » une expression algébrique qui indique le quotient de deux polynomes.**
> **Pour obtenir le domaine de définition d'une telle expression il faut distraire de R l'ensemble des valeurs pour lesquelles le dénominateur prend la valeur numérique 0.**

Le quotient de la valeur numérique de $P(x)$ par la valeur numérique de $Q(x)$ est la valeur numérique de la fraction rationnelle.

Simplification des fractions rationnelles. — On peut écrire, pour des nombres :

$$x_0\in R-\{3;5\}\quad \forall x_0\quad \frac{(x_0^2+x_0+1)(x_0-5)}{(x_0-3)(x_0-5)}=\frac{x_0^2+x_0+1}{x_0-3}.$$

On écrira donc pour des fractions rationnelles :

$$x \in \mathrm{R} - \{3; 5\} \quad \frac{(x^2+x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x^2+x+1}{x-3}.$$

On peut donc simplifier une fraction rationnelle en supprimant au numérateur et au dénominateur un facteur commun, sous la réserve de restreindre le domaine de définition de la variable en lui ôtant les valeurs qui annulent le facteur commun.

Sinon on arriverait à écrire des égalités dépourvues de sens pour l'exemple précédent quand $x = 5$.

Réduction au même dénominateur. Somme et différence. — Sous la réserve de limiter le domaine où la variable prend ses valeurs numériques en lui ôtant les valeurs critiques, on peut donc réduire plusieurs fractions rationnelles au même dénominateur et calculer avec ces fractions comme avec les fractions numériques.

A la notion arithmétique de plus petit commun dénominateur correspond la notion de *dénominateur commun de plus bas degré, on dit de degré minimal.*

Exemple. Soit à calculer :

$$\frac{3x}{x-3} + \frac{x+1}{x+3} - \frac{x^2}{(x-3)(x+3)}.$$

Le dénominateur commun de plus bas degré est $(x-3)(x+3)$.
Les nouveaux numérateurs seront donc :

$$\begin{aligned} N_1 &= 3x(x+3) = 3x^2 + 9x \\ N_2 &= (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3 \\ N_3 &= -x^2 \times 1 = -x^2 \end{aligned}$$

dont la somme algébrique est $3x^2 + 7x - 3$.

Réponse :
$$\frac{3x^2+7x-3}{(x+3)(x-3)}.$$

Dans cet exemple le dernier dénominateur était donné sous une forme de produit. S'il n'en est pas ainsi, la recherche du dénominateur de degré minimal demande qu'on *décompose* les dénominateurs en produits de facteurs comme on le fait pour les nombres quand on les décompose en produits de facteurs premiers. Par contre, pour pouvoir effectuer les calculs au numérateur il faut *développer* les produits partiels.

Décomposer un polynome en un produit de facteurs, développer un produit de polynomes pour le mettre sous la forme d'un polynome unique, sont deux opérations antagonistes dont chacune répond à certains besoins de l'algèbre. La seconde est mécanique. La première demande de l'observation, de l'intuition et beaucoup de pratique : nous en reparlerons.

Autres opérations. — On peut écrire, pour des *nombres :*

$$x_0 \in \mathrm{R}, \quad x_0 \neq 3, \quad x_0 \neq -3, \quad \forall x_0$$
$$\frac{(x_0+4)}{[(x_0+3)(x_0-3)]} \times \frac{(x_0+3)}{(x_0^2+5)} = \frac{(x_0+4)}{[(x_0-3)(x_0^2+5)]}.$$

On peut donc écrire pour des *fractions rationnelles* :

$$x \in \mathrm{R} - \{ 3, -3, \} \quad \frac{x+4}{(x+3)(x-3)} \times \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{x+4}{(x-3)(x^2+5)}.$$

Sous réserve d'exclure les valeurs critiques, les fractions rationnelles se multiplient comme les fractions ordinaires. On arriverait à une conclusion analogue pour la division.

En utilisant les notions du n° 18, on peut résumer l'étude des fractions rationnelles en énonçant le théorème :

- **THÉORÈME. — L'ensemble des fractions rationnelles à une variable x (ou à deux variables x et y, etc.) forme un corps pour les quatre opérations précédemment définies.**

Exercices. *Additionner, réduire et simplifier s'il y a lieu.*

218. $\frac{x+3}{3} + \frac{x+5}{5} + \frac{x-2}{15}$; $\frac{x+3}{3} - \frac{x+5}{5} - \frac{x-2}{15}$.

219. $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}$; $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}$.

220. $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+x}{(x^2+1)(x-1)}$.

221. $\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} + \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}$.

222. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

223. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

224. $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} - \frac{4ax}{(a-x)(a+x)}$.

225. $\frac{a+c}{(a-b)(x-a)} - \frac{b+c}{(a-b)(x-b)}$.

226. — Dans la fraction $\frac{3x-1}{2x-3}$, on donne à x la valeur numérique $\sqrt{3}+1$. Calculer la valeur numérique de la fraction après avoir mis le résultat sous la forme $\frac{a+b\sqrt{3}}{c}$, a, b, c étant des nombres entiers.

227. — On donne les fractions :

1° $\frac{x+2y}{3x-y}$; 2° $\frac{x^2-4xy+6y^2}{x^2+xy+y^2}$.

Montrer que l'on peut calculer la valeur numérique de ces fractions si l'on connaît $\frac{x}{y} = a$. Application : $a = 2$; $a = \frac{1}{3}$.

En serait-il de même pour les fractions :

1° $\frac{x+2y}{3x-1}$ 2° $\frac{x^2-4x+6y}{x^2+x+y}$?

Exercices.

IV. IDENTITÉS

31. Identité. — Rappelons qu'une identité est une égalité vraie quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres qui y figurent. Ainsi :

$$x \in \mathrm{R} \qquad \forall x \qquad (x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15,$$

est une identité; toutes les relations fournies par le calcul à propos de polynomes en x, ou en x et y, etc. sont des identités.

Identités usuelles[1]. — Rappelons les identités suivantes :

(1) $x \in \mathrm{R} \quad y \in \mathrm{R} \quad \forall x \ \forall y \qquad (x+y)(x-y) \equiv x^2 - y^2.$

(2) $x \in \mathrm{R} \quad y \in \mathrm{R} \quad \forall x \ \forall y \qquad (x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2.$

(3) $x \in \mathrm{R} \quad y \in \mathrm{R} \quad \forall x \ \forall y \qquad (x-y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2.$

Ces identités résultent des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres : associativité, commutativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Elles ne font pas intervenir explicitement le fait que x et y sont des nombres, elles sont donc valables dans tous les domaines où l'associativité, la commutativité et la distributivité le sont; par exemple dans un anneau de polynomes.

Désignant par $\mathrm{R}[x]$ l'ensemble des polynomes à une variable x avec des coefficients qui sont des nombres réels, on peut donc écrire :

(1) $\mathrm{P} \in \mathrm{R}[x] \quad \mathrm{Q} \in \mathrm{R}[x] \quad \forall \mathrm{P} \ \forall \mathrm{Q} \quad (\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) \equiv \mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2.$

(2) $\mathrm{P} \in \mathrm{R}[x] \quad \mathrm{Q} \in \mathrm{R}[x] \quad \forall \mathrm{P} \ \forall \mathrm{Q} \quad (\mathrm{P}+\mathrm{Q})^2 \equiv \mathrm{P}^2 + 2\,\mathrm{PQ} + \mathrm{Q}^2.$

(3) $\mathrm{P} \in \mathrm{R}[x] \quad \mathrm{Q} \in \mathrm{R}[x] \quad \forall \mathrm{P} \ \forall \mathrm{Q} \quad (\mathrm{P}-\mathrm{Q})^2 \equiv \mathrm{P}^2 - 2\,\mathrm{PQ} + \mathrm{Q}^2.$

Exemples.

$$(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) \equiv (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 \equiv x^4 + 1$$

$$(x^2 + x\sqrt{2} + 1)^2 + 2(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (x^2 - x\sqrt{2} + 1)^2$$
$$\equiv [(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + (x^2 - x\sqrt{2} + 1)]^2 \equiv 4(x^2+1)^2.$$

1. L'emploi du quantificateur $\forall$ dispense de noter une identité par le signe $\equiv$; bien que ce soit une manière de « pléonasme », nous nous servirons de ce signe auquel les élèves sont habitués et qui leur rend service.

Cette remarque s'applique à toutes les identités que nous établirons; c'est pourquoi nous indiquerons seulement d'une façon très générale que les variables prennent leurs valeurs dans un domaine $\mathcal{A}$ où existent une addition commutative et associative, et une multiplication commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

Carré d'une somme. — Soit à calculer le carré de la somme :

$$(a + b + c + \dots + l) = \text{S}.$$

On a : $\text{S}^2 = (a + b + c + \dots + l)\, a + (a + b + c + \dots + l)\, b + \dots + (a + b + c + \dots + l)\, l.$

On obtient : une fois chaque carré a^2, b^2, ...
deux fois chaque « rectangle » ab, ac, ...

En utilisant le symbole Σ (sigma) qui indique que l'on doit faire la somme de tous les termes de même nature que celui indiqué, nous aurons :

$$a, b, c, \dots, l \quad \in \mathcal{A} \quad \forall a \ \forall b \dots \forall l$$
$$(a + b + \dots + l)^2 \equiv \Sigma\, a^2 + 2\, \Sigma\, ab.$$

32. Autres identités. — La considération du degré des polynomes mis en jeu permet une première classification des identités.

Premier degré. — Prenons note de l'identité évidente :

$$a \neq 0 \qquad ax + b \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

qui nous servira dans l'étude de l'équation et de l'inéquation du premier degré.

Second degré. — Il est fort utile de noter dès maintenant, les identités :

(4) $x \in \text{R} \quad a \in \text{R} \quad b \in \text{R}$
$\forall x \quad \forall a \quad \forall b \qquad (x - a)(x - b) \equiv x^2 - (a + b)x + ab$

(5) mêmes conditions $\qquad (x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)\, x + ab$

Ces identités servent souvent dans les problèmes de décomposition.

Troisième degré. — En passant au troisième degré nous avons :

(6) $x \in \text{R} \quad b \in \text{R} \quad \forall x \quad \forall b \quad (a + b)^3 \equiv a^3 + 3\, a^2b + 3\, ab^2 + b^3$
$\equiv a^3 + b^3 + 3\, ab\, (a + b)$

(7) mêmes conditions $\qquad (a - b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3\, ab^2 - b^3$
$\equiv a^3 - b^3 - 3\, ab\, (a - b)$

Les démonstrations, très simples, sont laissées en exercice. De (6) on déduit

$$a^3 + b^3 \equiv (a+b)^3 - 3\,ab\,(a+b) \equiv (a+b)\,[(a+b)^2 - 3\,ab]$$

d'où l'identité :

(8) $a \in \mathrm{R} \quad b \in \mathrm{R} \quad \forall a \ \forall b \qquad a^3 + b^3 \equiv (a+b)\,(a^2 - ab + b^2).$

On obtiendrait de même :

(9) $a \in \mathrm{R} \quad b \in \mathrm{R} \quad \forall a \ \forall b \qquad a^3 - b^3 \equiv (a-b)\,(a^2 + ab + b^2).$

Exercices. *Calculer en utilisant les identités usuelles connues :*

228. Multiplier $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ par $a + b$. Ordonner le résultat par rapport à a. En déduire le développement de $(a-b)^3$.

229. $(4\,a - 3\,b)^2$; $(5\,a + 2\,b)^2$; $(3\,x - 5\,y)^2$.

230. $(6\,x - 5\,y)^2$; $(6\,x + 5\,y)^2$; $(6\,y + 5\,x)^2$.

231. $(ax + 3)^2$; $(2\,ax + 3\,y^2)^2$; $(5\,ab - 3\,c^2)^2$.

232. $(a + b - c)^2$; $(3\,a - 2\,b + c)^2$; $(a + 2\,b + 3\,c)^2$.

233. $(x+3)^2 + 2\,(x+3)\,(x-4) + (x-4)^2$.

234. $(5\,x + y)\,(5\,x - y)$; $(5\,x^2 + y^2)\,(5\,x^2 - y^2)$; $(a - 4\,b)(a + 4\,b)$.

235. $(x+y)^3 + (x-y)^3$; $(x^2+y)^2 + (x^2-y)^2$; $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2$.

236. $(a - 3\,b)\,(a^2 + 3\,ab + 9\,b^2)$; $(a + 3\,b)\,(a^2 - 3\,ab + 9\,b^2)$.

237. $(a+4)\,(a^2 - 4\,a + 16)$; $(a-4)\,(a^2 + 4\,a + 16)$.

238. — Compléter les expressions suivantes pour que chacune d'elles soit le carré d'un binome :

$x^2 + \ldots + 16$; $x^2 - \ldots + 16$.
$x^2 + \ldots + 9\,a^2$; $x^2 - \ldots + 9\,a^2$.
$x^2 + 4\,x + \ldots$; $x^2 - 4\,x + \ldots$.
$x^2 + 6\,x + \ldots$; $x^2 - 6\,x + \ldots$.
$x^4 + \ldots + y^4$; $x^4 - \ldots + y^4$.
$4\,a^2x^2 + \ldots + 1$; $4\,a^2x^2 - \ldots + 1$.

Calculer, en utilisant les identités connues :

239. $(1 + x^2)\left(1 + x\sqrt{3} + x^2\right)\left(1 - x\sqrt{3} + x^2\right)$.

240. $(1 + 3\,x + 3\,x^2 + x^3)\,(1 - 3\,x + 3\,x^2 - x^3)$.

Démontrer les identités suivantes, valables pour $a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$, $c \in \mathrm{R}$, $d \in \mathcal{A}$, $\forall a$, $\forall b$, $\forall c$, $\forall d$.

241. $(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4\,ab$.

242. $a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc \equiv (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$
$\equiv \frac{1}{2}(a + b + c)\,[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2]$.

Conclusion quant au signe de $a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc$?

243. $a^2\,(b-c) + b^2\,(c-a) + c^2\,(a-b) \equiv -(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$.

244. $a^3\,(b-c) + b^3\,(c-a) + c^3\,(a-b)$
$\equiv -(a+b+c)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$.

245. $a^3\,(b^2 - c^2) + b^3\,(c^2 - a^2) + c^3\,(a^2 - b^2)$
$\equiv -(bc + ca + ab)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$.

246. $(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \equiv 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$.

247. $a(b+c)^2 + b\,(c+a)^2 + c\,(a+b)^2 - 4\,abc \equiv (a+b)(b+c)(c+a)$.

248. $a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3) + 1 \equiv (a^2 + 3\,a + 1)^2$.

249. $(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)$
$\equiv (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2\,(a^4 + b^4 + c^4)$.

Exercices.

33. Décomposition d'un polynome en un produit de facteurs. — Nous avons noté l'importance de ce problème pour le calcul des fractions rationnelles : simplification, sommes algébriques. On le rencontre aussi dans la résolution des équations algébriques.

- **RÈGLE PRATIQUE. — Commencer, s'il y a lieu, par mettre en facteur le monôme de degré maximal.**

Cela fait, on cherche si l'on peut procéder à des mises en facteur de binome, trinome, ... ou s'il y a lieu d'utiliser une identité usuelle.

Exemple 1. $xy^2 + xy + y^2 + y$.

Application de la règle : $y[xy + x + y + 1]$.

En appliquant l'identité (5), on obtient :

$$y(1 + x)(1 + y).$$

Exemple 2. $x^4 - 8x$

$$x^4 - 8x = x(x^3 - 8) \quad \text{(Règle)}.$$

D'après (9) $x(x^3 - 8) = x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Exemple 3. $(ab + 1)^2 - (a + b)^2$.

On applique (1) aux polynomes $ab + 1$ et $a + b$ d'où :

$$(ab + 1 + a + b)(ab + 1 - a - b)$$

On applique (4) et (5) d'où :

$$(a + 1)(b + 1)(a - 1)(b - 1).$$

Exemple 4. $(2x - 1)(x + 3) + (4x^2 - 1) - (2x - 1)^2$.

D'après (1) on voit que l'on peut mettre le binome $2x - 1$ en facteur. Il vient :

$$(2x - 1)[(x + 3) + (2x + 1) - (2x - 1)] = (2x - 1)(x + 5).$$

Exemple 5. $(a - 2b)^3 - (a^3 - 8b^3) + a^3 - 2a^2b$.

On voit d'après (9), et d'après la possibilité d'écrire le dernier groupement sous la forme $a^2(a - 2b)$, que l'expression peut s'écrire :

$$(a - 2b)[(a - 2b)^2 - (a^2 + 2ab + 4b^2) + a^2]$$
$$= (a - 2b)[a^2 - 6ab] = (a - 2b)a(a - 6b).$$

Remarque. — Si l'on veut dire « décomposer le polynome $P(x)$ en un produit de facteurs jusqu'à ce que les facteurs soient de degré le plus bas possible », il vaut mieux employer le mot *factoriser*.

On démontrera plus tard que, comme pour les entiers, la factorisation d'un polynome est possible de façon unique, si du moins l'on ne regarde pas comme différentes des factorisations comme :

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) \qquad \text{et} \qquad (3x - 1)(x + 2).$$

Exercices. 250. — 1° Calculer le produit : $(x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1)$.
En remplaçant dans l'identité obtenue x par 10, en déduire une décomposition en produit de facteurs du nombre 89 999.
2° Par un rapprochement avec le produit trouvé, décomposer le polynome $x^5 + x^4 + 1$ en un produit de deux polynomes.

251. — On considère l'expression :

$$y = (x^2 - 16)^2 - (x + 4)^2.$$

1° La décomposer en un produit de 4 facteurs du 1er degré en x.
2° La développer sous forme d'un polynome du 4e degré en x.
3° Calculer, en choisissant chaque fois la forme la plus commode, sa valeur numérique pour les valeurs de x :

$$x = 0, \quad x = 3, \quad x = 5, \quad x = -4, \quad x = \sqrt{3} - 1.$$

252. — Développer le produit :

$$(3x^2 + 5)(3y^2 + 5);$$

au résultat obtenu, on ajoutera et retranchera $30xy$; grouper ensuite les termes de façon à faire apparaître une somme de la forme :

$$X^2 + 15Y^2$$

X et Y étant des binomes en x et y.
Mettre, d'une manière analogue, le produit

$$(x^2 + 15)(3y^2 + 5) \text{ sous la forme } 3X^2 + 5Y^2.$$

253. — Soit le polynome :

$$b^2x^4 + b^2x^2y^2 - 4ab^2x^3 + a^2x^2y^2 + a^2y^4 - 2a^3xy^2 - 2ab^2xy^2 + 4a^2b^2x^2.$$

1° Ordonner le polynome par rapport aux puissances décroissantes de x.
2° Montrer que ce polynome est le produit du polynome :

$$x^2 - 2ax + y^2$$

par un autre polynome que l'on déterminera.
3° On fait, dans ce polynome :

$$y = mx.$$

Pour quelles valeurs de x le polynome ainsi obtenu s'annule-t-il?

254. — Déterminer p et q pour que le polynome :

$$x^4 + px^2 + q$$

soit égal à un produit de deux facteurs dont l'un est :

$$x^2 + px + q.$$

255. — Décomposer complètement (factoriser) les polynomes :

1° $x^2 + (b - a)x - ab$
2° $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$
3° $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$
4° $x^6 - a^6$
5° $a^4 + a^2 + 1$.
6° $a^5 - 5a^3 + 4a$.

Décomposer en produits de facteurs :

256. $4x^3 + 8x^2y + 4xy^2$; $3a^2 - 12ab + 12b^2$.
257. $5x^3 - 20xy^2$; $8x^3 - 18x$.
258. $81x^4 - 16y^4$; $49a^2x^2 - 100$.
259. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$.
260. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$; $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$.
261. $(x + y)^3 - x^3 - y^3$; $(x - y)^3 - x^3 + y^3$.
262. $(a + b - c)^2 - (a - b + c)^2$; $x^3 - 27y^3$.
263. $(x - y + 4)^2 - (2x + 3y - 1)^2$; $x^3 + 27y^3$.
264. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$; $8x^3 - 125$.

265. — Déterminer les nombres p et q pour que l'on ait :

$$x^2 + px + q \equiv (x - p)(x - q).$$

Exercices.

34. Application aux fractions rationnelles. — Pour effectuer une somme algébrique de fractions rationnelles on se conformera au plan suivant :

1° Factoriser si possible les dénominateurs et les numérateurs. Prendre note, une fois pour toutes, des valeurs qui annulent les dénominateurs; les exclure du domaine que décrit (décrivent) la (les) variable (variables).

2° Simplifier s'il y a lieu chaque fraction.

3° Après simplification, choisir le dénominateur commun minimal (D. C.).

4° Réduire à ce dénominateur. Développer les numérateurs.

5° Effectuer la somme algébrique des nouveaux numérateurs.

6° Factoriser si possible le résultat obtenu au numérateur.

7° Simplifier s'il y a lieu.

EXEMPLE.

Soit à effectuer $\frac{x+1}{x^3-x} - \frac{x^2-3x+2}{(x^2-2x)(x^2+x+1)}$.

1° $\frac{x+1}{x(x+1)(x-1)} - \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x^2+x+1)}$

Anticipant sur l'étude du polynome du second degré, nous remarquerons que :

$$\forall x \qquad x^2+x+1 = x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

ce qui prouve que ce polynome ne prend que des valeurs supérieures ou égales à $\frac{3}{4}$.

Pour le domaine de validité, il suffira donc de supposer :

$$x \neq -1 \qquad x \neq 0 \qquad x \neq 1 \qquad x \neq 2.$$

2° $\frac{1}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x^2+x+1)}$

3° D. C. : $x(x-1)(x^2+x+1)$.

4° Premier numérateur : x^2+x+1.
Second (compte tenu du signe) : $-x^2+2x-1$.

5° Somme : $3x$.

6° Pour mémoire, le résultat est factorisé.

7° On simplifie par x et l'on obtient :

$$\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{array}} \qquad x \neq 1$$

les valeurs critiques encadrées proviennent d'états antérieurs de la fraction.

Si l'on avait négligé de les noter, on aboutirait, pour $x = 0$ par exemple, à une absurdité comme :

$$\frac{1}{0} - \frac{2}{0} = \frac{3}{-1}$$

donné par l'état initial ↗ ↖ donné par l'état final pour $x = 0$

RAPPORT DE SOMMES ALGÉBRIQUES DE FRACTIONS RATIONNELLES. — **On traite d'abord séparément chacune des sommes algébriques, puis on multiplie la fraction numérateur par l'inverse du dénominateur. Marquer les valeurs critiques.**

EXEMPLE. Soit à simplifier, sur son domaine de définition qui reste à préciser, le rapport de fractions rationnelles :

$$\frac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1-x^2}{1-x^3}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$$

I. $$A = \frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-x^2}{1-x^3}$$

1° $$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

$1+x+x^2$, traité dans un exemple précédent, n'est jamais nul.
$1-x+x^2$ s'obtient par le changement de x en $-x$ dans le polynome précédent il n'est jamais nul non plus.

Le domaine de définition est $R - \{1\}$.
Sur ce domaine :

$$A = \frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

2° $$A = \frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

3° $$D.C = (1-x+x^2)(1+x+x^2).$$

4° $$A = \frac{(1-x)(1+x+x^2)+(1+x)(1-x+x^2)}{D.C}$$

$$= \frac{(1-x^3)+(1+x^3)}{D.C}.$$

5° $$A = \frac{2}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}.$$

6° Pas de simplification possible.

II. $$B = \frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^3}$$

1° $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$.

Domaine de définition : $R - \{-1\}$.

2° $$B = \frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}$$

3° $$D.C. = (1-x+x^2)(1+x+x^2)$$

4° $$B = \frac{(1+x)(1-x+x^2)-(1-x)(1+x+x^2)}{D.C.} = \frac{(1+x^3)-(1-x^3)}{D.C.}$$

5° $$B = \frac{2x^3}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}.$$

6° Pas de simplification possible.

III. Le domaine de définition de $\frac{A}{B}$ s'obtient en excluant de R :

la valeur 1, à cause de A;
la valeur — 1, à cause de B;

et l'ensemble des valeurs qui font prendre à B la valeur zéro. Dans le cas présent cet ensemble est $\{0\}$.
Donc :

$$x \in R - \{-1; 0; +1\} \quad \frac{A}{B} = \frac{2}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)} \cdot \frac{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}{2x^3}$$

On simplifie et l'on obtient la réponse :

$$x \in R - \{-1; 0; +1\} \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{x^3}$$

Exercices. 266. — 1° Simplifier la fraction

$$\frac{(ax+b)^4 - (cx+d)^4}{(ax+b)[x^2(a^2+c^2) + 2x(ab+cd) + b^2 + d^2]}.$$

2° Quelle est la valeur de x pour laquelle le dénominateur de la fraction simplifiée est nul?

3° Dans ce cas, quelle relation doit exister entre a, b, c, d pour que le numérateur soit également nul?

Réduire en une seule fraction, la plus simple possible :

267. $$\frac{3x^2 + 4a^2}{x^2 + 4ax + 4a^2} - \frac{2x}{x + 2a}.$$

268. $$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4}.$$

269. $$\frac{a^2}{x^3 - a^3} + \frac{1}{x-a} + \frac{a}{x^2 + ax + a^2}.$$

270. $$\left(\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a}\right) : \left(1 - \frac{x-a}{x+a}\right).$$

271. $$\frac{a^2 - 12ax + 36x^2}{a^2 + 12ax + 36x^2} : \frac{3a - 18x}{4a + 24x}.$$

Dans chacun de ces exercices, on notera les valeurs de x pour lesquelles l'expression donnée ne prend pas de valeur numérique, et on notera celles de ces valeurs qui donnent une valeur numérique au résultat trouvé.

272. — Calculer la somme :

$$S = \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + \frac{4xy}{x^2-y^2}.$$

273. — On pose : $x - \frac{1}{x} = y$.

Calculer, au moyen de y seulement, les expressions :

$$x^2 + \frac{1}{x^2}, \qquad x^3 - \frac{1}{x^3}, \qquad x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

Calculer :

274. $$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{a(a-b)} + \frac{1}{b(a-b)}.$$

275. $$\frac{1}{(x-1)(x+1)x} - \frac{1}{(x-1)x} + \frac{2}{x^2-1}.$$

276. $$\left[\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{x^2-y^2}\right] : \frac{2y}{x-y}.$$

277. $\dfrac{2x^2 + a^2}{x^2 + 6ax + 9a^2} - \dfrac{2x - a}{x + 3a}$.

278. — En partant de l'identité suivante que l'on vérifiera,

$$n \in \mathrm{N}^* \qquad \forall n \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

calculer la somme :

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

279. — Vérifier l'identité :

$$n \in \mathrm{N}^* \qquad \forall n \qquad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

et en déduire la somme :

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Réduire les fractions :

280. $\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \dfrac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}$.

281. $\dfrac{xyz}{ab} + \dfrac{(x-a)(y-a)(z-a)}{a(a-b)} + \dfrac{(x-b)(y-b)(z-b)}{b(b-a)}$.

282. $\dfrac{ab(x^2+y^2) - xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2) - xy(a^2-b^2)}$

(Calculer la valeur de cette fraction si $ax = 2by$.)

283. $\dfrac{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}} : \dfrac{x+y}{x-y}$; $\quad \dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{x} - y}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} : \dfrac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$.

284. $\dfrac{\dfrac{2xy}{x+y} - x}{\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x-2y}} + \dfrac{\dfrac{2xy}{x+y} - y}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y-2x}}$; $\quad \dfrac{x - \dfrac{x-y}{1+xy}}{1 + x\dfrac{(x-y)}{1+xy}}$.

285. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}}{x - y + \dfrac{y^2}{x}} : \dfrac{y^2 - x^2}{y^3 + x^3}$.

286. $\dfrac{4x^2-1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{4y^2-1}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{4z^2-1}{(z-x)(z-y)}$.

287. — Quelle est la valeur prise par la fraction $\dfrac{x+a}{y+b}$ si l'on donne à x et à y les valeurs :

$$x = \frac{2b^2 - a^2 + c^2}{3a}; \qquad y = \frac{2a^2 - b^2 + c^2}{3b}?$$

288. — Vérifier que les deux conditions :

$$a + b + c = 0 \quad \text{et} \quad abc \neq 0 \quad \text{entraînent :}$$

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9.$$

(On réduira d'abord chacun des facteurs.)

289. — Si l'on a :

$$x = \frac{a}{b+c}, \qquad y = \frac{b}{c+a}, \qquad z = \frac{c}{a+b},$$

calculer : $\quad xy + yz + zx + 2xyz.$

Simplifier la fraction obtenue.

Exercices.

V. EXPRESSIONS IRRATIONNELLES SIMPLES

35. Expressions algébriques irrationnelles. — L'expression algébrique $\sqrt{x^2y^2}$ est égale à xy si xy est positif et à $-xy$, si xy est négatif; elle n'est pas véritablement irrationnelle. L'expression $\sqrt{x^2+y^2}$ est irrationnelle, on ne peut l'écrire sans se dispenser d'utiliser un radical. Le domaine que décrivent les variables doit être restreint de telle sorte que toute quantité sous radical soit positive.

EXEMPLE. $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$, il faut $x \geqslant 1$ et $x \leqslant 5$ d'où $1 \leqslant x \leqslant 5$.

Cette réserve faite, comme les expressions irrationnelles désignent virtuellement des nombres, on calculera avec elles comme avec des nombres et, en particulier, en vertu d'une remarque faite plus haut (nº **31**) on pourra utiliser à leur propos les identités usuelles.

Nous nous contenterons de traiter quelques exemples.

EXEMPLE 1. Simplifier : $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

L'expression est définie pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, le cas $a = b = 0$ exclu.

Puisque $a = (\sqrt{a})^2$ et $b = (\sqrt{b})^2$, et puisque pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ on peut écrire l'expression sous la forme $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; on peut donc simplifier et l'on obtient $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

EXEMPLE 2. Simplifier : $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

L'expression est définie pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ et $a \neq b$.

Elle s'écrit $\dfrac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = (\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\times\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2 = a+\sqrt{ab}+b.$

EXEMPLE 3.

Calculer : $\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{a}{1-\sqrt{a}}-\dfrac{a^2}{\sqrt{a}-a}$;

cette expression est définie pour $a \geqslant 0$ et $a \neq 1$.

Pour des calculs littéraux il n'est pas indiqué de rendre *a priori* les dénominateurs rationnels, il vaut mieux observer leur structure afin de choisir le dénominateur commun le plus simple. Ici nous écrirons :

$$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\frac{a}{1-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}(1-\sqrt{a})}.$$

Le dénominateur commun sera donc $(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}) = 1-a$.

Le numérateur est alors $\sqrt{a}(1-\sqrt{a})+a(1+\sqrt{a})-a\sqrt{a}(1+\sqrt{a})$.

En définitive on obtient : $\dfrac{\sqrt{a}-a^2}{1-a}$.

Exercices d'applications numériques.

Rendre rationnels les dénominateurs des rapports suivants :

290. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

291. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

Calculer :

292. $\sqrt{9-\sqrt{17}} \times \sqrt{9+\sqrt{17}}$.

293. $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$.

294. $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(2\sqrt{8}-3)$.

295. $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$.

296. $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}+\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$; $\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}}+\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}$.

Exercices d'applications numériques.

Exercices (Expressions algébriques irrationnelles).

297. — Simplifier les expressions :

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\,; \qquad \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

298. — Simplifier : $\dfrac{a-\sqrt{(a-1)(a+1)}}{a+\sqrt{(a-1)(a+1)}}-\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$.

Trouver la valeur numérique de l'expression réduite trouvée pour $a = 1$; pour $a = -1$.
Vérifier que l'expression donnée et l'expression réduite trouvée prennent les mêmes valeurs pour $a = 2$. Existent-elles pour $a = 0$?

299. — Démontrer l'identité :

$a \in \mathbf{R}^+ \quad b \in \mathbf{R}^+ \quad \forall a \ \forall b \qquad \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$.

300. — Démontrer l'identité :

$\left.\begin{matrix} a \in \mathbf{R}^+,\ b \in \mathbf{R}^+ \\ a^2-b \in \mathbf{R}^+ \end{matrix}\right\} \forall a \ \forall b \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)}$

301. — Démontrer l'identité :

$\left.\begin{matrix} a \in \mathbf{R}^+ \ b \in \mathbf{R}^+ \\ a^2-b \in \mathbf{R}^+ \end{matrix}\right\} \forall a \ \forall b \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}$

302. — Simplifier l'expression :

$\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}+\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}$ (deux cas $x \leqslant 1$, $x > 1$).

303. — Sachant que :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

démontrer que $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}$ peut se mettre sous la forme d'un radical unique, pourvu que soient remplies certaines conditions que l'on précisera.

Exercices (Expressions algébriques irrationnelles).

PROBLÈMES

304. — Soit $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + l$ un polynome.

1° Que représente $P(1)$ par rapport aux coefficients du polynome?

2° Calculer la somme des coefficients du polynome obtenu en développant

$$(1 - 3x + 3x^2)^2 (1 + 3x - 3x^2)^2.$$

Vérifier directement le résultat.

305. — Montrer que le polynome :

$$P = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

est égal au produit de deux polynomes du second degré. Trouver un polynome Q tel que $x^{12} - 1 = P \times Q$.

306. — Trouver une équation à coefficients entiers ayant pour solution le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Écrire $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et procéder par des élévations au carré.

Quelles sont les autres solutions de l'équation obtenue?

307. — Trouver des entiers relatifs a, b, c tels que :

$$\forall x \quad (x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c).$$

308. — Démontrer l'implication :

$$\left(\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\right) \Longrightarrow$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2.$$

309. — Calculer $(x^2 + px + q)^2$ et vérifier que $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ est le carré d'un polynome de cette forme.

310. — Déterminer A pour que :

$$x^4 + 2Ax^3 - 4Ax + 4$$

soit le carré d'un polynome de la forme $x^2 + px + q$.

311. — 1° Calculer $(a + b + c)^3$ en effectuant le produit de $(a + b + c)^2$ par $(a + b + c)$.

2° Vérifier ce calcul en suivant la marche :

$$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3.$$

3° Vérifier l'identité :

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(b + c)(c + a)(a + b).$$

312. — 1° Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - (aa' + bb')^2 = (ab' - ba')^2.$$

2° En déduire que si l'entier α et l'entier β sont chacun la somme de deux carrés, leur produit $\alpha\beta$ est aussi une somme de deux carrés.

App. : $\alpha = 25 = 16 + 9$

$\beta = 169 = 144 + 25$

mettre $\alpha\beta$ sous la forme $x^2 + y^2$.

3° Si un nombre est la somme de deux carrés, son double, son carré, sont somme de deux carrés.

Appl. : $34 = 25 + 9$.

Transformer 68 et 34^2 en somme de deux carrés.

4° Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$

en donner une application arithmétique.

313. — 1° Effectuer le produit :

$$(x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1).$$

2° Par analogie, décomposer en produit le polynome $x^5 + x + 1$. *Application :* Décomposer 100 011 en un produit de deux entiers.

3° Pour $n \in N^*$, les nombres $n^5 + n$, $n^5 + n + 1$, $n^5 + n - 1$ sont composés, mis à part une exception que l'on signalera.

314. — Démontrer l'implication :

$$x + y + z = 0 \Longrightarrow 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

315. — Démontrer l'identité :

$$[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]^2 \equiv 2[(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - a)^4].$$

316. — Démontrer que si $a + b + c = 2p$, on a :

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a).$$
$$(p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2.$$
$$2(p - a)(p - b) + 2(p - b)(p - c) + 2(p - c)(p - a) = 2p^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$
$$2(p - a)(p - b)(p - c) + a(p - b)(p - c) + b(p - c)(p - a) + c(p - a)(p - b) = abc.$$

317. — Former un polynome du quatrième degré $P(x)$, tel que :

$$P(x) - P(x - 1) \equiv x^3.$$

En déduire la valeur de la somme :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Factoriser les polynomes :

318. $x^2 + y^2 + 2xy - 4a^2 + 12ab - 9b^2$;

$ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$.

Factoriser les polynomes :

319. $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$;
$18\,abx^3 - 12\,abx + 2\,ab$.

320. $(x^2 + y^2 - z)^2 - (2\,xy - z)^2$;
$x^3 + x^2 - 4\,x - 4$.

321. $(x - y)(x^2 - z^2) - (x - z)(x^2 - y^2)$;
$(x - y)(x^3 - z^3) - (x - z)(x^3 - y^3)$.

322. $x^3 + 8 + ax^2 + 2\,ax$.

Calculer les sommes suivantes de fractions rationnelles :

323. $$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}, \quad \text{avec } n = 1, 2, 3.$$

324. $$a^2\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

325. $$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}.$$

Calculer les rapports suivants :

326. $$\left(\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right).$$

327. $$\left[\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x}\right] : \left[\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right].$$

328. $$\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right] : \left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right].$$

329. $$\frac{\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right)b^2}{\left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right)\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)}.$$

330. — On suppose :

$a \in Q, \quad b \in Q^+, \quad a' \in Q, \quad b' \in Q^+.$

b non carré exact, b' non carré exact.

1° Que déduit-on de $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$?

2° Calculer $x \in Q^+$ et $y \in Q^+$ tels que
$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

3° Calculer :
$$(3 - \sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}.$$

331. — Vérifier l'égalité, valable sous certaines réserves que l'on précisera :
$$\sqrt{a(2\,a - \sqrt{4\,a^2 - b^2})} = \sqrt{\frac{a(2\,a + b)}{2}} - \sqrt{\frac{a(2\,a - b)}{2}}.$$

332. — Anneaux de polynomes.

1° En consultant le n° 18, montrer que l'addition et la multiplication des polynomes à une variable x vérifient les axiomes de la structure d'anneau.

Le polynome nul joue le rôle de zéro. Chaque polynome admet un symétrique. La multiplication est distributive, etc.

2° Les polynomes à coefficients rationnels forment un anneau contenu dans le précédent.

3° Les polynomes à coefficients entiers forment un anneau contenu dans l'anneau défini au 2°.

4° On peut généraliser ces considérations aux polynomes à deux variables x et y.

333. — Corps des fractions rationnelles.

1° En consultant le n° 18, montrer que l'addition, la multiplication et la division des fractions rationnelles à une variable x vérifient les axiomes de la structure de corps.

On convient évidemment que les nombres sont des fractions rationnelles particulières. Le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication.

2° Les fractions à coefficients rationnels forment un corps contenu dans le précédent.

3° On peut étendre ces considérations aux fractions à deux variables x et y.

334. — On considère l'ensemble A des nombres de la forme :
$$\alpha = a + b\sqrt{2} \quad a \in Z \quad b \in Z.$$

1° Montrer que la somme $\alpha + \alpha'$ et le produit $\alpha\alpha'$ de deux éléments de A appartiennent encore à A. En déduire que A est un anneau.

2° Montrer que $(2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n$ est un nombre entier et pair.

335. — Démontrer que la partie entière du nombre :
$$(2 + \sqrt{3})^n$$
est toujours un nombre impair.

CHAPITRE III

CALCUL NUMÉRIQUE

I. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

36. Principes généraux. — Les diverses Sciences et Techniques utilisent des formules qu'elles démontrent théoriquement ou établissent empiriquement et qui leur permettent de calculer certaines grandeurs à partir de mesures expérimentales.

EXEMPLES.

$S = \pi R^2$ aire du cercle.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ volume de la pyramide.

$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ rendement théorique d'une machine à vapeur.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ période d'un pendule simple.

Se servir d'une formule de ce genre c'est calculer la valeur numérique d'une expression algébrique pour certaines valeurs des variables. Mais ces valeurs, mesurées expérimentalement, ne sont connues qu'avec une certaine approximation. La longueur d'une tige par exemple, peut n'être connue qu'à 1 mm près :

$$1{,}731 < l < 1{,}732.$$

On n'a pas de mesures exactes mais des *encadrements* entre une valeur *approchée par défaut* et une valeur *approchée par excès.*

D'autre part, les formules contiennent des constantes théoriques comme π, $\sqrt{2}$, etc., qui, en principe, peuvent être connues avec telle précision voulue mais qui pratiquement sont données par des tables avec une certaine approximation.

Le problème qui se pose est alors le suivant :

☆ **Connaissant un encadrement pour chacun des nombres qui entrent dans le calcul de la valeur numérique d'une expression algébrique, déterminer un encadrement du résultat.**

Nous allons résoudre ce problème pour les expressions algébriques fondamentales, mais, auparavant, il nous faut rappeler ou préciser certaines notions indispensables touchant les valeurs approchées d'un nombre.

37. Valeur approchée d'un nombre à ε près par défaut. — ε étant un nombre positif, on dit que le nombre a est une valeur approchée à ε près par défaut du nombre x, si l'on a la double inégalité :

$$a \leqslant x < a + \varepsilon$$

autrement dit, si le nombre a est le bord inférieur d'un encadrement de marge ε pour le nombre x. On voit aussitôt que a, pour un ε donné, n'est pas unique. La *figure 8* rend cela intuitif.

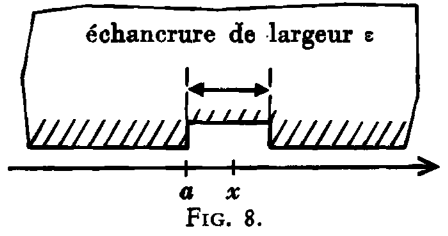


FIG. 8.

Du fait que nous employons le plus souvent le système décimal pour écrire les nombres et calculer sur eux, du fait aussi que nos instruments de mesure se sont généralement adaptés à cet emploi du système décimal, nous rencontrerons très fréquemment des encadrements du type

$$1{,}731 \leqslant l < 1{,}732$$

dont la marge est $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ou en général $\frac{1}{10^n}$.

Mais nous savons que la marge ne détermine pas les bords. Il convient donc de préciser.

☆ DÉFINITION. — **On appelle valeur approchée normale à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut du nombre x le nombre rationnel $\frac{p}{10^n}$ tel que**

$$p \in \mathbf{Z} \qquad \frac{p}{10^n} \leqslant x < \frac{p+1}{10^n}.$$

EXEMPLE. On sait que : $\pi = 3{,}141\ 59.....$

On a donc : $3{,}14 \leqslant \pi < 3{,}15$

3,14 est LA valeur approchée normale à $\frac{1}{100}$ près par défaut. Mais :

$$\pi - 3{,}136 = 0{,}005\ 59... < \frac{1}{100},$$

et 3,136 est UNE valeur approchée (*non* normale) à $\frac{1}{100}$ près par défaut.

38. Remarque sur les tables numériques. — Les tables numériques où l'on trouve les racines carrées, les inverses, etc., des nombres, ou les sinus des angles, etc., comportent un nombre déterminé de chiffres décimaux (variables selon la précision de la table). Le dernier chiffre est :
celui du développement décimal illimité, si celui-ci est suivi de 0, 1, 2, 3, ou 4;
le chiffre du développement décimal illimité augmenté de 1, si celui-ci est 5, 6, 7, 8 ou 9.

EXEMPLES. 1,414 21.... s'abrège en 1,414 2 (1)
1,732 05.... s'abrège en 1,732 1 (2)

Malheureusement on ne signale pas (en général) si le résultat a été obtenu par défaut [cas (1)] ou par excès [cas (2)] : la marge de l'encadrement s'en trouve doublée.

EXEMPLE. Ne disposant que du nombre 1,414 2, on ne peut savoir s'il provient de

1,414 20...; 1,414 21...; 1,414 22...; 1,414 23...; 1,414 24...

ou de

1,414 15...; 1,414 16...; 1,414 17...; 1,414 18...; 1,414 19....

On peut donc affirmer, pour la vraie valeur x :

$$1{,}414\ 15 \leqslant x < 1{,}414\ 25$$

la marge est de : 0,000 1.

On dit que le nombre 1,414 2 est une valeur approchée à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{10^4}$ près, mais on ne peut savoir si elle l'est par défaut ou par excès.

39. Encadrement d'une somme. — Soit à calculer $S = x + y$, sachant que

$$1{,}731 < x < 1{,}732; \qquad 1{,}345 < y < 1{,}346.$$

On en déduit aussitôt, en vertu des propriétés des inégalités

$$3{,}076 < x + y < 3{,}078.$$

Ce résultat est général :

☆ **La somme des valeurs approchées par défaut donne une valeur approchée par défaut de la somme; la somme des valeurs approchées par excès en donne une valeur approchée par excès.**

40. Encadrement d'une différence. — Soit à calculer $D = x - y$ pour les valeurs précédentes; on a :

$$1{,}731 < x < 1{,}732,$$

et :

$$-1{,}346 < -y < -1{,}345,$$

en changeant le sens des inégalités et en multipliant tous les termes par (-1). Il en résulte :

$$0{,}385 < x - y < 0{,}387.$$

Ce résultat est général :

> ☆ **Pour avoir une valeur approchée par défaut de la différence $x - y$ de deux nombres il faut prendre une valeur approchée par défaut de x et une valeur approchée par excès de y**
> (Résultat analogue pour la valeur approchée par excès.)

REMARQUE. On voit que, pour l'addition et la soustraction, les largeurs des encadrements s'ajoutent pour donner la *marge* de l'encadrement dans le résultat.

41. Encadrement du produit de deux nombres positifs. — Soit à calculer le produit $P = xy$, avec les données précédentes.

Des encadrements : $1{,}731 < x < 1{,}732$
$1{,}345 < y < 1{,}346$

résultent immédiatement, d'après les propriétés des inégalités, l'encadrement :

$$1{,}731 \times 1{,}345 < xy < 1{,}732 \times 1{,}346.$$

Ce résultat est général :

> ☆ **Le produit de valeurs approchées par défaut de deux nombres positifs donne une valeur approchée par défaut du produit.**
> (Résultat analogue pour les valeurs approchées par excès.)

En effectuant les multiplications on trouve :

$$2{,}328\,195 < xy < 2{,}331\,272,$$

avec un encadrement de marge 0,003 077. Si x et y représentent les longueurs en m des dimensions d'un rectangle, P en donne l'aire en m^2.

Les données comportaient *les* valeurs approchées *normales* de x et de y à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut, le résultat ne se présente pas sous la forme d'un encadrement par valeurs approchées normales, et la marge n'en est même plus de la forme $\frac{1}{10^n}$.

Dans la pratique il arrive que l'on préfère perdre de la précision en ouvrant la marge de l'encadrement, pour gagner en simplicité. A l'encadrement précédent, rigoureux mais compliqué, on substituera par exemple celui-ci :

$$2{,}328\,0 < xy < 2{,}332\,0$$

qui, obtenu en renforçant les inégalités, présente une marge de 0,004 0, au lieu de 0,003 077 [Pour le rectangle considéré 40 cm² au lieu de 30,77 cm²].

On peut donner une formule générale pour la marge de l'encadrement d'un produit xy, voir exercice n° 346.

Autre exemple (un facteur négatif). — **Encadrer uv sachant que :**

$$-3{,}2 \leqslant u < -3{,}15; \quad 1{,}6 \leqslant v < 1{,}65.$$

D'après les propriétés des inégalités : $3{,}15 < -u \leqslant 3{,}2$, donc :

$$-3{,}2 \times 1{,}65 < uv < -3{,}15 \times 1{,}6$$
$$-5{,}280 < uv < -5{,}040$$
Marge : 0,240.

42. Encadrement d'un quotient de nombres positifs. — Soit à calculer le quotient $Q = \frac{x}{y}$ avec les données précédentes.

De l'encadrement : $1{,}345 < y < 1{,}346$,

résulte : $$\frac{1}{1{,}346} < \frac{1}{y} < \frac{1}{1{,}345},$$

car des fractions de même numérateur sont à classer dans l'ordre inverse des dénominateurs.

Il en résulte : $$\frac{1{,}731}{1{,}346} < \frac{x}{y} < \frac{1{,}732}{1{,}345}.$$

Ce résultat est général :

☆ **Pour avoir une valeur approchée par défaut du quotient de deux nombres positifs, il faut prendre une valeur par défaut du numérateur et une valeur par excès du dénominateur.**

En effectuant les divisions on trouve :

$$1{,}286\,032 < \frac{x}{y} < 1{,}287\,733,$$

soit un encadrement d'une largeur de 0,001 701 auquel on peut préférer, en gagnant en simplicité et en perdant un peu en précision, l'encadrement :

$$1{,}286\,0 < \frac{x}{y} < 1{,}287\,8, \qquad \text{dont la marge est } 0{,}001\,8.$$

Remarque : On peut évaluer la largeur de l'encadrement et donner une formule générale. Voir l'exercice n° **347**.

Autre exemple (deux nombres négatifs). — Encadrer $\frac{u}{v}$ pour :

$$-1{,}120 < u < -1{,}118; \qquad -4{,}111 < v < -4{,}110.$$

Le quotient est positif, on peut donc porter son attention sur les seules valeurs absolues, et :

$$\frac{1{,}118}{4{,}111} < \frac{u}{v} < \frac{1{,}120}{4{,}110}.$$

Si l'on avait voulu $\frac{u}{w}$ avec $w = -v$, on aurait renversé l'ordre des valeurs absolues :

$$-\frac{1{,}120}{4{,}110} < \frac{u}{w} < -\frac{1{,}118}{4{,}111}.$$

43. Encadrement d'une racine carrée. — Il est clair que :

$$1{,}731 < x < 1{,}732, \quad \text{implique :}$$

$$\sqrt{1{,}731} < \sqrt{x} < \sqrt{1{,}732}.$$

Pour avoir un encadrement du résultat on calculera $\sqrt{1{,}731}$ par défaut et $\sqrt{1{,}732}$ par excès à l'aide d'une table ou en appliquant le procédé appris en classe de Troisième.

Dans le cas présent on pourra s'arrêter à : $1{,}315\,6 < \sqrt{x} < 1{,}316\,1$.

Exercices. 336. — Trouver un encadrement aussi précis que possible pour les mesures des grandeurs suivantes :

1° Hypoténuse d'un triangle rectangle et isocèle ABC. Le côté $AC = b$ mesuré en cm est tel que $2{,}3 < b < 2{,}4$,

on donne : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

2° Aire d'un cercle de rayon r cm, avec $5{,}8 < r < 5{,}9$;

on donne : $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$.

Simplifier s'il y a lieu ces encadrements en perdant un peu de précision.

337. — Calculer le rapport des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, sachant que, mesurés en cm

$$18{,}3 < b < 18{,}4$$
$$13{,}2 < c < 13{,}3.$$

On encadrera au mieux le rapport $\frac{b}{c}$, puis le rapport $\frac{c}{b}$. On contrôlera ces deux encadrements en calculant le produit $\frac{b}{c} \times \frac{c}{b}$.

338. — Encadrer au mieux le rayon d'un cercle dont l'aire S, évaluée en m², est telle que :

$$4 < S < 4{,}00\,01.$$

Encadrer au mieux :

339. $\pi\sqrt{2}$. **340.** $-\pi\sqrt{3}$. **341.** π^2. **342.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

343. $\pi - \sqrt{3} - \sqrt{2}$. **344.** $\pi - \frac{22}{7}$. **345.** $\sqrt{3} + \sqrt{2} - \frac{22}{7}$.

On donne $1{,}41\,42 < \sqrt{2} < 1{,}41\,43$ $\quad 3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$

$1{,}73\,20 < \sqrt{3} < 1{,}73\,21$.

346. — Encadrement d'un produit : calcul de la marge.

Soit $0 < x_0 < x < x_0 + h$, h marge du premier encadrement.

$0 < y_0 < y < y_0 + k$, k marge du second encadrement.

Encadrer xy.

En déduire la marge cherchée $kx_0 + hy_0 + hk$.

Montrer que si h et k sont petits devant x_0 et y_0, cette marge est très sensiblement $kx_0 + hy_0$.

Vérifier sur l'exemple traité dans le Cours.

347. — Encadrement d'un quotient : calcul de la marge.

Avec les données de l'exercice précédent la marge est :

$$\frac{x_0 + h}{y_0} - \frac{x_0}{y_0 + k}; \quad \text{achever le calcul.}$$

Donner un résultat pratiquement suffisant si h et k sont petits devant x_0 et y_0.

Vérifier sur l'exemple traité dans le cours. **Exercices.**

II. OPÉRATIONS COMPLEXES

44. Analyse d'une expression algébrique. — Nous avons déjà remarqué (**n° 34**) que toute expression algébrique complexe peut être analysée et réduite à une suite d'opérations élémentaires : additions, multiplications, soustractions, divisions, extractions d'une racine, toutes ces opérations portant sur des expressions intermédiaires. Traitons un exemple.

Soit à trouver un encadrement de la valeur numérique de l'expression E.

$$E = 4\frac{x^2}{y} - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{pour :} \qquad 3{,}17 < x < 3{,}18; \qquad 1{,}31 < y < 1{,}32.$$

1° $3{,}17^2 < x^2 < 3{,}18^2$ d'où : $10{,}048\,9 < x^2 < 10{,}112\,4.$

2° $1{,}31^2 < y^2 < 1{,}32^2$ d'où : $1{,}716\,1 < y^2 < 1{,}742\,4.$

3° $11{,}765\,0 < x^2 + y^2 < 11{,}854\,8.$

4° $3{,}430 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3{,}444.$

5° $40{,}195\,6 < 4\,x^2 < 40{,}449\,6.$

Étant donné l'encadrement précédent, il est permis de simplifier celui-ci en :

$$40{,}195 < 4\,x^2 < 40{,}450.$$

6° $\frac{1}{1{,}32} < \frac{1}{y} < \frac{1}{1{,}31}$ d'où $0{,}757 < \frac{1}{y} < 0{,}764.$

7° $40{,}195 \times 0{,}757 < \frac{4\,x^2}{y} < 40{,}450 \times 0{,}764.$

On simplifie cet encadrement en : $30{,}427 < \frac{4\,x^2}{y} < 30{,}904.$

8° $30{,}427 - 3{,}444 < \frac{4\,x^2}{y} - A < 30{,}904 - 3{,}430$

$$26{,}983 < E < 27{,}474.$$

La largeur de l'encadrement est 0,491.

45. Cas particuliers. — Dans les applications, et notamment en Physique, on a souvent besoin de calculer la valeur numérique des expressions

$$(1 + \varepsilon)^2, \quad (1 - \varepsilon)^2, \quad \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \sqrt{1 + \varepsilon}, \quad \sqrt{1 - \varepsilon};$$

pour des valeurs de ε telles que $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$, parfois $\varepsilon < \frac{1}{100}$.

1° On a : $(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$.

Si l'on remplace la valeur exacte par la valeur approchée $1 + 2\,\varepsilon$, on fait une erreur égale à ε^2.

L'erreur est inférieure à $\frac{1}{100}$ si $\varepsilon < \frac{1}{10}$,

inférieure à $\frac{1}{10\,000}$ si $\varepsilon < \frac{1}{100}$,

dans ce dernier cas l'approximation est pratiquement excellente.

Exemples. $(1{,}003)^2 \simeq 1{,}006$ avec une erreur égale à $\frac{9}{10^6}$ donc inférieure à $\frac{1}{10^5}$

$\left(1 + \frac{1}{273}\right)^2 \simeq 1 + \frac{2}{273}$, avec une erreur égale à $\frac{1}{273^2}$, donc inférieure à $\frac{1}{4 \times 10\,000}$.

Remarques analogues pour : $(1 - \varepsilon)^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \simeq 1 - 2\varepsilon$.

2° Pour $\frac{1}{1+\varepsilon}$, utilisant l'identité : $1 - \varepsilon^2 \equiv (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)$

nous écrirons :
$$\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon$$

d'où il résulte que :
$$\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}.$$

Si l'on remplace $\frac{1}{1+\varepsilon}$ par $1 - \varepsilon$, l'erreur est inférieure à ε^2.

Exemple. $\frac{1}{1{,}02} \simeq 0{,}98$ valeur approchée par défaut, inférieure à $\frac{4}{10^4}$.

En changeant ε en $-\varepsilon$ dans le calcul précédent, on obtient :
$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon},$$

donc :
$$\frac{1}{1-\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon,$$

valeur approchée par défaut, avec une erreur de l'ordre de ε^2.

Exemple. $\frac{1}{0{,}99} \simeq 1{,}01$ à $\frac{1}{10^4}$ près, par défaut.

3° Pour $\sqrt{1 + \varepsilon}$, nous remarquons que ce nombre est voisin de 1, lorsque ε est petit. Nous posons donc :
$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \alpha \tag{1}$$

et nous évaluons le nombre α. D'après le 1° :

$$1 + \varepsilon \simeq 1 + 2\alpha \qquad \text{donc,} \qquad \alpha \simeq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Estimons maintenant l'ordre de grandeur de l'erreur commise en remplaçant α par $\frac{\varepsilon}{2}$. Posons : $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} + \beta$. (3)

En portant dans (1) et en élevant au carré

$$1 + \varepsilon = 1 + \varepsilon + 2\beta + \varepsilon\beta + \frac{\varepsilon^2}{4} + \beta^2 \tag{4}$$

d'où : $$\beta = -\frac{\frac{\varepsilon^2}{4} + \beta^2}{2 + \varepsilon}, \qquad \text{soit : } \beta \simeq -\frac{\varepsilon^2}{8};$$

la valeur $1 + \frac{\varepsilon}{2}$ est donc approchée par *excès*.

EXEMPLE. $\sqrt{1{,}03} \simeq 1{,}015.$

En changeant ε en $-\varepsilon$ on aura : $\sqrt{1 - \varepsilon} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$,

valeur approchée par excès, avec une erreur de l'ordre de $\frac{\varepsilon^2}{8}$.

EXEMPLE. $\sqrt{0{,}98} \simeq 0{,}99.$

Pour $\varepsilon \simeq \frac{1}{10}$ on voit que l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{800}$. Une approximation de cette nature suffit dans un grand nombre d'applications pratiques.

RÉSUMÉ

EXPRESSION A CALCULER	VALEUR APPROCHÉE	SENS	ORDRE DE GRANDEUR DE L'ERREUR COMMISE
$(1 + \varepsilon)^2$	$1 + 2\varepsilon$	défaut	ε^2
$(1 - \varepsilon)^2$	$1 - 2\varepsilon$	défaut	ε^2
$\frac{1}{1 + \varepsilon}$	$1 - \varepsilon$	défaut	ε^2
$\frac{1}{1 - \varepsilon}$	$1 + \varepsilon$	défaut	ε^2
$\sqrt{1 + \varepsilon}$	$1 + \frac{\varepsilon}{2}$	excès	$\frac{\varepsilon^2}{8}$
$\sqrt{1 - \varepsilon}$	$1 - \frac{\varepsilon}{2}$	excès	$\frac{\varepsilon^2}{8}$

Exercices. *Donner un encadrement précis pour les expressions :*

348. $S = \frac{1}{2}h(B + b)$

$11,1 < h < 11,2 \qquad 20,3 < B < 20,4.$

$8,6 < b < 8,7.$

349. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$3 < c < 3,1 \qquad 4 < b < 4,1 \qquad 5 < a < 5,1 \qquad a + b + c = 2p.$

350. $S = xy + \frac{\pi}{4}y^2$

$1,25 < x < 1,26 \qquad 0,82 < y < 0,83.$

351. — On calcule $A = 15\sqrt{1+\varepsilon} - \frac{6}{1+\varepsilon}$ pour $\varepsilon = \frac{1}{128}$, en se servant des formules du n° 45. Donner un encadrement aussi précis que possible du résultat.

Donner une formule approchée et l'ordre de grandeur de l'erreur commise pour :

352. $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$; $\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}$; $\sqrt{\sqrt{1+\varepsilon}}$.

353. $\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$; $\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}$; $\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}$.

354. $(1+\varepsilon)^3$; $(1-\varepsilon)^3$.

Exercices.

PROBLÈMES

355. — 1° Vérifier que :

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

2° Donner pour la somme :

$$\frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$$

un encadrement d'une largeur de $\frac{1}{50}$.

356. — 1° Vérifier que : $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n(n+1)}$ et que :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

2° Donner pour la somme :

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{1\,000^2}$$

une valeur approchée à moins de 0,006.

357. — Soit $P(x)$ le polynome :

$$x^3 - 1,414\,x^2 - 5\,x - 1,414.$$

1° Calculer sa valeur numérique pour

$$x = 3,146$$

en calculant successivement :

$A = 5\,x$, $B = x^2$, $C = 1,141\,x^2$, $D = x^3$,

$P = D - C - A - 1,414.$

2° Calculer sa valeur numérique en calculant successivement :

$E = x - 1,414.$

$F = x\,E = x^2 - 1,414\,x.$

$G = F - 5 = x^2 - 1,414\,x - 5.$

$H = x\,G = x^3 - 1,414\,x^2 - 5\,x.$

$P = H - 1,414.$

Comparer le nombre d'opérations effectuées dans chaque méthode. Comparer le nombre de multiplications.

358. — Calculer la valeur numérique que prend le polynome :

$$1,4\,x^4 + 2,1\,x^3 + 5,2\,x^2 + 0,8\,x + 0,9$$

pour $x = 0,81$.

1° En calculant : x^2, x^3, x^4,

$0,8\,x$, $5,2\,x^2$, $2,1\,x^3$, $1,4\,x^4$,

et en faisant la somme.

2° En calculant :

$A = 1,4\,x.$

$B = A + 2,1 = 1,4\,x + 2,1.$

$C = x\,B = 1,4\,x^2 + 2,1\,x.$

$D = C + 5,2 = 1,4\,x^2 + 2,1\,x + 5,2.$

$E = x\,D = 1,4\,x^3 + 2,1\,x^2 + 5,2\,x.$

$F = E + 0,8 = 1,4\,x^3 + 2,1\,x^2 + 5,2\,x + 0,8.$

$G = x\,F = 1,4\,x^4 + 2,1\,x^3 + 5,2\,x^2 + 0,8\,x.$

$H = G + 0,9 = P.$

Comparer les deux méthodes.

LIVRE II

REVISION DE GÉOMÉTRIE

CHAPITRE IV

REVISION DE GÉOMÉTRIE

I. CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES. TRIANGLE ISOCÈLE

46. Définitions concernant le triangle. — A tout ensemble de trois points distincts A, B, C, associons :

1° les trois segments AB, BC, CA;

2° les trois angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$.

L'ensemble des trois segments AB, BC, CA est par définition le **triangle** ayant pour **côtés** AB, BC et CA, et A, B, C pour **sommets.** Chaque sommet est opposé à un côté; A par exemple est opposé à BC. Inversement, chaque côté est opposé à un angle.

On dit, par extension naturelle, que $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$ sont les **angles** du triangle.

On désigne un triangle en énumérant ses sommets dans un ordre quelconque.

On distinguera parfois un triangle **propre** (A, B, C non alignés), d'un triangle **impropre** (A, B, C alignés).

Nous dirons que deux triangles sont **appariés** si, à chaque sommet de l'un, on fait correspondre un sommet de l'autre et réciproquement. Deux sommets qui se correspondent sont dits **homologues.** La correspondance entre sommets détermine naturellement une correspondance entre côtés; deux côtés homologues ont pour extrémités des sommets respectivement homolognes. Enfin l'appariement détermine une correspondance entre les angles des deux triangles et on parlera en général de deux éléments homologues.

Pratiquement, pour indiquer que deux triangles sont appariés et pour

déterminer de quelle façon ils le sont, on écrit sur une ligne les lettres qui désignent les sommets de l'un et, sous chaque lettre, la lettre qui désigne le sommet homologue. Les éléments homologues se lisent alors facilement.

EXEMPLE. A B C
F G D.

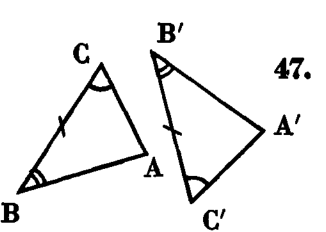


FIG. 9.

47. Cas d'égalité des triangles quelconques.

☆ DÉFINITION. — **On dit que deux triangles sont égaux pour exprimer que, lorsqu'ils sont appariés, leurs éléments homologues sont égaux.**

Nous noterons :

A B C / A'B'C' égaux	⟺	$AB = A'B'$; $\hat{A} = \hat{A'}$. $BC = B'C'$; $\hat{B} = \hat{B'}$. $CA = C'A'$; $\hat{C} = \hat{C'}$.

Pour affirmer l'égalité de deux triangles, il suffit de disposer de l'égalité de trois couples homologues, convenablement choisis et indiqués par les cas d'égalité des triangles, que nous résumons :

Les deux premiers cas (*Fig. 9 et 10*) :

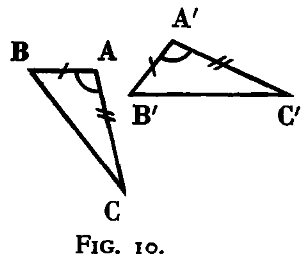
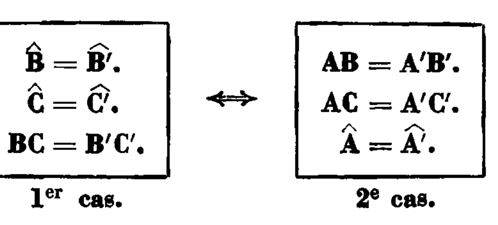


FIG. 10.



1er cas. 2e cas.

Le troisième cas (*Fig. 11*) :

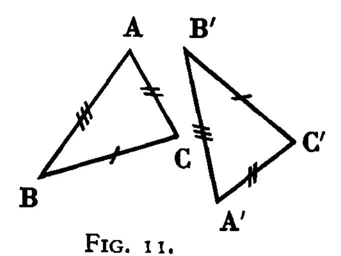


FIG. 11.

$AB = A'B'$. $AC = A'C'$. $BC = B'C'$.	⟹	$\hat{A} = \hat{A'}$. $\hat{B} = \hat{B'}$. $\hat{C} = \hat{C'}$.

48. Propriété d'un angle extérieur d'un triangle.

Soit un triangle propre ABC, Bx la demi-droite d'origine B, portée par BC et ne contenant pas le point C (*Fig. 12*) ; prenons sur Bx le point D tel que : $BD = AC$.

Si l'angle extérieur $\widehat{ABx}$ était égal à l'angle $\hat{A}$ du triangle, on aurait pour les triangles :

A B C : AB commun.
B A D $AC = BD$, par construction.
$\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$, par hypothèse.

Ils seraient égaux d'après le 2ᵉ cas, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$.

Comme : $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 2\text{D}$.

On aurait : $\widehat{BAD} + \widehat{BAC} = 2\text{D}$.

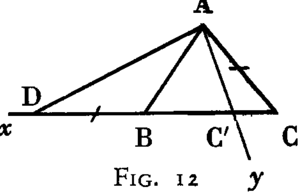


FIG. 12

Les trois points D, A, C seraient alignés, donc aussi B, A, C, le triangle serait impropre, contrairement à l'hypothèse.

Si maintenant nous supposons $\widehat{ABx} < \hat{A}$, construisons la demi-droite Ay intérieure à l'angle BAC, telle que :

$$\widehat{BAy} = \widehat{ABx}.$$

La demi-droite Ay coupe le segment BC en C'. En prenant sur la demi-droite Bx, le point D tel que BD = AC', le raisonnement précédent avec les triangles $\begin{matrix} A & B & C' \\ B & A & D \end{matrix}$, conduit à une contradiction.

L'angle $\widehat{ABx}$ ne pouvant être ni égal à A ni plus petit que $\hat{A}$ est donc plus grand que $\hat{A}$.

En raisonnant de la même façon on aurait, $\widehat{ABx} > \hat{C}$, et on énonce :

▪ THÉORÈME. — **Dans un triangle propre, un angle extérieur est plus grand que l'un ou l'autre des angles non adjacents.**

49. Le quatrième cas d'égalité des triangles. — Soit ABC et A'B'C' (*Fig. 13*) tels que : $BC = B'C'$; $\hat{B} = \hat{B'}$; $\hat{A} = \hat{A'}$.

Sur la demi-droite portée par BA et contenant A, prenons A_1 tel que $BA_1 = B'A'$.

Les triangles $\begin{matrix} A_1 & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix}$

ont $\begin{cases} BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B'} \\ BA_1 = B'A' \end{cases}$

FIG. 13.

ils sont égaux d'après le 2ᵉ cas; il en résulte $\widehat{BA_1C} = \widehat{B'A'C'}$, et, comme $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$, par hypothèse on a : $\widehat{BA_1C} = \widehat{BAC}$.

Si A_1 est entre A et B, l'angle $\widehat{BA_1C}$ extérieur au triangle A_1AC ne peut être égal à $\widehat{BAC}$: contradiction.

Si A est entre A_1 et B, l'angle $\widehat{BAC}$ est extérieur au triangle AA_1C : encore contradiction.

Il en résulte que A_1 coïncide avec A et par suite :

$$BA_1 = BA = B'A'.$$

Les deux triangles ABC et A'B'C' sont alors égaux par le 2e cas. Nous résumerons :

$$\boxed{\begin{array}{c} BC = B'C'. \\ \widehat{B} = \widehat{B'}. \\ \widehat{A} = \widehat{A'}. \end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} AB = A'B'. \\ AC = A'C'. \\ \widehat{C} = \widehat{C'}. \end{array}}$$

50. Le triangle isocèle.

☆ DÉFINITION. — **On dit qu'un triangle est isocèle pour exprimer qu'il a deux côtés égaux.**

$$\textbf{ABC isocèle} \iff AB = AC.$$

Le sommet A est dit **sommet principal,** le côté opposé BC **base** du triangle isocèle, l'angle $\widehat{A}$ angle **principal.**

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. — Soit trois points A, B, C. En considérant les triangles $\begin{smallmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{smallmatrix}$, les deux premiers cas d'égalité des triangles nous donnent l'équivalence :

$$\boxed{\begin{array}{c} AB = AC \\ AC = AB \\ \widehat{BAC} = \widehat{CAB} \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{c} BC = CB \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \\ \widehat{ACB} = \widehat{ABC} \end{array}}$$

et on peut énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Si un triangle a deux côtés égaux, à ces côtés égaux sont opposés des angles égaux; et réciproquement.**

Ce théorème énonce une propriété caractéristique du triangle isocèle.

$$\boxed{AB = AC \iff \widehat{ABC} = \widehat{ACB}}$$

51. Cas d'égalité des triangles rectangles. — Soit ABC et A'B'C' rectangles en A et A'. Supposons ces deux triangles appariés, les sommets des angles droits étant homologues, soit : $\begin{smallmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{smallmatrix}$; si, les angles droits mis à part, les éléments homologues des deux triangles satisfont aux relations suivantes :

1. $\begin{array}{c} BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}$; ils sont égaux : 4e cas.

2. $\begin{matrix} BA = B'A' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{matrix}$; ils sont égaux : 4[e] cas.

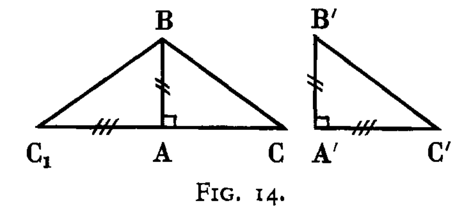


FIG. 14.

3. $\begin{matrix} BA = B'A' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{matrix}$; ils sont égaux : 2[e] cas.

4. $\begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{matrix}$; ils sont égaux : 1[er] cas.

5. $\begin{matrix} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{matrix}$. Soit alors sur le prolongement de CA, le point C_1 tel que $AC_1 = A'C'$ (*Fig. 14*); les deux triangles rectangles $\begin{matrix} A & C_1 & B \\ A' & C' & B' \end{matrix}$ ont :

$\begin{matrix} AC_1 = A'C' \\ AB = A'B' \end{matrix}$, ils sont égaux (4); et : $BC_1 = B'C' = BC$.

Le triangle C_1BC étant isocèle : $\widehat{C_1} = \widehat{C}$, donc : $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.

Le tableau suivant, résume ce paragraphe.

	Hypothèses		Conclusions	
1.	$BC = B'C'$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 1$ D	$\Longrightarrow$	$AB = A'B'$ $AC = A'C'$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$	FIG. 15.
2.	$BA = B'A'$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 1$ D	$\Longrightarrow$	$BC = B'C'$ $AC = A'C'$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$	FIG. 16.
3.	$BA = B'A'$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 1$ D	$\Longrightarrow$	$BC = B'C'$ $AC = A'C'$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$	FIG. 17.
4.	$AB = A'B'$ $AC = A'C'$ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 1$ D	$\Longrightarrow$	$BC = B'C'$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$	FIG. 18.
5.	$BC = B'C'$ $AB = A'B'$ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 1$ D	$\Longrightarrow$	$AC = A'C$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$	FIG. 19.

52. Propriétés caractéristiques du triangle isocèle.

Soit un triangle isocèle ABC, dont le sommet principal est A, et soit O le point d'intersection de BC et de la bissectrice principale.

Les triangles ABO et ACO ont : AB = AC; AO commun; $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$; ils sont égaux d'après le premier cas d'égalité des triangles, et (*Fig. 20*) :

a) BO = CO. La droite AO est **médiane.**

b) $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 1$ D. La droite AO est **hauteur.**

▪ THÉORÈME. — **Dans un triangle isocèle, bissectrice, hauteur et médiane principale sont confondues.**

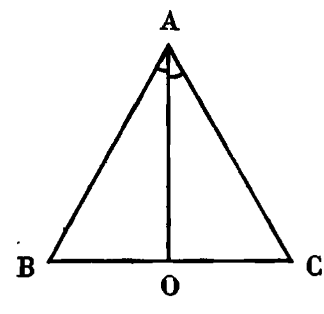


FIG. 20.

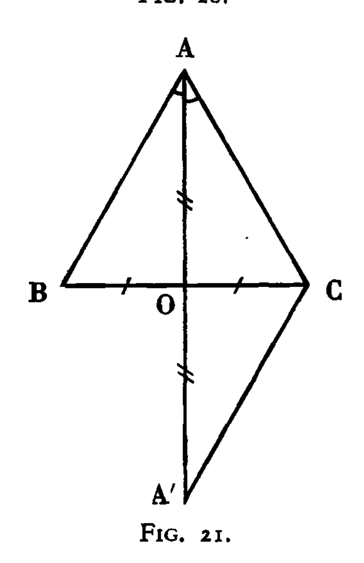


FIG. 21.

Étudions un triangle dans lequel deux de ces trois droites sont confondues.

1. Soit ABC dans lequel AO est *bissectrice* et *hauteur*. Les triangles rectangles AOB et AOC ont : AO commun
$\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$. Ils sont égaux (cas 3)

par suite AB = AC. Le triangle est isocèle.

2. Soit ABC dans lequel AO est *hauteur* et *médiane*. Les triangles rectangles AOB et AOC ont : OB = OC.
AO commun. Ils sont égaux (cas 4)

par suite AB = AC. Le triangle est isocèle.

3. Soit ABC dans lequel AO est *bissectrice* et *médiane*. Prolongeons AO d'un segment OA′ = OA. Les triangles AOB et A′OC (*Fig. 21*), ont :

OB = OC, hypothèse
OA = OA′, construction
$\widehat{BOA} = \widehat{COA'}$, opposés par le sommet.

Ils sont égaux (1er cas) :

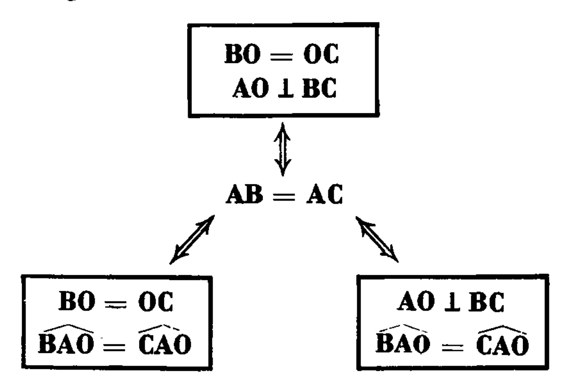
$$\widehat{BAO} = \widehat{CA'O} \quad \text{et} \quad AB = CA'.$$

Puisque, par hypothèse, $\widehat{BAO} = \widehat{OAC}$, on a : $\widehat{OAC} = \widehat{CA'O}$,

le triangle ACA′ est isocèle, donc : AC = CA′.

On a donc : AB = AC. Le triangle ABC est isocèle. Nous résumons ces propriétés caractéristiques du triangle isocèle dans le tableau suivant :

A, B, C non alignés, O entre B et C.



Rappelons la notation ⊥ qui se lit : ... perpendiculaire à ....

Exercices. **359.** — Démontrer que dans deux triangles égaux :

1° Les hauteurs issues de deux sommets homologues sont égales.
2° Les médianes issues de deux sommets homologues sont égales.
3° Les bissectrices intérieures ou extérieures issues de deux sommets homologues sont égales.

360. — Sur les deux côtés Ox, Oy d'un angle, on prend les points A et B tels que OA = OB, puis C et D tels que OC = OD. On joint AD et BC qui se coupent en I. Démontrer que I appartient à la bissectrice de l'angle xOy.

361. — Soit un triangle isocèle ABC (AB = AC), on suppose BC < AB. On porte de B vers C un segment BE = AB, et sur le prolongement de AB un segment BD = CE.

1° Comparer les triangles ACE et EBD.
2° En déduire les relations :

$$\widehat{AED} = \widehat{AEC} + \widehat{CAE}.$$
$$\widehat{AED} = 2\,\widehat{BAE} - \widehat{BAC}.$$

362. — Démontrer qu'un triangle isocèle est **caractérisé** par deux hauteurs égales.

363. — Soit deux triangles ABC et A'B'C', et AH et A'H' leurs hauteurs, AM et A'M' leurs médianes, on suppose que :

$$BC = B'C'; \quad AH = A'H'; \quad AM = A'M'.$$

Démontrer que ces deux triangles sont égaux.

364. — On suppose que, dans un triangle ABC rectangle en A, on a :

$$BC = 2\,AC.$$

1° On prolonge CA d'un segment AD = CA. Que peut-on dire du triangle BCD?
2° En déduire : $\widehat{ACB} = 2\,\widehat{CBA}$.
3° Énoncer la propriété démontrée. Cette propriété a-t-elle une réciproque?

365. — Démontrer que les propriétés suivantes **caractérisent** le triangle isocèle :

1° Deux sommets équidistants de la bissectrice intérieure issue du 3e sommet.
2° Le milieu d'un côté équidistant des deux autres côtés. **Exercices.**

II. RELATIONS D'INÉGALITÉ

53. Relations fondamentales. — On a démontré (classe de 4[e]), les propriétés suivantes dont nous rappellerons quelques démonstrations.

- **Dans un triangle tout angle est inférieur à 2 droits.**
- **Dans un triangle rectangle, tout angle autre que l'angle droit est aigu.**
- **Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont aigus.**

Dans ce qui suit nous désignerons par a, b, c, A, B, C les mesures respectives des côtés et des angles du triangle ABC.

Soit un triangle ABC rectangle en A (*Fig. 22*). Sur la demi-droite d'origine B qui contient C soit A′ tel que BA′ = BA. Le triangle BAA′ est isocèle, donc :

$$\widehat{BAA'} < 1\text{D} \implies A' \text{ entre B et C, et } \widehat{BAC} = 1\text{D} \implies BC > BA.$$

- THÉORÈME. — **Dans tout triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande que chaque côté de l'angle droit.**

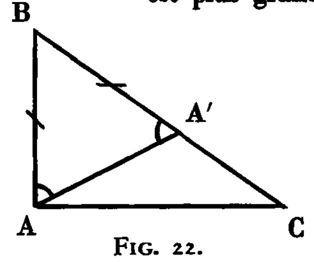


FIG. 22.

Soit maintenant un triangle ABC dans lequel nous supposons $a \geqslant b \geqslant c$.

Soit H le pied de la hauteur issue de A. Si H était extérieur à BC, par exemple B entre H et C on aurait : AC > HC > BC, contradiction avec l'hypothèse $a \geqslant b$. Le point H est donc entre B et C et on a :

$$\begin{matrix} HB < AB \\ HC < AC \end{matrix} \implies BC < AB + AC, \text{ soit } a < b + c.$$

Il en résulte :

- THÉORÈME. — **Dans tout triangle chaque côté est compris entre la somme et la différence des deux autres :**

$$|b - c| < a < b + c.$$

Soit un triangle ABC dans lequel $\hat{B} > \hat{C}$. Construisons Bx, intérieure à $\hat{B}$, telle que $\widehat{xBC} = \hat{C}$; la demi-droite Bx coupe AC en D, et DB = DC. On a dans le triangle ABD (*Fig. 23*).

$$\begin{aligned} AB &< BD + DA. \\ AB &< DC + DA. \\ AB &< AC. \end{aligned}$$

Réciproquement si AC > AB, on ne peut pas avoir :

$\hat{B} < \hat{C}$, car on aurait AC < AB, **contradiction** avec l'hypothèse.

$\hat{B} = \hat{C}$, le triangle ABC serait isocèle et AC = AB, encore contradiction.

On a donc $\hat{B} > \hat{C}$.

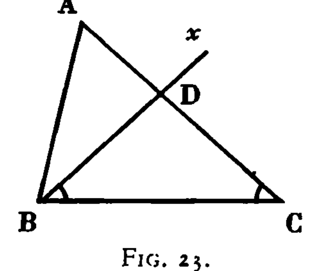


FIG. 23.

▪ THÉORÈME. — **Dans tout triangle ABC on a : $\hat{B} > \hat{C} \iff AC > AB$**

et par suite : $\hat{A} \geqslant \hat{B} \geqslant \hat{C} \iff a \geqslant b \geqslant c.$

54. Médiatrice d'un segment. — Soit un segment AB, de milieu O, (D) la médiatrice de AB, (π) le demi-plan limité par (D) et contenant A, (π') le demi-plan d'arête (D) opposé à (π).

Si M $\in$ (D), le triangle MAB s'il existe est tel que MO est médiane et hauteur, donc isocèle, et MA = MB. (Si M est en O, on a MA = MB.)

Si MA = MB, le triangle MAB est isocèle, MO, médiane, est hauteur et M $\in$ (D).

▪ THÉORÈME. — **Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des deux extrémités du segment et réciproquement :**

$$M \in (D) \iff MA = MB.$$

Si M $\in$ (π), les points M et B sont de part et d'autre de (D), le segment MB coupe (D) en I et :

$$MB = MI + IB \quad (\textit{Fig. 24}).$$

Or $I \in (D) \implies IB = IA$

donc : $$MB = MI + IA.$$

Si M, A, I ne sont pas alignés on a :

$$MA < MI + IA, \quad \text{donc} \quad MA < MB.$$

Cette inégalité a encore lieu si M, A, I sont alignés.
De même :

$$M \in (\pi') \implies MA > MB.$$

FIG. 24.

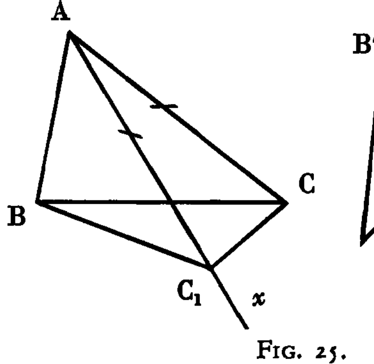
Récipoquement, supposons MA > MB.

Si $M \in (\pi) \implies MA < MB$, contradiction.
Si $M \in (D) \implies MA = MB$, contradiction.

Donc $M \in (\pi')$, **et :** $\mathbf{MA > MB} \iff M \in (\pi')$.

55. Application. — Soit deux triangles appariés $\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix}$; supposons $\hat{A} > \hat{A'}$, $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$. Soit Ax intérieure à $\hat{A}$ telle que : $\widehat{BAx} = \hat{A'}$. Sur Ax soit C_1 tel que $AC_1 = A'C'$. Les triangles ABC_1 et $A'B'C'$ sont égaux (2[e] cas), il en résulte (*Fig. 25*) : $BC_1 = B'C'$.

On a $AC = AC_1$, la médiatrice de CC_1 passe par A, les points B et C_1 sont du même côté de cette médiatrice donc :



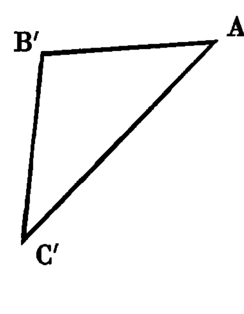


FIG. 25.

$$BC_1 < BC,$$
et : $$B'C' < BC.$$

Réciproquement, supposons $BC > B'C'$.

$\hat{A} < \hat{A'} \Longrightarrow BC < B'C'$, contradiction.

$\hat{A} = \hat{A'} \Longrightarrow BC = B'C'$, (égalité des deux triangles) encore contradiction.

On a donc $\hat{A} > \hat{A'}$. On énonce :

▪ THÉORÈME. — **Si deux triangles sont appariés $\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix}$ et si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, on a l'équivalence :**

$$BC > B'C' \iff \hat{A} > \hat{A'}.$$

56. Perpendiculaires et obliques. — Soit une droite (D), un point O non situé sur (D), H le pied de la perpendiculaire de O sur (D) et M un point de (D) :

1. Le triangle OHM est rectangle et quel que soit M distinct de H : $OH < OM$.

▪ **La distance du point O à une droite (D) est la plus courte distance du point O à tout point de la droite (D).**

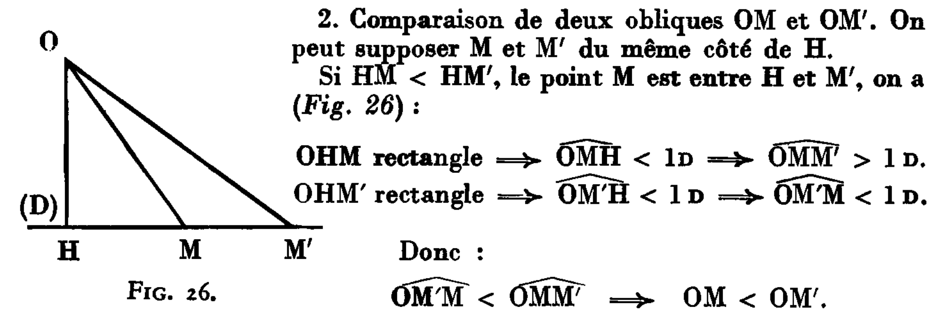


FIG. 26.

2. Comparaison de deux obliques OM et OM'. On peut supposer M et M' du même côté de H.

Si $HM < HM'$, le point M est entre H et M', on a (*Fig. 26*) :

OHM rectangle $\Longrightarrow \widehat{OMH} < 1\text{D} \Longrightarrow \widehat{OMM'} > 1\text{D}$.
OHM' rectangle $\Longrightarrow \widehat{OM'H} < 1\text{D} \Longrightarrow \widehat{OM'M} < 1\text{D}$.

Donc :

$$\widehat{OM'M} < \widehat{OMM'} \Longrightarrow OM < OM'.$$

Réciproquement, en raisonnant comme au n° 55 on démontre que si $OM < OM'$ il en résulte $HM < HM'$.

On a donc l'équivalence :

$$\mathbf{OM \leqslant OM' \iff HM \leqslant HM'.}$$

Exercices. 366. — Sur les côtés d'un triangle ABC, on prend A′ entre B et C, B′ entre C et A, C′ entre A et B. Démontrer que :

$$A'B' + B'C' + C'A' < AB + BC + CA.$$

367. — On prolonge le côté CA d'un triangle ABC d'un segment AC′ = AC et on trace la médiatrice de CC′ sur laquelle on prend un point M.
1° Comparer AB + AC et MB + MC.
2° Comparer les périmètres des triangles MBC et ABC.

368. — Soit une droite (*d*) et deux points A et B non situés sur (*d*). Déterminer un point M de (*d*) tel que MA + MB soit le plus petit possible :
1° A et B sont de part et d'autre de (*d*),
2° A et B sont du même côté de (*d*).

369. — Soit un triangle ABC et sa médiane AM. Comparer les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{CAM}$ si on suppose AB < AC. Énoncer le résultat obtenu.

370. — Soit un triangle ABC dans lequel AB < AC, soit AD la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$. Comparer les segments DB et DC.

371. — Soit un triangle ABC rectangle en A et un point M quelconque entre A et B, et P quelconque entre A et C. Démontrer que MP < BC.

372. — Soit un triangle ABC, et AM la médiane issue de A. Démontrer que AM $< \frac{AB + AC}{2}$. Énoncer le résultat obtenu.

373. — Soit un triangle ABC dans lequel les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont rangés dans l'ordre décroissant :

$$\widehat{A} \geqslant \widehat{B} \geqslant \widehat{C}.$$

On désigne par $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$ les angles extérieurs au triangle de sommets respectifs A, B, C.

1° Démontrer que si $\widehat{A}$ est aigu, l'on a :

$$\widehat{C} \leqslant \widehat{B} \leqslant \widehat{A} < \widehat{A'} \leqslant \widehat{B'} \leqslant \widehat{C'}.$$

2° Classer, de même, les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$ si $\widehat{A}$ est droit.

3° Si A est obtus, montrer que $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{A'}$ sont aigus, alors que $\widehat{B'}$ et $\widehat{C'}$ sont obtus. On trace de C la perpendiculaire CH sur AB et l'on prolonge AH d'un segment égal HK = AH. Démontrer que l'on a :

$$CK < CB; \quad \widehat{A'} > \widehat{B}; \quad \widehat{A} < \widehat{B'}$$

et :

$$\widehat{C} \leqslant \widehat{B} < \widehat{A'} < \widehat{A} < \widehat{B'} \leqslant \widehat{C'}.$$

374. — Soit un triangle ABC rectangle en A. La bissectrice de l'angle B coupe AC en D. On mène DH perpendiculaire à BC. Démontrer que l'on a :

$$DA < DC.$$

375. — On considère un triangle ABC dont les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus et tels que l'on ait $\widehat{B} > \widehat{C}$.
1° Démontrer que la médiane issue de A est comprise entre la bissectrice issue de A et le côté AC.
2° Si H désigne le pied de la hauteur issue de A, montrer que l'on a :

$$HB < HC.$$

En déduire que $\widehat{HAB} < \widehat{HAC}$.
3° Indiquer, sur une figure, l'ordre dans lequel se trouvent les demi-droites suivantes : côté AC, hauteur AH, bissectrice AD, médiane AM, côté AB.

Exercices.

III. PARALLÉLISME

57. Notations. Soit deux droites (d) et (d') et des points :

$$A \in (d), \quad B \in (d').$$
$$A \notin (d'), \quad B \notin (d).$$

La droite AB détermine deux demi-plans (π) et (π').

Le demi-plan (π) contient les demi-droites Ax et By dont les supports respectifs sont (d) et (d'); le demi-plan (π') contient de même les demi-droites Ax' et By'. La demi-droite d'origine A contenant B est Az, la demi-droite d'origine B contenant A est Bz'. Nous posons (*Fig. 27*) :

$$\widehat{xAz} = \widehat{A}_1. \qquad \widehat{yBz} = \widehat{B}_1.$$
$$\widehat{zAx'} = \widehat{A}_2. \qquad \widehat{zBy'} = \widehat{B}_2.$$
$$\widehat{x'Az'} = \widehat{A}_3. \qquad \widehat{y'Bz'} = \widehat{B}_3.$$
$$\widehat{z'Ax} = \widehat{A}_4. \qquad \widehat{z'By} = \widehat{B}_4.$$

Ces huit angles sont associés deux à deux, et désignés de la façon suivante :

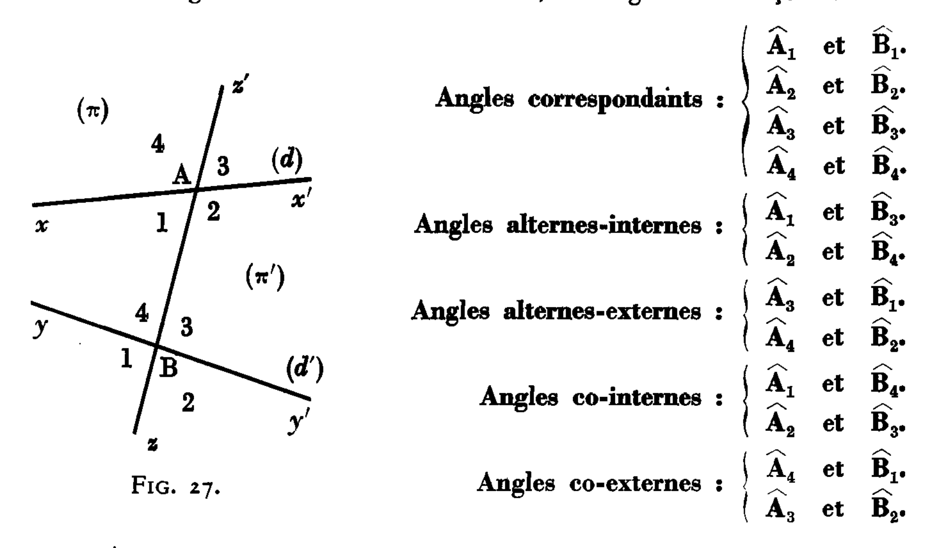


FIG. 27.

Angles correspondants : $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$. $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_2$. $\widehat{A}_3$ et $\widehat{B}_3$. $\widehat{A}_4$ et $\widehat{B}_4$.

Angles alternes-internes : $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_3$. $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_4$.

Angles alternes-externes : $\widehat{A}_3$ et $\widehat{B}_1$. $\widehat{A}_4$ et $\widehat{B}_2$.

Angles co-internes : $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_4$. $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_3$.

Angles co-externes : $\widehat{A}_4$ et $\widehat{B}_1$. $\widehat{A}_3$ et $\widehat{B}_2$.

Les relations suivantes sont évidentes :

$$(1) \qquad \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 = \widehat{A}_4 + \widehat{A}_1 = 2\,\text{D}.$$
$$(2) \qquad \widehat{A}_1 = \widehat{A}_3.$$
$$(3) \qquad \widehat{A}_2 = \widehat{A}_4.$$
$$(4) \qquad \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = \widehat{B}_3 + \widehat{B}_4 = \widehat{B}_4 + \widehat{B}_1 = 2\,\text{D}.$$
$$(5) \qquad \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3.$$
$$(6) \qquad \widehat{B}_2 = \widehat{B}_4.$$

On en déduit que si on a par exemple : $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 = 2\,\text{D}$, on a successivement :

$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1; \quad \widehat{A}_4 = \widehat{B}_4; \quad \widehat{A}_3 = \widehat{B}_3;$$
$$\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2; \quad \widehat{A}_2 = \widehat{B}_4; \quad \widehat{A}_1 = \widehat{B}_3;$$
$$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_3 = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 = 2\,\text{D}.$$

Le lecteur verra de même, que les égalités :

$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \quad \text{ou} \quad \widehat{A}_1 = \widehat{B}_3,$$

entraînent les mêmes conséquences.

58. Définition.

☆ **On dit que deux droites (d) et (d') sont parallèles pour exprimer qu'elles n'ont aucun point commun. Nous noterons : $(d) \parallel (d')$.**

Rappelons que deux droites distinctes perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

59. Propriété fondamentale des parallèles. — Soit deux droites (d) et (d') et une sécante commune AB (*Fig. 27*). Supposons deux angles co-internes supplémentaires, soit :

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 = 2\,\text{D}.$$

Si (d) et (d') avaient un point commun I :
ou bien le point I serait dans (π), alors le théorème de l'angle extérieur (n° 48) appliqué au triangle ABI donnerait :

$$\widehat{B}_3 > \widehat{A}_1.$$

Comme : $\widehat{B}_3 = 2\,\text{D} - \widehat{B}_4$, on aurait :

$$2\,\text{D} - \widehat{B}_4 > \widehat{A}_1, \text{ soit :}$$

$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 < 2\,\text{D}$, contradiction avec l'hypothèse;

ou bien le point I serait dans (π'), alors, l'angle $\widehat{A}_1$ extérieur au triangle ABI donnerait

$$\widehat{A}_1 > \widehat{B}_3,$$

donc :

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 > 2\,\text{D}.$$

Il y a encore contradiction.

Il en résulte que (d) et (d') sont parallèles et nous pouvons énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Si deux droites (d) et (d') sont telles, qu'une sécante commune détermine :**
— deux angles co-internes, ou co-externes supplémentaires,
— ou deux angles alternes-internes égaux,
— ou deux angles alternes-externes égaux,
— ou deux angles correspondants égaux,
ces deux droites sont parallèles.

60. Postulat d'Euclide[1]. — On a cherché au cours de l'histoire à démontrer une réciproque du théorème précédent. Ce n'est qu'à la fin du XIXe siècle, qu'on a pu prouver l'impossibilité de démontrer cette réciproque. Pourtant cette réciproque semble intuitivement vraie et adaptée à la géométrie dont on a besoin dans la pratique courante. Nous énoncerons donc l'axiome suivant, appelé traditionnellement « Postulat d'Euclide ».

▶ AXIOME. — **Si deux demi-droites Ax et By, situées dans le même demi-plan limité par AB, déterminent avec AB des angles co-internes dont la somme est plus petite que 2 D, ces deux demi-droites sont concourantes.**

61. Conséquences de l'axiome d'Euclide.

1. Soit $(d) \parallel (d')$, $A \in (d)$, $B \in (d')$, la droite AB est sécante commune à (d) et (d'), (*Fig. 28*). Soit Ax et By les demi-droites déterminées sur (d) et (d'), dans le même demi-plan limité par AB; soit $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_4$ les angles co-internes situés dans ce demi-plan.

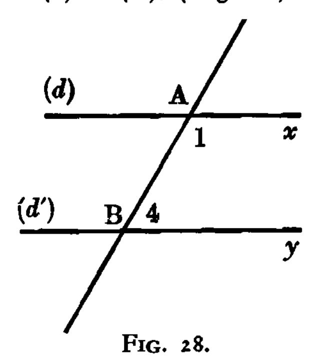


FIG. 28.

Si $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 < 2$ D, d'après l'axiome d'Euclide les demi-droites Ax et By ont un point commun, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 > 2$ D, comme :

$$\widehat{A}_2 = 2\text{ D} - A_1, \quad \text{et} \quad \widehat{B}_3 = 2\text{ D} - \widehat{B}_4,$$

on a : $$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_3 = 4\text{ D} - (\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4),$$

donc : $$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_3 < 2\text{ D}.$$

Les demi-droites Ax' et By', respectivement opposées à Ax et By, sont concourantes d'où encore contradiction.

On a donc $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 = 2$ D, et en tenant compte du n° 57, on peut énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Si deux droites sont parallèles elles déterminent avec toute sécante :**

— des angles co-internes ou co-externes supplémentaires,

— des angles alternes-internes ou alternes-externes égaux,

— des angles correspondants égaux.

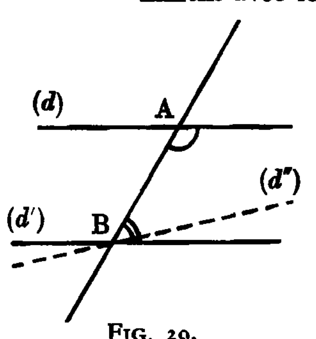


FIG. 29.

2. Soit une droite (d), $B \notin (d)$ et $A \in (d)$, (*Fig. 29*). On peut construire (d') passant par B, telle que les angles co-internes déterminés avec (d) et (d') par la sécante AB soient supplémentaires; les droites (d) et (d') sont parallèles.

1. EUCLIDE : géomètre grec (environ 300 av. J.-C.).

Toute droite (d'') passant par B, distincte de (d'), est telle que les angles co-internes ont une somme différente de 2D. D'après l'axiome d'Euclide, les droites (d) et (d'') sont concourantes.

▪ THÉORÈME. — **Par tout point non situé sur une droite, on peut tracer une parallèle à cette droite. On ne peut en tracer qu'une.**

Les conséquences suivantes s'en déduisent immédiatement :

a) **Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une, coupe l'autre.**

b) **Deux droites distinctes parallèles à une troisième sont parallèles.**

$$\begin{matrix}(d) /\!/ (\delta) \\ (d') /\!/ (\delta)\end{matrix} \Longrightarrow (d) /\!/ (d').$$

c) **Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.**

$$\begin{matrix}(d) /\!/ (d') \\ (\delta) \perp (d)\end{matrix} \Longrightarrow (\delta) \perp (d').$$

3. Soit un triangle propre ABC (*Fig. 30*), By la demi-droite définie sur BC et ne contenant pas C; soit Ax' parallèle à BC dans le demi-plan limité par AB et contenant C, on a :

$$\widehat{ABy} = \widehat{BAx'}, \text{ comme alternes-internes.}$$

Le théorème de l'angle extérieur donne : $\widehat{BAx'} > \widehat{BAC}$,

donc Ax' et AB sont de part et d'autre de AC et :

$\widehat{CAx'} = \widehat{ACB}$, comme alternes-internes.

Comme :

$\widehat{BAx'} = \widehat{BAC} + \widehat{CAx'}$, on a finalement :

$$\widehat{ABy} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}.$$

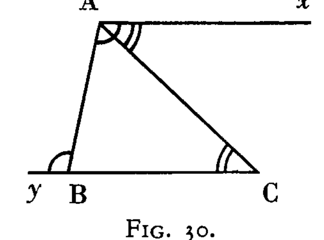


FIG. 30.

▪ THÉORÈME. — **L'angle extérieur d'un triangle est la somme des deux angles qui ne lui sont pas adjacents.**

62. Somme des angles d'un triangle, d'un polygone convexe. — Du paragraphe précédent on déduit les conséquences suivantes :

1. **Dans tout triangle ABC (propre ou impropre) :**

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2\,\text{D}.$$

2. **Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.**
3. **Chaque angle d'un triangle équilatéral a pour mesure 60°.**

4. Si, dans un triangle isocèle, un angle a pour mesure 60°, ce triangle est équilatéral.

5. Si, dans un triangle ABC rectangle en A, l'angle $\widehat{C}$ vaut 30°, le côté AB est la moitié de l'hypoténuse et réciproquement.

(On prolonge BA d'un segment égal AB′ et on étudie le triangle CBB′ ainsi obtenu.)

6. Si deux triangles sont appariés : $\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C'. \end{matrix}$

On a : $\left.\begin{matrix} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \widehat{C} = \widehat{C'}.$

7. La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe de n côtés est :

$$S = 2\,(n - 2)\,\text{D}.$$

8. La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est :

$$S' = 4\,\text{D}.$$

Rappel. On dit que le polygone $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ est convexe pour exprimer que si on prend deux sommets consécutifs quelconques A_kA_{k+1}, les $(n - 2)$ autres sommets sont tous dans un des demi-plans limités par A_kA_{k+1}.

Remarquons que : $S + S' = 2\,n\,\text{D}$.

63. Conclusion. — Nous avons, dans ce chapitre, défini entre les droites du plan, une **relation :** le parallélisme, noté //.

Cette relation n'est pas **réflexive,** une droite ne pouvant au sens strict, être considérée comme parallèle à elle-même.

Elle est **symétrique :**

$$(d) \,//\, (d') \Longleftrightarrow (d') \,//\, (d).$$

Elle est **transitive :**

$$\left.\begin{matrix} (d) \,//\, (\delta) \\ (d') \,//\, (\delta) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (d) \,//\, (d').$$

Si nous notons par p la phrase « les deux droites (d) et (d') sont parallèles », nous noterons par $\bar{p}$ la phrase contraire « les deux droites (d) et (d') ne sont pas parallèles », par e le fait que « deux angles co-internes (co-externes) sont supplémentaires, ou deux angles alternes-internes (externes), ou deux angles correspondants égaux », et par $\bar{e}$ la proposition contraire on a :

$$[p \Longleftrightarrow e] \Longrightarrow [\bar{p} \Longleftrightarrow \bar{e}].$$

Rappelons enfin que les égalités e, **caractérisent** le parallélisme, et notons également les conséquences suivantes :

1. Deux angles tels que les côtés de l'un sont respectivement parallèles aux côtés de l'autre sont égaux ou supplémentaires.

2. Deux angles tels que les côtés de l'un sont respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre sont égaux ou supplémentaires.

Exercices. 376. — Soit ABC un triangle isocèle de base BC. On trace une parallèle à BC qui coupe AB en D et AC en E.
Démontrer que le triangle ADE est isocèle.

377. — Par le milieu M du côté BC d'un triangle ABC on trace la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A. Cette perpendiculaire coupe AB en D et AC en E. Démontrer que l'on a : BD = CE (*faire intervenir la parallèle à AB menée par C*).

378. — Par le sommet B d'un triangle isocèle ABC de base BC, on trace la perpendiculaire à BC qui rencontre le support de AC en D.
Démontrer que le triangle ADB est isocèle.

379. — Par le sommet A d'un triangle ABC on trace la parallèle au côté BC. Cette parallèle rencontre en B′ et C′ les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
Démontrer que l'on a : B′C′ = AB + AC.

380. — On donne deux droites parallèles (D) et (D′) et une sécante AA′.
1° Démontrer que les bissectrices des deux angles alternes-internes ou de deux angles correspondants sont parallèles.
2° Démontrer que les bissectrices de deux angles co-internes sont perpendiculaires.
3° Énoncer et démontrer les réciproques de ces propriétés.

381. — Sur les côtés d'un angle xOy on porte des segments égaux OA sur Ox et OB sur Oy. On trace extérieurement à l'angle xOy des demi-droites Au et Bv telles que $\widehat{OAu} = \widehat{OBv}$ sur lesquelles on porte des segments égaux : AM = BN.
Démontrer que les droites AB et MN sont parallèles ou confondues.

382. — Comparer les angles de deux triangles dont les côtés sont parallèles deux à deux; ou dont les côtés sont respectivement perpendiculaires deux à deux.

383. — Calculer les angles formés par les hauteurs BH et CK d'un triangle ABC connaissant l'angle $\widehat{BAC}$. *Remarquer qu'il y a plusieurs cas de figure.*

384. — Soit un triangle ABC tel que la bissectrice intérieure AD est égale à AB, et la bissectrice intérieure CE est égale à AC. Calculer les angles du triangle.

385. — On suppose que les angles d'un triangle ABC ont pour mesures :

$$\widehat{A} = 132°, \quad \widehat{B} = 36°, \quad \widehat{C} = 12°.$$

1° Démontrer que la bissectrice extérieure issue de A coupe la droite BC en D. Évaluer les angles du triangle ADB, en déduire AD = AC.
2° Démontrer que la bissectrice extérieure du sommet C coupe AB en E. Évaluer les angles du triangle ACE, en déduire EC = AC.
3° Vérifier sur cet exemple que les bissectrices extérieures d'un triangle (limitées à un sommet et au côté opposé) peuvent être égales sans que le triangle soit isocèle.

386. — Dans un quadrilatère convexe ABCD on donne : $\widehat{A} = 100°$, $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{C} = 70°$. Calculer l'angle $\widehat{D}$. Les droites AB et CD se coupent en I. Calculer l'angle $\widehat{BIC}$.

387. — La somme des angles d'un polygone est 5 040°. Combien a-t-il de côtés?

388. — Démontrer qu'un polygone convexe ne peut pas avoir plus de trois angles aigus.

389. — Dans tout polygone convexe de n côtés $n \geqslant 4$, un angle quelconque est plus petit que la somme des autres angles.

390. — Soit $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ deux angles adjacents supplémentaires dont les bissectrices sont OD et OE. On trace une parallèle à COA qui coupe OD en M, OB en N et OE en P.
1° Démontrer que les triangles ONM et ONP sont isocèles.
2° En conclure que l'on a : ON = MN = NP.

391. — On suppose que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B'}$ sont égaux et que les côtés OA et O'A' sont parallèles. Peut-on affirmer que OB et O'B' sont parallèles?

392. — On considère deux droites parallèles (D) et (D') et un point A non situé sur elles. On suppose que B est un point de (D) et C un point de (D') tels que l'on ait : AB = AC et $\widehat{BAC}$ = 1D. On trace AI perpendiculaire sur (D) en I et AI' perpendiculaire sur (D') en I'.
1° Démontrer que les deux triangles BAI et CAI' sont égaux;
2° Construire les points B et C connaissant (D), (D') et A.

393. — On trace les bissectrices BB' et CC' d'un triangle ABC.
1° Démontrer que ces droites se coupent à l'intérieur du triangle en un point I.
2° On trace par I la parallèle à BC qui coupe AB en D et AC en E. Démontrer que l'on a : DE = BD + CE.
3° Que devient le résultat du 2° si l'on trace la parallèle à BC par le point de rencontre des bissectrices des angles extérieurs en B et C ou par le point de rencontre de la bissectrice de l'angle B avec la bissectrice extérieure de l'angle C?

394. — ABC est un triangle rectangle en A. On trace par C la parallèle au côté AB sur laquelle on porte des segments CD = CE = CB. Démontrer que BE et BD sont les bissectrices des angles formés par les droites qui portent les côtés AB et BC.

395. — Par deux points A et B on trace les perpendiculaires à AB et on porte sur ces perpendiculaires d'un même côté de AB des longueurs AC = BD. Montrer que :
1° CB = AD;
2° les deux triangles CAB et BDC sont égaux;
3° CD est parallèle à AB.

396. — ABC désigne un triangle rectangle en A. On prolonge BA d'un segment AB' = AC et on prolonge CA d'un segment AC' = AB.
1° Comparer les angles $\widehat{B'C'A}$ et $\widehat{ABC}$;
2° On trace la hauteur AH du triangle ABC qui coupe B'C' en M. Démontrer que AM est la médiane du triangle AB'C'.

397. — Dans un triangle ABC on prolonge au-delà de B la hauteur issue de B d'un segment BB' = AC et la hauteur issue de C au-delà de C d'un segment CC' = AB.
1° Comparer les deux triangles ACC' et ABB'.
2° En déduire que le triangle B'AC' est rectangle et isocèle.

398. — Deux droites parallèles (D) et (D') étant coupées par la sécante AA', on prend le milieu O de AA'. On trace par O une autre sécante BB'. Démontrer que O est le milieu de BB'.

399. — Par le sommet C d'un triangle ABC on trace la parallèle à la bissectrice AD du triangle ABC. Cette parallèle coupe AB en E. Étudier le triangle AEC.

400. — AX et BY sont deux demi-droites parallèles et de même sens. Les bissectrices des angles $\widehat{XAB}$ et $\widehat{YBA}$ se coupent en O.
1° Évaluer l'angle de ces bissectrices.
2° On trace par O la perpendiculaire à AX et BY qui coupe AX en A' et BY en B'. Démontrer que l'on a :

$$AB = AA' + BB'.$$

401. — Soit ABC un triangle rectangle en A.
1° Construire le point M de BC tel que l'on ait MA = MB;
2° Déterminer, en fonction de l'angle $\widehat{ABC}$, les angles du triangle AMB et ceux du triangle AMC et en déduire que l'on a : MA = MB = MC.

402. — On donne dans un triangle : $\hat{A} = 60°$; $\hat{B} = 46°$. Calculer l'angle $\hat{C}$ et les angles formés par les bissectrices et les hauteurs issues de chaque sommet.

403. — Dans un triangle ABC on a : $\hat{A} = 30°$; $\hat{B} = 45°$.
1° Calculer $\hat{C}$.
2° On trace la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ et la perpendiculaire en C à BC. Ces deux droites se coupent en D. Évaluer les angles du triangle ADC.

404. — On suppose que l'angle $\hat{A}$ d'un triangle ABC est triple de l'angle $\hat{B}$.
1° Entre quelles limites est compris $\hat{B}$?
2° Entre quelles limites faut-il prendre $\hat{B}$ pour que les trois angles du triangle soient aigus? Le triangle ABC peut-il être rectangle?
3° On porte sur CB une longueur CD = CA. Étudier le triangle ADB.

405. — Démontrer que dans un triangle rectangle la bissectrice issue du sommet de l'angle droit est aussi bissectrice de l'angle formé par la hauteur et la médiane issues de ce sommet. Évaluer l'angle de cette hauteur et de cette médiane en fonction des angles aigus du triangle.

406. — On prolonge le côté BC d'un triangle ABC au-delà de C d'un segment CC′ = AC et au-delà de B d'un segment BB′ = AB.
1° Évaluer, en fonction de $\hat{B}$ et de $\hat{C}$, les angles du triangle AB′C′;
2° Démontrer que si deux triangles ont deux angles respectivement égaux et même périmètre, ils sont égaux.

407. — Dans un triangle ABC on a : AC > AB. On prend le point D de AC tel que AD = AB et le point E de AC tel que BE = CE. Évaluer les angles des triangles DBC et AEB en fonction des angles du triangle. Démontrer que l'on a :

$$\widehat{ABE} = 2\,\widehat{DBC}.$$

408. — Dans le triangle ABC on trace la bissectrice de l'angle $\hat{A}$. Cette droite rencontre en D la hauteur issue de B et en E la perpendiculaire en B à AB.
1° Calculer en fonction de A les valeurs des angles $\widehat{ABD}$, $\widehat{BDE}$, $\widehat{DEB}$ (deux cas suivant que A est aigu ou obtus).
2° Étudier le triangle BDE.

409. — Soit un triangle ABC, démontrer que :
1° l'angle de la hauteur AH et de la bissectrice AD est égal à la demi-différence des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle;
2° les bissectrices des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ font entre elles l'angle $1\,\text{D} + \frac{\hat{A}}{2}$;
3° les bissectrices des angles extérieurs $\hat{B}$ et $\hat{C}$ font entre elles l'angle

$$1\,\text{D} - \frac{\hat{A}}{2}.$$

410. — Soit un triangle ABC dans lequel $\hat{B} - \hat{C} = 1\,\text{D}$.
1° On trace la hauteur AD; évaluer $\widehat{BAD}$ en fonction de $\hat{C}$.
2° On prolonge CD d'un segment DC′ = CD. Démontrer que le triangle BAC′ est rectangle.
3° Évaluer l'angle de la bissectrice de $\hat{A}$ avec BC.

IV. PARALLÉLOGRAMMES

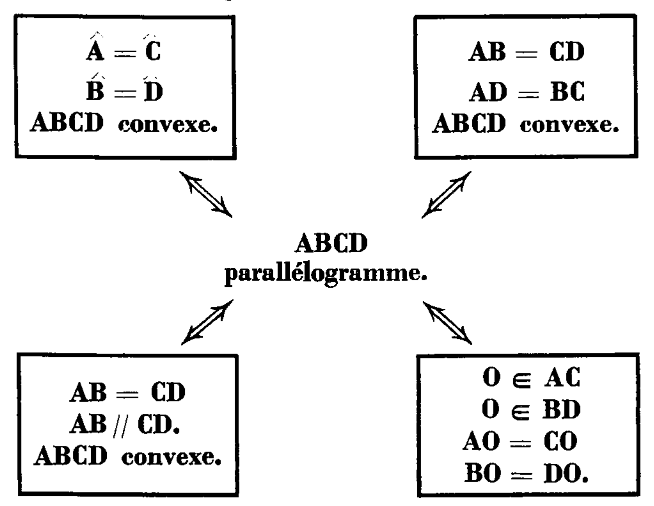
64. Parallélogramme.

☆ DÉFINITION.

ABCD parallélogramme	$\Longleftrightarrow$	**AB // CD** **AD // BC.**

Il en résulte que le parallélogramme est un quadrilatère convexe.

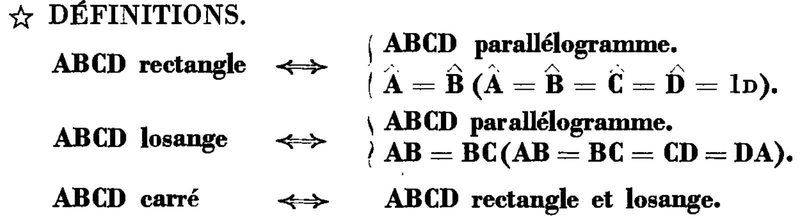
Propriétés caractéristiques. — Elles sont résumées dans ce tableau :



Remarque. Deux égalités sont indispensables pour définir ou caractériser le parallélogramme.

65. Parallélogrammes particuliers. Rectangle. Losange. Carré.

☆ DÉFINITIONS.



ABCD rectangle $\Longleftrightarrow$ { **ABCD parallélogramme.** / $\hat{A} = \hat{B}$ ($\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1$D).

ABCD losange $\Longleftrightarrow$ { **ABCD parallélogramme.** / **AB = BC (AB = BC = CD = DA).**

ABCD carré $\Longleftrightarrow$ **ABCD rectangle et losange.**

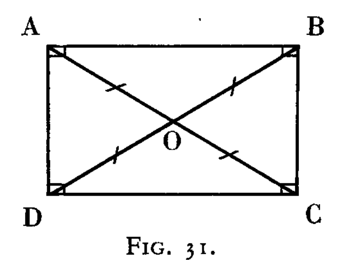


Fig. 31.

Propriétés caractéristiques.

ABCD rectangle (*Fig. 31*) $\Longleftrightarrow$ { **ABCD parallélogramme.** / **AC = BD.**

ABCD losange $\Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\textbf{ABCD parallélogramme.}\\ \textbf{AC} \perp \textbf{BD.}\end{array}\right.$
(*Fig. 32*)

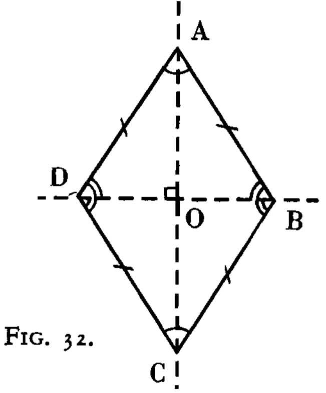


FIG. 32.

Trois égalités sont indispensables pour définir ou caractériser un rectangle ou un losange; quatre pour définir ou caractériser un carré.

66. Application. — *Une propriété caractéristique du triangle rectangle.* Soit un triangle ABC rectangle en A (*Fig. 33*) et la médiane AM issue du sommet de l'angle droit. Prolongeons AM d'un segment MA′ = MA. Étudions le quadrilatère ABA′C : c'est un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu; c'est un rectangle puisque ce parallélogramme a un angle droit $\widehat{A}$. Il en résulte que ses diagonales sont égales et $AM = \frac{BC}{2}$.

FIG. 33.

Réciproquement, soit un triangle ABC dans lequel la médiane AM est telle que $AM = \frac{BC}{2}$. Prolongeons AM d'un segment MA′ = MA. Le quadrilatère ABA′C est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu; c'est un rectangle puisque les diagonales sont égales donc $\widehat{A} = 1$ D. Le triangle ABC est rectangle en A. On peut résumer :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BAC} = 1\text{ D}\\ \text{M milieu de BC}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}MA = \dfrac{BC}{2}\\ \text{M milieu de BC.}\end{array}\right.$$

Exercices. 411. — Deux parallélogrammes ABCD et AECF ont une même diagonale AC.
1° Démontrer que AC, BD et EF sont concourantes ou confondues.
2° Étudier le quadrilatère EBFD.

412. — Dans un parallélogramme ABCD, on joint D au milieu E de AB et B au milieu G de DC. Démontrer que DE et GB sont parallèles.

413. — Démontrer que deux sommets d'un parallélogramme sont équidistants de la diagonale qui joint les deux autres.

414. — Que peut-on dire d'un parallélogramme dans lequel une diagonale est bissectrice d'un angle?

415. — Démontrer que dans un rectangle, les bissectrices de l'angle des diagonales sont parallèles aux côtés. Réciproque?

416. — Dans un triangle ABC rectangle en A, on joint le pied H de la hauteur AH aux milieux B′ et C′ de AB et AC. Montrer que l'angle $\widehat{B'HC'}$ est droit.

417. — Que peut-on dire d'un quadrilatère ABCD dont deux côtés opposés AB et CD sont parallèles et les deux autres AD et BC égaux?

418. — Soit un parallélogramme ABCD. On prolonge AB d'un segment BE = AB et aussi AD d'un segment DF = DA.
1° Étudier les quadrilatères BDFC et DBEC.
2° Démontrer que les points F, C, E sont alignés.

419. — Soit un parallélogramme ABCD. Les bissectrices des angles A et B se coupent en O.
1° Que peut-on dire du triangle AOB?
2° On prolonge BO jusqu'en E sur AD. Démontrer que OB = OE.
3° Peut-il arriver que OA = OB?

420. — On suppose que, dans un parallélogramme de centre O, la diagonale AC est plus grande que la diagonale BD. On porte sur AC deux segments OE = OF de même longueur que OB.
1° Étudier le quadrilatère BEDF.
2° En déduire que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont aigus. Réciproque.

421. — Étudier le quadrilatère constitué par les quatre bissectrices des angles d'un parallélogramme. Évaluer ses diagonales en fonction des côtés du parallélogramme. Mêmes questions pour les bissectrices extérieures.

422. — D'un point M pris sur la médiane AO d'un triangle ABC rectangle en A, on trace les perpendiculaires MD à AB et ME à AC. Démontrer que DE et BC sont parallèles.

423. — Dans un triangle ABC, on désigne par O le milieu de BC, par B′ et C′ les pieds des hauteurs issues de B et C. Démontrer que la médiatrice de B′C′ passe par O.

Exercices.

V. ENSEMBLES DE POINTS

67. Ensemble des points équidistants de deux points donnés. — Soit A et B les deux points donnés (*Fig. 34*), et (E) l'ensemble cherché.

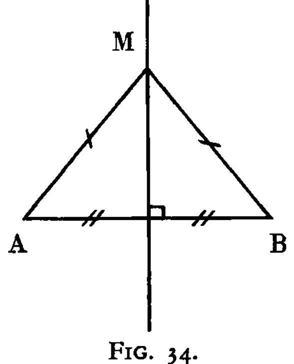


FIG. 34.

Si le point M ∈ (E), on a MA = MB, donc le point M appartient à la médiatrice de AB.

Si le point M est sur la médiatrice de AB, on a MA = MB et le point M appartient à l'ensemble (E). Nous énoncerons :

- **La relation MA = MB admet pour ensemble représentatif la médiatrice du segment AB.**

68. Ensemble des points équidistants de deux droites données distinctes.

1. Les deux droites données (d) et (d') sont parallèles.

Existence de points de l'ensemble. Soit (δ) une perpendiculaire en A à (d) (*Fig. 35*), **cette droite est perpendiculaire en A′ à (d').** Soit I le milieu de AA′. Les distances de I aux droites (d) et (d') **sont IA et IA′. Le point I appartient à l'ensemble.**

Étude de la figure. Soit M un autre point de l'ensemble, MH et MH′ les perpendiculaires de M sur (d) et (d'), les points M, H, H′ sont alignés. On a, les points A et A′ étant fixes :

Fig. 35.

$$\left.\begin{array}{l}HH' \,//\, AA' \\ AH \,//\, A'H'\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}AHH'A' \\ \text{parallélogramme}\end{array} \Longrightarrow AH = A'H'.$$

Les triangles rectangles AHM et A′H′M ont : $AH = A'H'$ et $MH = MH'$, ils sont égaux et : $MA = MA'$.

Tout point de l'ensemble est sur la médiatrice de AA′.

Réciproque. Soit M un point de la médiatrice de AA′ autre que I; soit MH et MH′ les distances de M aux droites (d) et (d'). Les points M, H, H′ sont alignés, le quadrilatère AHH′A′ est un parallélogramme et :

$$AH = A'H'.$$

Les triangles rectangles AHM et A′H′M ont : $AH = A'H'$ et $MA = MA'$, ils sont égaux et : $MH = MH'$.

Tout point de la médiatrice de AA′ appartient à l'ensemble. Donc :

- **L'ensemble des points équidistants de deux droites parallèles données (d) et (d') est une droite (D), médiatrice de tout segment perpendiculaire à (d) et (d') et dont les extrémités sont sur ces deux droites.**

Nous désignerons cette droite (D) par « droite parallèle à (d) et (d') équidistante de ces deux droites ».

2. Les droites (d) et (d') sont concourantes en O.

Existence de points de l'ensemble. Soit Ox et Ox' deux demi-droites prises respectivement sur (d) et (d') et soit Oy la bissectrice de $\widehat{xOx'}$. Puisque $\widehat{xOx'} < 2\,\text{D}$, on a :

$$\widehat{xOy} < 1\,\text{D}; \qquad \widehat{yOx'} < 1\,\text{D}.$$

Soit M un point quelconque de Oy, H et H′ les pieds des perpendiculaires de M sur (d) et (d'). Puisque $\widehat{xOy} < 1\,\text{D}$, le point H est sur Ox; de même H′ est sur Ox' (*Fig. 36*).

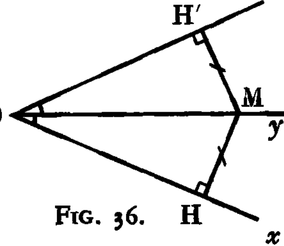


Fig. 36.

Les triangles rectangles MOH et MOH′ ont MO commun et $\widehat{MOH} = \widehat{MOH'}$, ils sont égaux et : $MH = MH'$.

Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des deux côtés de cet angle.

Étude de la figure (*Fig. 37*). Soit M un point équidistant des droites (*d*) et (*d'*). On a : MH = MH'. Les triangles rectangles OMH et OMH' ont : OM commun et MH = MH', ils sont égaux et : $\widehat{MOH} = \widehat{MOH'}$.

Les demi-droites définies par OH et OH' ne peuvent pas être du même côté de OM, car les points O, H, H' seraient alignés et (*d*) et (*d'*) confondues.

Les demi-droites OH et OH' étant de part et d'autre de OM, le point M se trouve sur la bissectrice d'un des angles formés par les droites (*d*) et (*d'*).

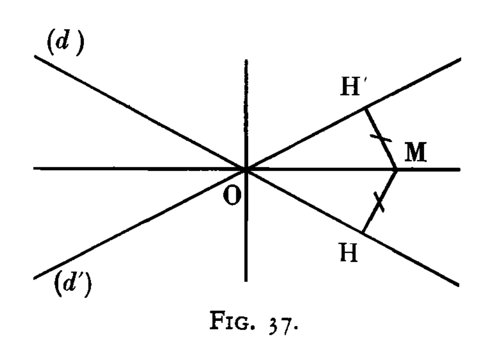


FIG. 37.

- **L'ensemble des points équidistants de deux droites concourantes, est l'ensemble des points des deux bissectrices des angles formés par ces deux droites.**

69. Problèmes d'ensembles géométriques. — Nous venons d'étudier quelques exemples d'ensembles de points ayant une propriété caractéristique. C'est là un problème important en géométrie. Pour traiter correctement un tel problème on aura intérêt à suivre la méthode du n° **68**, soit :

1. *Existence de points de l'ensemble (E).* — Il peut arriver en effet que (E) soit vide.

EXEMPLE. Soit deux droites parallèles (*d*) et (*d'*) dont la distance est 4 cm. Il n'existe pas de point dont la somme des distances à (*d*) et (*d'*) est 2 cm.

2. *Étude de la figure.* — Lorsqu'on a déterminé un point de (E), l'étude de la figure et l'étude de la position du point par rapport aux éléments fixes donnés permet, en général, d'affirmer que le point appartient à un certain ensemble (E_1).

Il est évident que (E) est inclus (au sens large) dans (E_1). On dit aussi que l'on fait l'analyse de la question.

3. *Réciproque ou synthèse.* — On prend un point quelconque de (E_1) et on cherche si ce point appartient à (E).

Si oui, (E) coïncide avec (E_1).

Si non, une partie seulement de (E_1) constitue (E).

Dans certains cas, l'utilisation de propriétés caractéristiques, matérialisées par des équivalences logiques, permet d'éviter la réciproque.

Traitons un exemple.

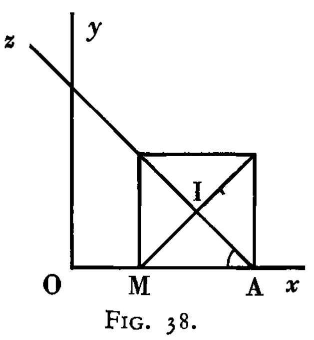


FIG. 38.

PROBLÈME. *Soit un angle droit xOy; sur Ox un point fixe* A. *A tout point* M *du segment* OA *on fait correspondre le carré, ayant pour côté* AM, *intérieur à l'angle xOy. Ensemble formé par les centres* I *des carrés obtenus.*

1. *Existence de points de l'ensemble.* A tout point M du segment OA correspond un carré donc un point I (*Fig. 38*).

2. *Étude de la figure.* Les diagonales du carré se coupent en leur milieu (parallélogramme), sont égales (rectangle) et perpendiculaires (losange) donc :

$$\widehat{IAM} = 45^\circ.$$

Le point I se trouve sur la demi-droite Az, située dans le demi-plan limité par Ox et contenant Oy telle que $\widehat{OAz} = 45^\circ$.

3. *Réciproque.* Soit I un point de Az, H le pied de la perpendiculaire de I sur Ox (*Fig. 39*), on a : $AM = 2\ AH$.

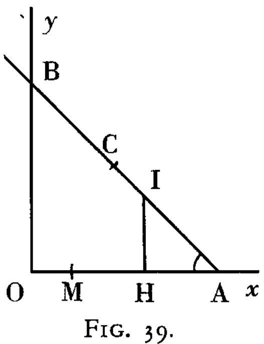


FIG. 39.

Le point I appartient à l'ensemble si M est entre O et A donc : $AH < \frac{OA}{2}$.

Soit alors B sur Oy tel que $OB = OA$ et C le milieu de AB.
L'ensemble cherché est le segment AC.

REMARQUE. Il arrive que la recherche de l'ensemble des points M ayant une propriété caractéristique soit proposée par la locution « lieu de M ».

Exercices. 424. — Ensemble des points qui sont à une distance donnée l d'une droite donnée (d).

425. — Soit deux droites parallèles (d) et (d') dont la distance est 5 cm. D'un point M on trace MH et MH' perpendiculaires sur (d) et (d').
1° Ensemble des points tels que $MH + MH' = 5$ cm.
2° Ensemble des points tels que $|MH - MH'| = 5$ cm.
3° Ensemble des points M tels que $MH + MH' = 7$ cm.
4° Ensemble des points M tels que $|MH - MH'| = 3$ cm.

426. — Soit deux points fixes A et B. Ensemble des points M tels que :
1° $MA + MB = AB$.
2° $MA - MB = AB$.
3° $MB - MA = AB$.

427. — Soit deux droites perpendiculaires (d) et (d'), A et A' les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point M du plan sur (d) et (d'). Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$MA + MA' = 2p?$$

p longueur donnée.

428. — Soit un angle $\widehat{xAy}$. Un point variable B sur Ax, et C variable sur Ay tels que : $AB + AC = a$ (a longueur donnée fixe).
Soit D tel que ABDC soit un parallélogramme.
Étudier l'ensemble des points D.
Reprendre la même question avec $AB - AC = a$. Étudier le cas particulier où $a = 0$.

429. — Soit un triangle isocèle ABC ($AB = AC$). Par un point M du segment BC, on trace les perpendiculaires MP et MQ à AB et AC. Démontrer que la somme $MP + MQ$ reste constante quand M décrit BC.
Application. Ensemble des points dont la somme des distances à deux droites concourantes données est une constante donnée.

430. — Soit un triangle isocèle ABC ($AB = AC$); par un point M de la droite BC, extérieur au segment BC, on trace les perpendiculaires MP et MQ sur AB et AC. Montrer que la différence $|MP - MQ|$ est constante.
Application. Ensemble des points dont la différence des distances à deux droites concourantes données est une constante donnée. **Exercices.**

VI. DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE

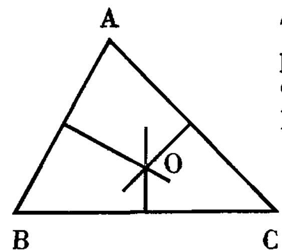


FIG. 40.

70. Médiatrices d'un triangle. — Soit un triangle propre ABC. Les médiatrices de AB et AC sont concourantes en O (*Fig. 40*) car, si elles étaient parallèles, AB et AC seraient confondues. On a :

O sur la médiatrice de AB $\Longrightarrow$ OA = OB.
O sur la médiatrice de AC $\Longrightarrow$ OA = OC.
Il en résulte :
OB = OC $\Longrightarrow$ O sur la médiatrice de BC.

▪ **Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point équidistant des trois sommets.**

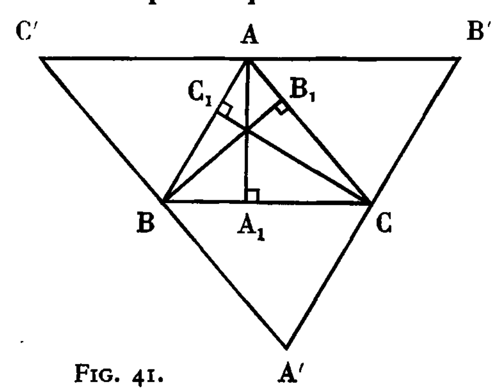


FIG. 41.

71. Hauteurs du triangle. — Soit AA_1, BB_1 et CC_1 les trois hauteurs du triangle propre ABC. Traçons les trois droites :

passant par A parallèle à BC,
passant par B parallèle à CA,
passant par C parallèle à AB.

Ces trois droites sont concourantes deux à deux et déterminent un triangle A′B′C′ (*Fig. 41*). On a :

$$\left.\begin{array}{l} AB' \parallel BC \\ CB' \parallel AB \end{array}\right\} \Longrightarrow AB'CB \text{ parallélogramme} \Longrightarrow AB' = BC.$$

$$\left.\begin{array}{l} AC' \parallel BC \\ BC' \parallel AC \end{array}\right\} \Longrightarrow AC'BC \text{ parallélogramme} \Longrightarrow AC' = BC.$$

Il en résulte que A est le milieu de B′C′. De même B est le milieu de A′C′ et C le milieu de A′B′. Les trois hauteurs AA_1, BB_1 et CC_1, médiatrices du triangle A′B′C′, sont concourantes.

▪ **Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est appelé l'orthocentre du triangle.**

REMARQUE. Soit ABC un triangle et D son orthocentre. On a :

$$DA \perp BC, \qquad BA \perp DC, \qquad CA \perp DB.$$

Il en résulte que A est l'orthocentre du triangle BDC. De même B est l'orthocentre de ADC et C l'orthocentre de ADB. On peut énoncer :

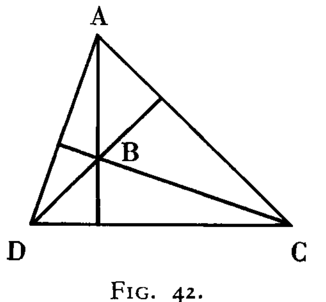


FIG. 42.

- **Si quatre points sont tels que l'un d'eux est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.**

L'ensemble défini par 4 droites est un **quadrilatère** : ces 4 droites prises deux à deux déterminent en général 6 points qui sont les 6 sommets d'un **quadrilatère complet.**

L'ensemble défini par 4 points (*Fig. 42*) est un **quadrangle** qui a 6 côtés. Un quadrangle ayant la propriété que nous venons d'énoncer est dit **orthocentrique.**

72. Segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle. — Soit N et P les milieux respectifs des côtés AC et AB du triangle propre ABC. Prolongeons PN d'un segment égal NM. On a (*Fig. 43*) :

$$\left.\begin{array}{l}NA = NC\\NP = NM\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{APCM parallélogramme} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}AP = CM.\\AP \parallel CM.\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}AP = CM\\AP \parallel CM\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}BP = CM\\BP \parallel CM\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c}\text{PMCB}\\\text{parallélogramme}\end{array} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}2\,PN = BC.\\PN \parallel BC.\end{array}\right.$$

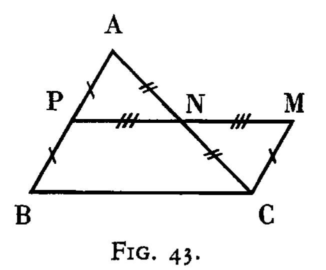


FIG. 43.

- **Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à la moitié de ce côté.**

Si une droite passe par P milieu de AB et est parallèle à BC, elle est évidemment confondue avec PN.

73. Médianes du triangle. — Soit AM, BN et CP les trois médianes du triangle propre ABC. Le point N est le milieu de AC donc BN est intérieure à l'angle $\widehat{B}$ du triangle BPC et par suite coupe CP en un point G situé entre C et P. De même G est entre B et N.

Soit I et J les milieux de GB et GC.

On a (*Fig. 44*) :

$$\left.\begin{array}{l}\text{P milieu de AB}\\\text{N milieu de AC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}NP = \frac{BC}{2}\\NP \parallel BC\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I milieu de GB}\\\text{J milieu de GC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}IJ = \frac{BC}{2}\\IJ \parallel BC\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}NP = IJ\\NP \parallel IJ\end{array}\right.$$

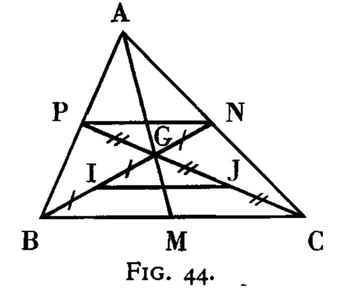


FIG. 44.

Le quadrilatère PNJI est un parallélogramme.

Il en résulte : $GN = GI = IB = \frac{1}{3}BN$ et, $GP = GJ = JC = \frac{1}{3}CP$.

De même les médianes AM et BN se coupent en G′ situé entre B et N tel que : $G'N = \frac{BN}{3}$.
Le point G′ coïncide avec G.

■ **Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point commun est appelé centre de gravité du triangle. Sur chaque médiane le centre de gravité est entre le sommet et le milieu du côté opposé, aux $\frac{2}{3}$ de ce segment à partir du sommet.**

74. Bissectrices du triangle. — Soit By et Cz les bissectrices intérieures des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle ABC. La demi-droite By intérieure à $\widehat{ABC}$ coupe le segment AC en B′ (*Fig. 45*). La demi-droite Cz intérieure à $\widehat{ACB}$ coupe en I le segment BB′. Le point I, étant dans le demi-plan contenant C et limité par AB et dans le demi-plan contenant B et limité par AC, est intérieur à l'angle $\widehat{BAC}$. Soit M, N, P les pieds des perpendiculaires tracées de I à BC, CA et AB. On a :

$$\left.\begin{array}{lll}\text{I sur la bissectrice de } \hat{B} & \Longrightarrow & IM = IP \\ \text{I sur la bissectrice de } \hat{C} & \Longrightarrow & IM = IN\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad IP = IN.$$

Le point I, intérieur à $\widehat{BAC}$, équidistant des deux côtés de cet angle est sur la bissectrice intérieure de $\hat{A}$.

■ **Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.**

Soit By' et Cz' les demi-droites portées par les bissectrices extérieures des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$, situées la première dans le demi-plan limité par la droite AB contenant C, la deuxième dans le demi-plan limité par la droite AC contenant B. On a :

$$\widehat{CBy'} = 1\text{D} - \frac{\hat{B}}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{BCz'} = 1\text{D} - \frac{\hat{C}}{2}.$$

$$\widehat{CBy'} + \widehat{BCz'} = 2\text{D} - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}.$$

$$\widehat{CBy'} + \widehat{BCz'} < 2\text{D}.$$

Les deux demi-droites se coupent en un point J qui est situé à la fois dans le demi-plan limité par AB contenant C et dans le demi-plan limité par AC contenant B, donc intérieur à $\widehat{BAC}$. Si M′, N′, P′ sont

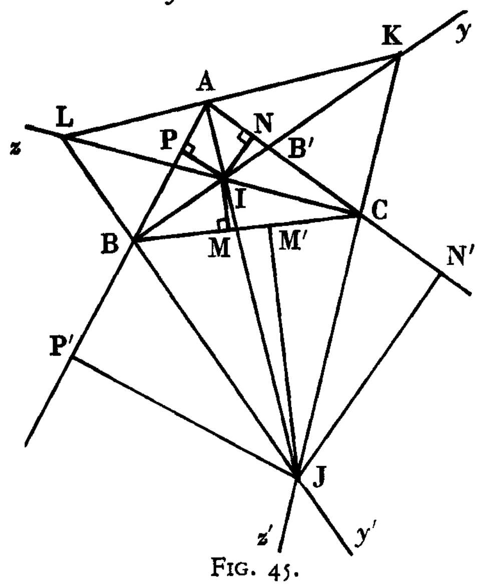


FIG. 45.

les pieds des perpendiculaires tracées de J à BC, CA et AB, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\text{J sur la bissectrice de } \widehat{B} \implies JM' = JP' \\ \text{J sur la bissectrice de } \widehat{C} \implies JM' = JN'\end{array}\right\} \implies JP' = JN'.$$

Le point J est sur la bissectrice intérieure de l'angle A.

- **Deux bissectrices extérieures d'un triangle et la bissectrice intérieure du troisième sommet sont concourantes.**

Les points I, J, K, L sont équidistants des côtés du triangle.

Les droites AI et LK sont les deux bissectrices de l'angle A, elles sont perpendiculaires, de même : $BI \perp LJ$ et $CI \perp KJ$.

Les points I, J, K, L sont les sommets d'un quadrangle orthocentrique.

Exercices. 431. — Soit un triangle ABC dans lequel BC = 2 AC. On trace la médiane AD. Soit E le milieu de DC et F le milieu de AC. Les droites AE et DF se coupent en O.

1° Démontrer que le triangle ADO est isocèle.

2° En déduire que AD est bissectrice de l'angle $\widehat{BAE}$.

432. — Soit un triangle ABC, dans lequel I, J, K sont les milieux des côtés respectifs BC, CA et AB. La droite AI coupe KJ en A'.

1° Démontrer que A' est le milieu de KJ.

2° Démontrer que les triangles ABC et KIJ ont même centre de gravité.

433. — Démontrer que le fait d'avoir deux médianes égales caractérise le triangle isocèle.

434. — Trois droites concourantes données peuvent-elles être considérées comme les supports des trois hauteurs d'un triangle? Même problème pour les médiatrices, les médianes, les bissectrices.

435. — 1° Que peut-on dire d'un triangle dans lequel le point de concours des médiatrices coïncide avec le centre de gravité?

2° Même question si le point de concours des médiatrices coïncide avec le point de concours des bissectrices intérieures.

436. — Soit un triangle ABC, et AH la hauteur issue de A. On trace les perpendiculaires HM et HN sur AB et AC et on prolonge ces deux segments de : MB' = HM et NC' = HN. La droite B'C' coupe AB en D et AC en E.

1° Démontrer que AB et AC sont deux bissectrices du triangle HDE.

Qu'en déduire pour AH relativement à DHE?

2° En conclure que les droites BE, CD, AH sont concourantes.

437. — Ensemble des milieux des segments de droite compris entre deux droites parallèles données.

438. — Deux droites sécantes données se coupent en A et sont coupées respectivement en B et C par une droite variable. Étudier l'ensemble des points d'intersection des bissectrices des angles de sommets B et C du triangle ABC.

439. — Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC et une droite passant par G. Démontrer :

1° que la somme des distances de deux sommets qui sont d'un côté de cette droite est égale à la distance de l'autre sommet à la droite;

2° que la distance de G à l'une des projections d'un sommet sur la droite est égale à la somme des distances de G aux deux autres projections.

Exercices.

PROBLÈMES

440. — 1° Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les 4 médiatrices des côtés d'un quadrilatère convexe soient concourantes est que 3 de ces médiatrices soient concourantes. Que peut-on dire alors des médiatrices des diagonales?

2° Aurait-on les mêmes conclusions, si on avait pris comme médiatrices concourantes celles de deux côtés et d'une diagonale? celles de deux diagonales et d'un côté?

3° Si, en outre, les diagonales sont perpendiculaires et les médiatrices des côtés non concourantes, démontrer qu'il ne peut pas y en avoir 3 concourantes.

441. — Soit un triangle ABC, rectangle en A, AH la hauteur, AD bissectrice de $\widehat{HAB}$, AE bissectrice de $\widehat{HAC}$, démontrer :

1° $\widehat{EAD} = 45°$;

2° $CD = AC$ et $BE = AB$.

442. — Soit un triangle ABC. On trace les bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Démontrer que les pieds des perpendiculaires de A sur ces quatre droites sont alignés sur une parallèle à BC.

443. — Étant donné un triangle équilatéral ABC on construit sur BC, du même côté que le triangle, un carré BCDE et sur AC du côté opposé au triangle un carré ACIK.

1° Calculer les angles des triangles ABE, ACI, BCD, BAK.

2° Démontrer que les points E, A, I sont alignés ainsi que les points B, D, K.

3° Calculer un des angles de AE et BD.

444. — Que peut-on dire d'un triangle dans lequel les bissectrices extérieures sont parallèles aux côtés opposés?

445. — Étant donné un carré ABCD, on construit sur AB, à l'intérieur du carré, le triangle équilatéral ABE et sur BC à l'extérieur du carré le triangle équilatéral BCF.

1° Calculer les angles des triangles ADE et DCF.

2° Étudier la disposition des trois points D, E, F.

446. — Soit un parallélogramme dans lequel $AB = 2\,BC$ (AB et BC sont deux côtés consécutifs). Démontrer que les droites qui joignent A et B au milieu M de CD sont rectangulaires.

447. — On joint les sommets opposés B et D d'un parallélogramme aux points E et F qui partagent AC en trois parties égales.

1° Démontrer que DEBF est un parallélogramme qui a même centre que le premier;

2° les côtés de ce nouveau parallélogramme passent par les milieux des côtés du premier.

448. — On trace du pied H de la hauteur issue de A du triangle ABC rectangle en A les perpendiculaires HD sur AB et HE sur AC. Démontrer que :

1° $DE = AH$;

2° DE est perpendiculaire à la médiane AM.

449. — 1° On donne deux points A et B d'un même côté d'une droite (D). Trouver un point M sur (D) tel que le chemin AMB soit minimum.

2° On donne un angle et deux points A et B à son intérieur. Joindre ces deux points par une ligne brisée de longueur minimum, les sommets de cette ligne étant sur les côtés de l'angle.

450. — 1° Démontrer que la somme des diagonales d'un quadrilatère convexe est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre du quadrilatère.

2° Établir que le point de rencontre des diagonales est le point du plan dont la somme des distances aux quatre sommets est la plus petite possible.

451. — 1° On considère un triangle ABC de côtés a, b, c et la médiane $AM = m$. Démontrer que l'on a :

$$b + c - a < 2m < b + c.$$

2° Comparer la somme des médianes au périmètre et au demi-périmètre.

452. — On appelle distance d'un point M à un segment AB, la plus petite distance du point M à un point du segment AB.

1° Le segment AB étant donné, quelle est suivant la position de M dans le plan la distance de M au segment AB?

2° On donne deux segments égaux AB et AC dont les supports sont perpendiculaires. Quel est l'ensemble des points équidistants des deux segments?

LIVRE III

LE CERCLE

■

CHAPITRE V

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

I. DÉFINITIONS. ARCS ET CORDES. ANGLES AU CENTRE

75. Définition du cercle. — Si on se donne un point O et une longueur R, tout point M du plan satisfait l'une des conditions suivantes, l'une excluant les deux autres :

$$OM = R.$$
$$OM < R.$$
$$OM > R.$$

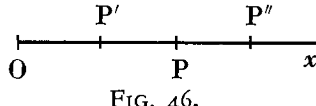


FIG. 46.

Il existe des points des trois classes, puisque sur toute demi-droite Ox, il y a un point P et un seul tel que : $OP = R$; tout point P' entre O et P est tel que : $OP' < R$, tout point P'' de la demi-droite Px (*Fig. 46*) est tel que :

$$OP'' > R.$$

☆ DÉFINITIONS. — 1. **L'ensemble des points M du plan, tels que OM = R, est le cercle (C) de centre O et de rayon R.**

$$M \in (C) \iff OM = R.$$

2. L'ensemble des points M du plan tels que OM < R est l'intérieur du cercle (C).

Le centre O du cercle (C) appartient à l'intérieur du cercle.

3. L'ensemble des points M du plan tels que OM > R est l'extérieur du cercle (C).

4. La réunion du cercle (C) et de l'intérieur du cercle (C), constitue le disque (D) de centre O et de rayon R. Le cercle (C) est la frontière du disque (D).

$$M \in (D) \iff OM \leqslant R.$$

5. Soit (d) une droite passant par O. Sur chacune des demi-droites définies sur (d) par O, il existe un point et un seul du cercle. On obtient ainsi un segment AB dont les extrémités sont sur le cercle et dont le milieu est O; un tel segment est un **diamètre** et on a $AB = 2R$. Le mot diamètre est quelquefois pris dans le sens de droite passant par le centre.

Il en résulte que le centre O du cercle est le seul point du plan équidistant de tous les points du cercle. Si O' était un tel point distinct de O, on aurait sur la droite OO' les points A et B tels que :

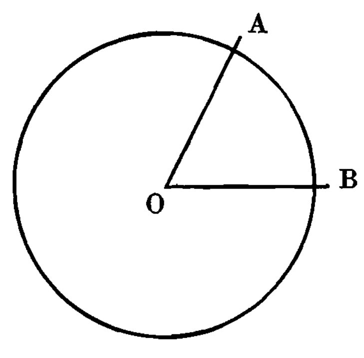


Fig. 47.

$$OA = OB \quad \text{et} \quad O'A = O'B.$$

Un segment n'ayant qu'un milieu, les points O et O' sont confondus.

6. Si A et B sont deux points d'un cercle (C), le segment AB est appelé une **corde** du cercle.

7. Si A et B sont deux points d'un cercle (C), l'angle saillant $\widehat{AOB}$ ou rentrant $\overset{\smile}{AOB}$ est appelé **angle au centre** (*Fig. 47*).

8. Si A et B sont deux points du cercle (C), de centre O, puisque sur toute demi-droite d'origine O, il y a un point du cercle et un seul, nous pouvons répartir les points du cercle en 3 classes :

a. — Les points A et B.

b. — Les points M du cercle tels que le segment OM soit intérieur à l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

c. — Les points M du cercle tels que OM soit extérieur à l'angle $\widehat{AOB}$.

L'ensemble formé par les points A et B et les points classés *b*, est l'**arc** $\overset{\frown}{AB}$ du cercle (C). Nous dirons que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est **intercepté** par l'angle au centre $\widehat{AOB}$; que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est **sous-tendu** par la corde AB et que la corde AB sous-tend l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Lorsque AB est un diamètre, l'angle au centre est un angle plat. Dans chaque demi-plan d'arête AB, on a un **demi-cercle** de diamètre AB.

L'ensemble des points A et B et les points classés *c* pouvant être considérés comme intérieurs à l'angle rentrant $\overset{\smile}{AOB}$, nous dirons par extension que cet ensemble est l'arc $\overset{\smile}{AB}$ intercepté par $\overset{\smile}{AOB}$.

9. Nous dirons que deux cercles de même rayon sont **égaux**.

76. Étude des arcs.

1. Égalité et inégalité. — **Sur un même cercle ou sur des cercles égaux, on dit que deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ sont égaux, ce que nous écrivons $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, pour exprimer que les angles au centre correspondants sont égaux.**

De même, nous dirons que $\overset{\frown}{AB}$ est plus grand que $\overset{\frown}{CD}$, ce que nous écrirons $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$, pour exprimer que $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$.

Autrement dit, nous avons, par définition, les équivalences :

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \iff \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}.$$

$$\widehat{AOB} > \widehat{COD} \iff \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}.$$

Il en résulte que l'égalité et l'inégalité des arcs possèdent les propriétés de l'égalité et de l'inégalité des angles.

2. Somme d'arcs. — Soit deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ situés sur un même cercle ou sur des cercles de même rayon R, soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ leurs angles au centre. Soit alors sur un cercle de centre O et de rayon R, deux points E et F tels que :

$$\widehat{EOF} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}, \qquad \text{ou} \qquad \overset{\smile}{EOF} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}.$$

Par définition :

$$\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}, \qquad \text{ou} \qquad \overset{\smile}{EF} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}.$$

3. Milieu d'un arc. — Soit, sur un cercle de centre O, un arc $\overset{\frown}{AB}$. Sur la bissectrice Oz de $\widehat{AOB}$ il existe un point I du cercle et un seul, appartenant d'ailleurs à $\overset{\frown}{AB}$, et on a :

$$\widehat{AOI} = \widehat{IOB} \iff \overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{IB}.$$

Le point I est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

4. Mesure des arcs. — Nous définirons d'abord le rapport de deux arcs, comme le rapport des angles au centre correspondants, puis l'unité d'arc : le quadrant, arc intercepté par un angle droit. Il en résulte que le nombre qui mesure l'arc est le même que celui qui mesure l'angle.

On emploie pour les arcs les mêmes subdivisions que pour les angles :

Le *degré*, soixantième partie du quadrant, divisé lui-même en 60 minutes, et chaque minute en 60 secondes. On utilise également le dixième de degré.

Le *grade*, centième partie du quadrant, puis les unités décimales correspondantes : décigrade, centigrade, milligrade.

On peut, comme pour les angles, généraliser les sommes d'arcs. A et B étant deux points d'un cercle, l'unité d'arc étant le grade, on a :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\smile}{AB} = 400 \text{ gr}.$$

$\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\smile}{AB}$ sont dits des arcs *adjoints*.

77. Comparaison des arcs et des cordes. — Il s'agit toujours d'arcs situés sur un même cercle, ou sur des cercles égaux, et de plus dans ce paragraphe, d'arcs inférieurs à deux quadrants.

1. Soit $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$, donc $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$. Les triangles AOB et A'OB' ayant $AO = A'O$; $BO = B'O$, nous donnent l'équivalence :

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \iff AB = A'B', \text{ et par suite :}$$

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \iff AB = A'B' \quad \text{d'où :}$$

▪ THÉORÈME. — **Sur un cercle, ou sur des cercles égaux, des cordes égales sous-tendent des arcs égaux et réciproquement.**

2. Si $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$, les triangles AOB et A'OB' donnent (nº 55)

$$\widehat{AOB} > \widehat{A'OB'} \iff AB > A'B', \quad \text{d'où}$$

▪ THÉORÈME. — **Sur un cercle, ou sur des cercles égaux, si deux cordes sont inégales, les arcs sous-tendus sont inégaux, la plus grande corde sous-tend le plus grand arc et réciproquement.**

3. Soit deux cordes AB et A'B', H et H' les pieds respectifs des perpendiculaires de O sur AB et A'B'; les triangles AOB et A'OB' sont isocèles et :

$$AH = \frac{AB}{2}; \qquad A'H' = \frac{A'B'}{2}.$$

Si $AB = A'B'$, les triangles rectangles AOH et A'OH' ont :

$OA = OA'$, $AH = A'H'$, ils sont égaux et $OH = OH'$.

Si $OH = OH'$, les triangles rectangles AOH et A'OH' ont :

$OA = OA'$, $OH = OH'$, ils sont égaux et $AB = A'B'$.

▪ THÉORÈME. — **Deux cordes égales sont équidistantes du centre et réciproquement : $AB = A'B' \iff OH = OH'$.**

4. Si $AB \neq A'B'$ on a : $OH \neq OH'$. Supposons (*Fig. 48*), $AB > A'B'$; il en résulte $\widehat{AOB} > \widehat{A'OB'}$ donc $\widehat{AOH} > \widehat{A'OH'}$.

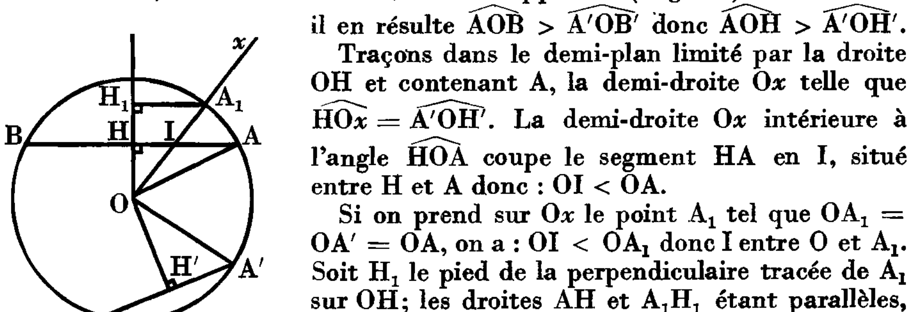


FIG. 48.

Traçons dans le demi-plan limité par la droite OH et contenant A, la demi-droite Ox telle que $\widehat{HOx} = \widehat{A'OH'}$. La demi-droite Ox intérieure à l'angle $\widehat{HOA}$ coupe le segment HA en I, situé entre H et A donc : $OI < OA$.

Si on prend sur Ox le point A_1 tel que $OA_1 = OA' = OA$, on a : $OI < OA_1$ donc I entre O et A_1. Soit H_1 le pied de la perpendiculaire tracée de A_1 sur OH; les droites AH et A_1H_1 étant parallèles, le point H est entre O et H_1 donc :

$$OH < OH_1.$$

Les triangles rectangles A_1OH_1 et $A'OH'$ ayant :

$$OA_1 = OA' \quad \text{et} \quad \widehat{A_1OH} = \widehat{A'OH'}$$

sont égaux et : $OH_1 = OH'$.
On a donc : $OH < OH'$.

Réciproquement supposons $OH < OH'$. Les théorèmes ci-dessus donnent :

$$AB = A'B' \implies OH = OH'.$$
$$AB < A'B' \implies OH > OH'.$$

On a donc : $OH < OH' \implies AB > A'B'$.

▪ THÉORÈME. — **Si deux cordes sont inégales, elles sont inégalement distantes du centre, la plus grande est la plus près du centre et réciproquement.**

$$\mathbf{AB > A'B' \iff OH < OH'}.$$

78. Cordes parallèles. — Soit AB et A'B' deux cordes parallèles d'un cercle (C) de centre O, aucune n'étant un diamètre.

Soit H et H' les milieux respectifs de AB et A'B' ; les points O, H, H' sont alignés.

Si H est entre O et H' on a (*Fig. 49*) :

$$\widehat{AOA'} = \widehat{AOH} - \widehat{A'OH}.$$
$$\widehat{BOB'} = \widehat{BOH} - \widehat{B'OH}.$$

Donc : $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} \implies \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}$.

FIG. 49.

Si H' entre O et H, un raisonnement analogue donne le même résultat.

Si O entre H et H' (*Fig. 50*), on a :

$$\widehat{AOA'} = 2\text{D} - (\widehat{AOH} + \widehat{A'OH'}).$$
$$\widehat{BOB'} = 2\text{D} - (\widehat{BOH} + \widehat{B'OH'}).$$

Donc : $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} \implies \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}$.

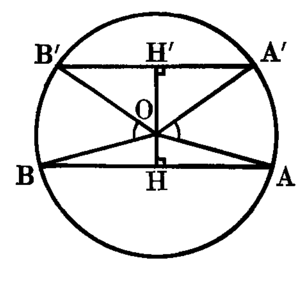


FIG. 50.

Si AB par exemple est un diamètre, on a :

$$\widehat{AOA'} = 1\text{D} - \widehat{A'OH'}$$
$$\widehat{BOB'} = 1\text{D} - \widehat{B'OH'}, \text{ donc}$$
$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} \implies \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}$$

▪ THÉORÈME. — **Si deux cordes AB et A'B' d'un cercle sont parallèles, les arcs $\overset{\frown}{AA'}$ et $\overset{\frown}{BB'}$ sont égaux :**

$$\mathbf{AB \parallel A'B' \implies \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}}.$$

79. Comparaison des segments joignant un point du plan aux différents points d'un cercle. — Soit un cercle (C), de centre O et de rayon R et un point M quelconque du plan distinct de O (*Fig. 51*). Sur la droite OM il y a deux points du cercle : soit A celui qui se trouve sur la demi-droite d'origine O contenant M, soit B l'autre. On a quel que soit M :

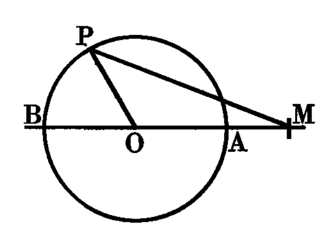


FIG. 51.

$$MB = MO + OB = MO + R.$$
$$MA = |MO - OA| = |MO - R|.$$

Soit P un point quelconque du cercle distinct de A et B; le triangle OMP est propre et :

$$|MO - OP| < MP < MO + OP.$$
$$|MO - R| < MP < MO + R.$$

Soit : $$MA < MP < MB.$$

- THÉORÈME. — **Les plus grande et plus petite distances d'un point M à un point d'un cercle, sont les distances du point M aux deux extrémités du diamètre qui passe par M.**

Exercices. **453.** — On donne un cercle et deux points A et B non sur le cercle. Tracer une corde passant par A, dont les extrémités soient équidistantes de B.

454. — On donne un point intérieur à un cercle. Existe-t-il une corde dont ce point est le milieu?

455. — Deux cordes quelconques d'un cercle peuvent-elles se couper mutuellement en leur milieu?

456. — Par deux points A et B extrémités d'un diamètre d'un cercle (C) on trace deux cordes parallèles AA′ et BB′. Démontrer que A′B′ est un diamètre.

457. — Comparer deux cordes d'un cercle qui sont également inclinées sur le diamètre qui passe par leur point commun. Étudier une réciproque.

458. — On donne un point intérieur à un cercle. Tracer par ce point la corde la plus petite possible.

459. — Sur un cercle de centre O, on marque deux arcs égaux $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$. On trace de C la parallèle à OB qui coupe le cercle en D. Montrer que A, O, D sont alignés.

460. — On considère un arc et sa corde. On double l'arc. La corde est-elle doublée? Est-elle supérieure ou inférieure au double de la première corde?

461. — Deux cordes AB et CD d'un cercle sont parallèles. Comparer les cordes AC et BD, puis AD et BC.

462. — Un ensemble (E) de points est dit convexe si : $A \in (E)$, $B \in (E)$ tout point du segment AB appartient à (E).
Démontrer qu'un disque (D) est un ensemble convexe. Exercices.

II. POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

80. Positions relatives d'une droite et d'un cercle. — Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R, et une droite (D). Soit H le pied de la perpendiculaire de O sur (D). Trois cas sont possibles et trois seulement.

1. $OH > R$. Le point H est extérieur au cercle. Si M est un point quelconque de (D), on a :

$$OM \geqslant OH, \quad \text{donc} \quad OM > R.$$

Tout point de la droite (D) est extérieur au cercle. Nous dirons que (D) est **extérieure** au cercle.

2. $OH = R$. Le point H est sur le cercle. Si M est un point quelconque de (D) distinct de H, on a :

$$OM > OH, \quad \text{donc :} \quad OM > R.$$

Tout point de (D), distinct de H, est extérieur au cercle; le point H est sur le cercle. Nous dirons que (D) est **tangente** au cercle.

3. $OH < R$. Le point H est intérieur au cercle (*Fig. 52*). Soit Hx et Hx' les deux demi-droites définies sur (D) par H. Sur Hx prenons un point K tel que $HK > R$.

Si O et H sont confondus, on a $OK > R$, le point K est extérieur au cercle.

Si O et H sont distincts, le triangle OHK est rectangle en H et :

$$OK > HK \implies OK > R.$$

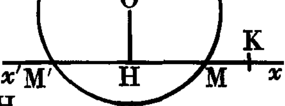


FIG. 52.

Dans tous les cas, il existe sur (D) un point H intérieur au cercle et un point K extérieur au cercle. Nous admettrons comme un **axiome**, qu'il existe un point M du segment HK, sur le cercle.

Ce point est unique, car pour tout point M_1 entre H et M on a :

$$OM_1 < OM \implies OM_1 < R;$$

et pour tout point M_1 entre M et K :

$$OM_1 > OM \implies OM_1 > R.$$

Il existe sur Hx un point M situé sur le cercle. Tout point entre H et M est intérieur au cercle; tout point de Mx, distinct de M, est extérieur au cercle.

De même, il y a sur Hx' un point M' et un seul sur le cercle, ce point est tel que : $HM' = HM$.

Donc, si $OH < R$, la droite (D) a deux points communs et deux seulement avec le cercle. Nous dirons que cette droite est **sécante** au cercle.

81. Étude des réciproques. — Nous venons de voir qu'une droite (D) ne peut être qu'extérieure, tangente ou sécante au cercle (C).

Si (D) est extérieure à (C) : on ne peut avoir $OH = R$, car (D) serait tangente à (C); ni $OH < R$ car (D) serait sécante; on a donc $OH > R$.

En raisonnant de même pour une sécante ou une tangente, on a les équivalences :

$$OH > R \iff \text{(D) extérieure au cercle (C).}$$
$$OH = R \iff \text{(D) tangente au cercle (C).}$$
$$OH < R \iff \text{(D) sécante au cercle (C).}$$

82. Tangentes au cercle.

☆ DÉFINITION. — **On dit qu'une droite (D) est tangente à un cercle (C), de centre O et de rayon R, pour exprimer que la distance OH du point O à la droite (D) est égale au rayon R.**

Conséquences. 1. En tout point M du cercle, il existe une tangente au cercle, perpendiculaire en M à OM. Le point M est le point de **contact** de la tangente.

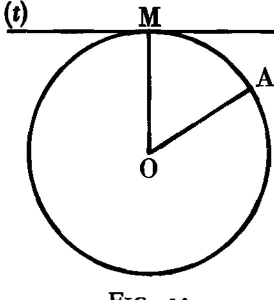


Fig. 53.

2. Soit A un point du cercle (C) distinct de M. Soit (*t*) la tangente en M au cercle. (*Fig. 53*). Aucun point du segment OA n'appartient à (*t*), car tout point P de (*t*) est tel que $OP > OA$. C'est dire que O et A sont du même côté de (*t*) :

Tous les points du cercle sont dans le demi-plan limité par une tangente quelconque et contenant le centre. On dit alors que le cercle est une **courbe convexe.**

Exercices. 463. — On donne un triangle ABC rectangle en A, l'angle $\hat{C}$ vaut 60° et $BC = 4$ cm.

1° Quel doit être le rayon d'un cercle de centre C pour qu'il soit tangent à AB?

2° Quel doit être le rayon d'un cercle de centre C pour qu'il coupe AB entre A et B?

464. — On trace d'un point M d'un cercle de centre O la perpendiculaire MC à la tangente en un point A du cercle. Montrer que MA est bissectrice de l'angle $\widehat{OMC}$.

465. — Une droite coupe deux cercles concentriques. Étudier les segments définis sur cette droite par les deux cercles.

466. — Soit un cercle de centre O, un point M sur la tangente en A à ce cercle. La perpendiculaire tracée de A sur OM, recoupe le cercle en P. Démontrer que la droite MP est tangente au cercle. **Exercices.**

III. POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

83. Positions relatives de deux cercles. — Soit deux cercles non égaux (C) et (C′), de centres O et O′, de rayons R et R′. Nous supposons $R > R'$.

Si O et O′ sont confondus, les cercles sont dits **concentriques.** Puisque $R' < R$ tout point de (C′) est intérieur à (C), tout point de (C) est extérieur à (C′).

Si O et O′ sont distincts, la droite OO′ coupe (C) en A et B et (C′) en A′ et B′. Soit A le point situé sur la demi-droite d'origine O contenant O′ et A′ le point situé sur la demi-droite d'origine O′ contenant O. On a (*Fig. 54*), en posant $OO' = d$:

FIG. 54.

$$OB' = d + R'; \qquad OA' = |d - R'|;$$
$$O'A = |d - R|; \qquad O'B = d + R.$$

En utilisant la distance d'un point à un point quelconque d'un cercle, (nº 79) on peut écrire :

$$M \in (C) \quad \forall M \qquad O'A \leqslant O'M \leqslant O'B.$$
$$M' \in (C') \quad \forall M' \qquad OA' \leqslant OM' \leqslant OB'.$$

Étudier les positions relatives des deux cercles c'est situer un point M′ quelconque de (C′) par rapport à (C), et un point M quelconque de (C) par rapport à (C′).

On voit apparaître les cas particuliers suivants :

1. $OB' < R$, soit : $d + R' < R$

ou : $d < R - R'$.

On a : $M' \in (C') \ \forall M' \quad OM' \leqslant OB' < R$.

Tout point de (C′) est intérieur à (C).

On a aussi : $R - d > R'$,

donc $O'A > R'$,

donc : $M \in (C) \ \forall M \quad O'M \geqslant O'A > R'$.

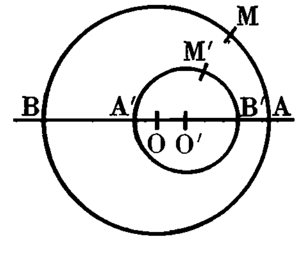


FIG. 55.

Tout point de (C) est extérieur à (C′) (*Fig. 55*).

☆ DÉFINITION. — **On dit que le cercle (C′) est intérieur au cercle (C) pour exprimer que tous les points de (C′) sont intérieurs à (C).**

▪ THÉORÈME. — **Si $d < R - R'$, le cercle (C′) est intérieur au cercle (C).**

2. $OA' > R$, soit $|d - R'| > R$. En remarquant que $R' - d > R$, donnerait $R' > R + d$, donc incompatible avec l'hypothèse $R' < R$; on a : $d - R' > R$ soit : $d > R + R'$. On a alors (*Fig. 56*) :

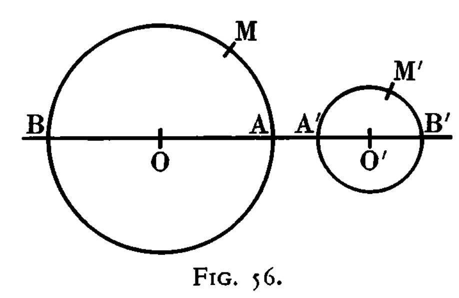


Fig. 56.

$M' \in (C')$ $\forall M'$ $OM' \geqslant OA' > R$.

Tout point de (C') est extérieur à (C).

On a aussi $d - R > R'$ puisque $d > R + R'$. Donc $O'A > R'$ et :

$M \in (C)$ $\forall M$ $O'M \geqslant O'A > R'$.

Tout point de (C) est extérieur à (C').

☆ DÉFINITION. — **On dit que deux cercles (C) et (C') sont extérieurs pour exprimer que tout point de chacun d'eux est extérieur à l'autre.**

■ THÉORÈME. — **Si $d > R + R'$, les cercles (C) et (C') sont extérieurs.**

Remarque. — La distance des centres d pouvant prendre toutes les valeurs possibles, il nous reste à étudier :

$$R - R' \leqslant d \leqslant R + R'.$$

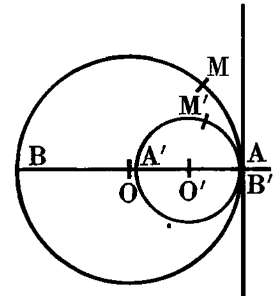


Fig. 57.

3. $d = R - R'$, ou $d + R' = R$ (*Fig. 57*). Le point B' est confondu avec A sur le cercle (C). On a donc $OB' = OA = R$ et $O'B' = O'A = R'$. Par suite :

$M' \in (C')$, M' distinct de B', $\forall M'$
$OM' < OB'$ ou $OM' < R$.

$M \in (C)$, M distinct de A, $\forall M$
$O'M > O'A$ ou $O'M > R'$.

☆ DÉFINITION. — **On dit que deux cercles (C) et (C') sont tangents intérieurement, pour exprimer qu'ils sont tangents à une droite en un point de cette droite et qu'ils sont du même côté de cette droite.**

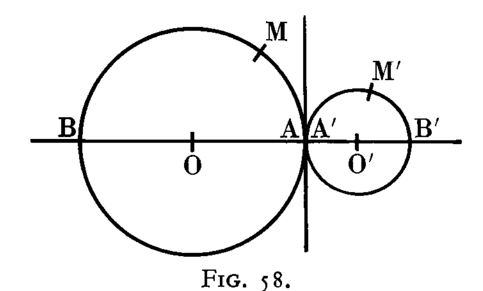


Fig. 58.

■ THÉORÈME. — **Si $d = R - R'$, les cercles (C) et (C') sont tangents intérieurement.**

Les deux cercles ont, en effet, pour tangente en B', la perpendiculaire en B' à OO' et les deux points O et O' sont du même côté de B'. Le

point B′ est le point de **contact** des deux cercles, la tangente en B′ une **tangente commune** aux deux cercles.

4. $d = R + R'$, ou $d - R' = R$ (*Fig. 58*). Le point A′ est sur le cercle (C), confondu avec A, *on a* :

$M' \in (C')$, M′ distinct de A′,	$\forall M'$	$OM' > OA$	ou	$OM' > R$.
$M \in (C)$, M distinct de A,	$\forall M$	$O'M > O'A'$	ou	$O'M > R'$.

☆ DÉFINITION. — **On dit que deux cercles (C) et (C′) sont tangents extérieurement pour exprimer qu'ils sont tangents à une droite en un point de cette droite et qu'ils sont de part et d'autre de cette droite.**

▪ THÉORÈME. — **Si $d = R + R'$, les cercles (C) et (C′) sont tangents extérieurement.**

5. $R - R' < d < R + R'$ (*Fig. 59*). Il résulte de cette condition :

$$OB' = d + R' > R.$$

Si $d > R'$, on a : $OA' = d - R' < R$
Si $d < R'$, on a : $OA' = R' - d$, mais $R' < R$, donc $OA' < R - d < R$.
Dans tous les cas : $OA' < R$.

Le point A′ est intérieur au cercle (C) et le point B′ est extérieur au cercle (C). Nous admettons, comme un axiome, que dans un demi-plan limité par OO′, il y a un point D du demi-cercle de diamètre A′B′ qui appartient à (C).

Ce point est unique, car s'il y avait dans ce demi-plan un second point D′, les triangles OO′D et OO′D′ ayant :

OO' commun, $OD = OD'$ et $O'D = O'D'$,

seraient égaux et par suite D et D′ seraient confondus.

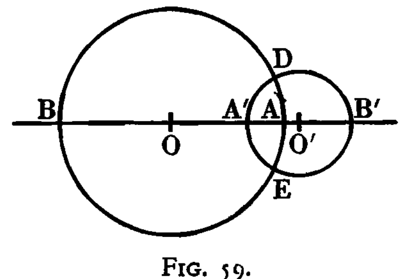


FIG. 59.

De même dans l'autre demi-plan, il existe un point E et un seul commun aux deux cercles. Puisque :

$$OD = OE \qquad \text{et} \qquad O'D = O'E,$$

la droite OO′ est la médiatrice de DE.

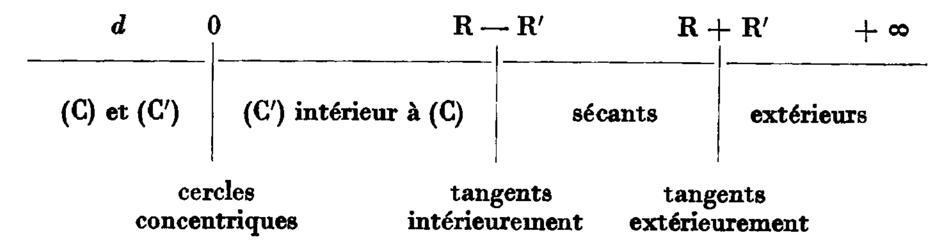
☆ DÉFINITION. — **On dit que deux cercles sont sécants pour exprimer qu'ils ont deux points communs.**

■ **THÉORÈME. — Si $R - R' < d < R + R'$, les deux cercles (C) et (C′) sont sécants.**

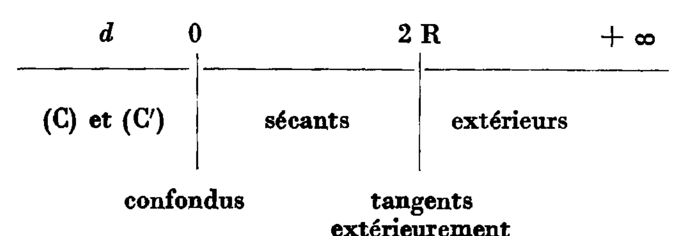
REMARQUE. — Il résulte de ce qui précède que deux cercles ne peuvent avoir plus de deux points communs. Nous énoncerons :

■ **THÉORÈME. — Deux cercles qui ont trois points communs coïncident.**

Le tableau ci-dessous résume les positions relatives de deux cercles (C) et (C′) lorsque $R > R'$.



84. Cas particulier où $R = R'$. — Lorsque les deux cercles sont égaux, on obtient sans difficulté :



85. Étude des réciproques. — Elles se démontrent comme au n° 81. Supposons par exemple que deux cercles (C) et (C′) soient sécants :

$d < R - R' \implies$ (C′) intérieur à (C).
$d = R - R' \implies$ (C) et (C′) tangents intérieurement.
$d = R + R' \implies$ (C) et (C′) tangents extérieurement.
$d > R + R' \implies$ (C) et (C′) extérieurs.

On a donc : $R - R' < d < R + R'$.

86. Conséquence. — Nous avons vu (n° 53) que dans tout triangle ABC :

$$|b - c| < a < b + c.$$

Réciproquement, si trois longueurs a, b, c sont telles que

$$|b - c| < a < b + c,$$

les cercles de rayons b et c, dont la distance des centres est a, sont sécants. Si O et O′ sont les centres, A et B les points d'intersection, les deux triangles OAO′ et OBO′ sont égaux. On peut énoncer :

- THÉORÈME. — **Si trois longueurs sont telles que l'une d'elles est comprise entre la somme et la différence des deux autres, il existe un triangle dont les trois côtés ont respectivement pour mesures ces trois longueurs.**

Pratiquement cette conclusion autorise à discuter l'intersection de deux cercles sans faire jouer nécessairement à d un rôle dissymétrique.

87. Exemple. — *Discuter la position relative des deux cercles définis par* $d = 3x$, $R = 4x - 3$, $R' = 2x - 1$, *où* x *est un nombre entier positif.*

Remarquons que :

Si $x = 1$ $\quad R = R' = 1 \quad d = 3$. Les cercles sont extérieurs.

$R - R' = 2x - 2$ donc $R > R'$, si $x > 1$, $\quad R + R' = 6x - 4$,

On a :

$$R + R' - d = 3x - 4 > 0, \quad \text{pour tout entier} \quad x \geqslant 2$$
$$d - (R - R') = x + 2 > 0.$$

Par suite : $\quad x \geqslant 2 \implies R - R' < d < R + R'$.

Les cercles sont sécants.

88. Cas de deux disques. — Soit deux disques (D) et (D′) dont les frontières sont deux cercles (C) et (C′) de centres O et O′, de rayons R et R′ ; $R \geqslant R'$. Posons $OO' = d$.

1. Les deux cercles (C) et (C′) sont extérieurs. Si M′ un point du disque (C′). Le triangle (propre ou impropre) OM′O′ donne (*Fig. 60*) :

$$OM' \geqslant OO' - O'M'.$$

Puisque M′ appartient au disque (C′) :

$$O'M' \leqslant R' \implies d - O'M' \geqslant d - R'.$$

FIG. 60.

Comme par hypothèse : $d - R' > R$, $\quad$ on a : $\quad OM' > R$.

Tout point du disque (C′) est extérieur au cercle (C). On verrait de même que tout point du disque (C) est extérieur au cercle (C′). Les deux disques sont donc extérieurs l'un à l'autre.

2. Le cercle (C′) est intérieur au cercle (C). Soit (*Fig. 61*) M′ un point du disque (C′).

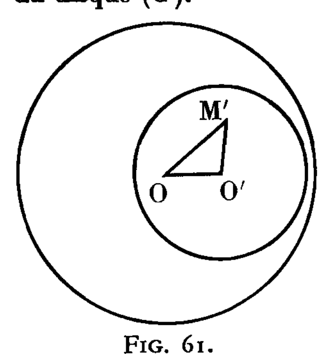


FIG. 61.

Le triangle propre ou impropre OM′O′, donne :

$$OM' \leqslant OO' + O'M'.$$

Comme $OO' = d$, et $O'M' \leqslant R'$, avec $d < R - R'$, il vient :

$$OM' \leqslant d + R' < R.$$

Nous pouvons énoncer :

Si un cercle (C′) est intérieur à un cercle (C) tout point du disque (D′) appartient au disque (D). Le disque (D′) est donc intérieur au disque (D).

On étendra sans difficultés ces résultats aux cas où les cercles (C) et (C′) sont tangents.

Exercices. 467. — Deux cercles ont pour rayons 2 cm et 3 cm. La distance de leurs centres est d variable. Dire, suivant les valeurs de d, la position relative des deux cercles.

468. — Un cercle (C) a pour rayon 5 cm. Un point A est à 2 cm de son centre. On considère le cercle (C′) de centre A et de rayon R. Dire, suivant les valeurs de R, la position relative des deux cercles.

469. — Deux cercles concentriques ont pour rayons 2 cm et 5 cm. Comment faut-il choisir la distance de leur centre O à un point A pour que le cercle de centre A et de rayon 4 cm soit sécant à ces deux cercles?

470. — Deux cercles se coupent en A et B; soit AA′ et AA″ les diamètres qui passent par A. Démontrer que A′A″ passe par B et que la distance A′A″ est le double de la distance des centres.

471. — Si, par le point de contact de deux cercles tangents on trace une droite quelconque, celle-ci coupe les deux cercles en deux autres points où les tangentes sont parallèles.

472. — Soit $R > 5$, $R' = 5$, $d = 2\,(R - 5)$. Discuter la position relative des cercles de rayons R et R′, dont la distance des centres est d.

473. — Soit x un nombre positif inférieur à 3. Comment choisir ce nombre pour qu'on puisse construire un triangle avec les trois longueurs : 5, $3 + x$, $3 - x$?

474. — Comment choisir $x > 0$, pour qu'on puisse construire un triangle avec les longueurs :

$$12, \quad 5, \quad 4 + x?$$

475. — 1° Tracer deux cercles dont les centres O et O′ sont à une distance $OO' = d = 2\ cm$, et dont les rayons respectifs sont $r = 2{,}5\ cm$ et $r' = 1\ cm$. Discuter leur position.

2° Où faut-il placer sur la droite OO′ le centre C d'un troisième cercle de rayon $R = 3{,}5$ cm pour qu'il coupe (O), ou pour que le cercle (O′) soit intérieur au cercle (C), ou pour que les deux conditions précédentes soient réalisées simultanément?

Exercices.

PROBLÈMES

476. — On donne un cercle de centre O et une corde DE de ce cercle. On prolonge ED d'un segment DC égal au rayon du cercle. On joint CO qui coupe le cercle en A et B (A entre O et C).

1° Comparer les angles $\widehat{ODE}$ et $\widehat{DOA}$.

2° Démontrer que $\widehat{BOE} = 3\,\widehat{DOA}$.

477. — On donne un cercle de centre O et de diamètre AB. Sur le rayon OB on marque un point P fixe entre O et B et on prend sur le cercle deux points C et D situés d'un même côté de AB et se suivant dans l'ordre A, C, D, B.

1° Placer la médiatrice de CD.

2° Comparer les segments PC et PD.

478. — On joint un point M d'un cercle de centre O à un point A quelconque du plan. On prend le milieu B de AM. Évaluer la longueur du segment qui joint B au milieu C de OA.

479. — Soit ABC un triangle. Sur le prolongement de BC au-delà de C on prend le point C′ tel que CC′ = AC et sur le prolongement de BC au-delà de B le point B′ tel que BB′ = AB. On trace le cercle circonscrit au triangle AB′C′, soit O son centre.

1° Démontrer que : $\widehat{OAB} = \widehat{OB'B}$;

2° En conclure que AO est bissectrice de l'angle BAC.

480. — On prend deux points M et M′ sur un cercle de centre O, les tangentes en M et M′ se coupent en T.

1° Comparer les deux triangles OMT et OM′T;

2° En déduire que l'on a : MT = M′T et que OT est bissectrice des angles $\widehat{MOM'}$ et $\widehat{MTM'}$;

3° La tangente en M rencontre en U et V les tangentes respectives en deux points A et B diamétralement opposés. Démontrer que : UV = UA + VB et que l'angle $\widehat{UOV}$ est droit.

481. — On prolonge le rayon OA d'un cercle de centre O d'un segment AB = OA et l'on trace de B la perpendiculaire BC sur la tangente au cercle en un point M quelconque. On supposera que M et C sont d'un même côté de OA.

1° Démontrer que l'on a :

$$AM = AC \quad \text{et} \quad \widehat{OMA} = \widehat{ACB}.$$

2° En déduire que l'on a :

$$\widehat{MAC} = 2\,\widehat{ACB} \quad \text{et} \quad \widehat{OAC} = 3\,\widehat{ACB}.$$

3° Comment faut-il modifier les résultats précédents si M et C sont de part et d'autre de OA?

482. — Un cercle est supposé partagé en dix arcs égaux par des points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J. On trace OA, OB, OD, et AD qui coupe OB en P.

1° Calculer les angles $\widehat{AOD}$; $\widehat{OAD}$; $\widehat{ODA}$; $\widehat{AOB}$; $\widehat{ABO}$; $\widehat{BAO}$.

2° En déduire la valeur des angles des triangles APB; OPD.

483. — On considère un demi-cercle de centre O et deux points C et D sur le diamètre qui limite ce demi-cercle. On suppose ces points intérieurs au cercle et OC = OD. Par C et D on trace deux parallèles qui coupent le demi-cercle en C′ et D′, soit I le milieu de la corde C′D′.

1° On prolonge CI jusqu'en E sur DD′. Comparer les triangles CC′I et EID′.

2° Démontrer que OI est parallèle à CC′ et que C′D′ est perpendiculaire à CC′.

484. — On considère un cercle de centre O et deux cordes AB et CD rectangulaires. On appelle C′ et D′ les points diamétralement opposés à C et D.

1° Quelle est la nature du quadrilatère CDC′D′?

2° CD coupe AB en H et C′D′ coupe AB en H′. Étudier le triangle OHH′.

3° *Application* : Un cercle variable passe par deux points fixes A et B. Soit C l'un des points où ce cercle rencontre une droite fixe perpendiculaire à AB. Trouver l'ensemble des points C′ diamétralement opposés à C lorsque le cercle varie en passant toujours par A et B.

CHAPITRE VI

ANGLE INSCRIT

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES. APPLICATIONS.

89. Définition.

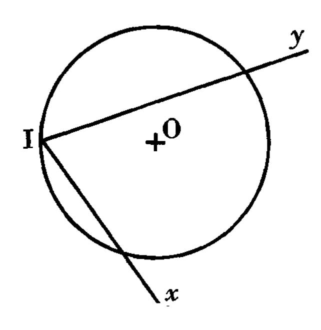


Fig. 62.

☆ **On dit qu'un angle $\widehat{xIy}$ est inscrit dans un cercle (C) pour exprimer que : 1° son sommet I est sur le cercle; 2° ses côtés Ix et Iy coupent le cercle.**

Lorsqu'un des côtés de l'angle est porté par la tangente en I au cercle, l'angle est encore considéré comme un angle inscrit.

La *figure 62* montre un angle inscrit, les *figures 63, 64* et *65* des angles qui satisfont partiellement à la définition ci-dessus et qui **ne sont pas** des angles inscrits.

Soit A et B les deux points d'intersection avec le cercle des deux côtés Ix et Iy de l'angle inscrit $\widehat{xIy}$.

Si A et B sont diamétralement opposés, nous dirons que l'angle inscrit **intercepte** un demi-cercle.

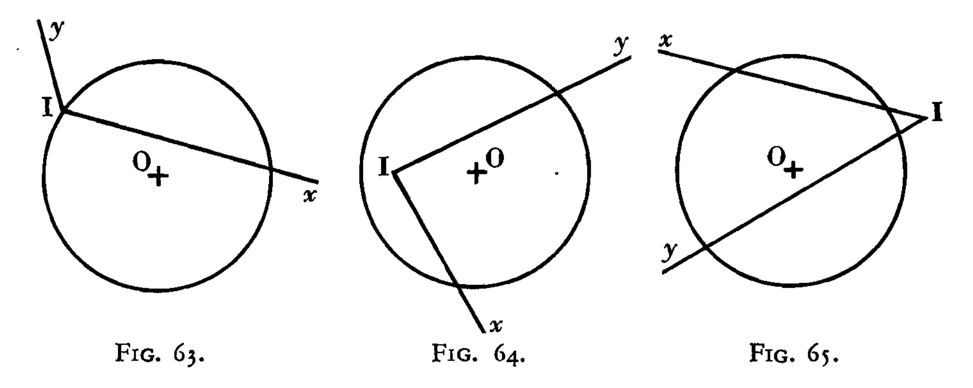


Fig. 63. Fig. 64. Fig. 65.

Si A et B ne sont pas diamétralement opposés ils déterminent sur le cercle deux arcs $\widehat{AB}$ et $\overset{\smile}{AB}$. Celui de ces deux arcs qui est intérieur à l'angle inscrit est l'arc **intercepté** par l'angle inscrit.

L'angle au centre saillant ou rentrant qui intercepte l'arc que nous venons de définir est l'angle au centre **associé** à l'angle inscrit.

90. Comparaison de l'angle inscrit et de l'angle au centre associé. — Supposons d'abord que les deux côtés Ix et Iy de l'angle inscrit coupent le cercle en A et B. Soit C le point diamétralement opposé à I sur le cercle. Trois cas seulement sont possibles.

1. Le point C coincide avec B (ou A) (*Fig. 66*). — Le triangle IOA est isocèle : $\widehat{xIy} = \widehat{OAI}$.

L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle extérieur du triangle IAO :

$$\widehat{AOB} = \widehat{xIy} + \widehat{OAI} = 2\,\widehat{xIy}.$$

$$\widehat{xIy} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

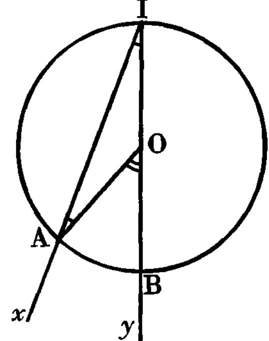


Fig. 66.

L'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre associé.

2. Les deux points A et B sont de part et d'autre du diamètre IC (*Fig. 67*). — Le résultat précédent donne :

$$\widehat{xIC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}.$$

$$\widehat{CIy} = \frac{1}{2}\widehat{COB}.$$

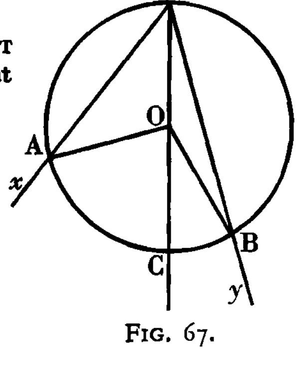


Fig. 67.

D'où par addition :

$$\widehat{xIy} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

Nous avons écrit pour $\widehat{AOB}$, un angle saillant. S'il est rentrant (*Fig. 68*), on a :

$$\widehat{xIy} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AOB}.$$

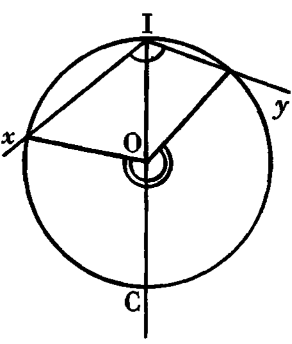


Fig. 68.

Remarquons que l'angle inscrit est toujours saillant.

3. Les deux points A et B sont du même côté du diamètre IC (*Fig. 69*). — On a :

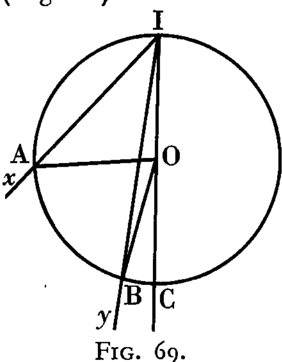


Fig. 69.

$$\widehat{xIC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}.$$

$$\widehat{yIC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}.$$

Par différence :

$$\widehat{xIy} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

Enfin ce résultat s'étend sans difficulté aux cas particuliers. La figure ci-dessous *(Fig. 70)* montre le résultat dans les trois cas ou un côté Ix est tangent au cercle.

Si les deux côtés Ix et Iy sont confondus et tangents au cercle, l'arc

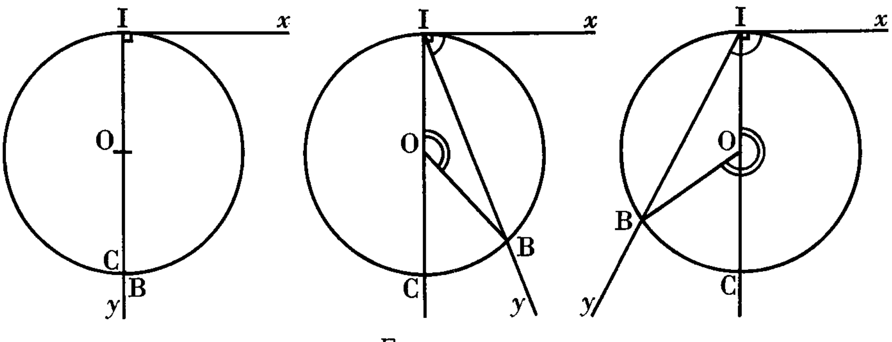


Fig. 70.

intercepté est nul, l'angle au centre associé nul, l'angle inscrit nul; la relation est conservée.

Si les deux côtés Ix et Iy sont opposés et portés par la tangente en I l'arc intercepté est tout le cercle, l'angle au centre associé vaut 4D et :

$$\widehat{xIy} = 2\text{D}.$$

Nous pouvons énoncer :

- THÉORÈME. — **Un angle inscrit est la moitié de l'angle au centre associé.**

91. Conséquences. — Nous avons les conséquences immédiates suivantes :

- **1. — Tout angle inscrit qui intercepte un demi-cercle est droit** (*Fig. 71*).

  2. — Sur un même cercle, ou sur des cercles égaux, deux angles inscrits qui interceptent le même arc, ou des arcs égaux, sont égaux.

Réciproquement, sur un cercle ou des cercles égaux, deux arcs interceptés par des angles inscrits égaux sont égaux (*Fig. 72*).

3. — Sur un cercle, deux angles inscrits interceptant deux arcs adjoints sont supplémentaires, puisque la somme des angles au centre associés est 4 D (*Fig. 73*).

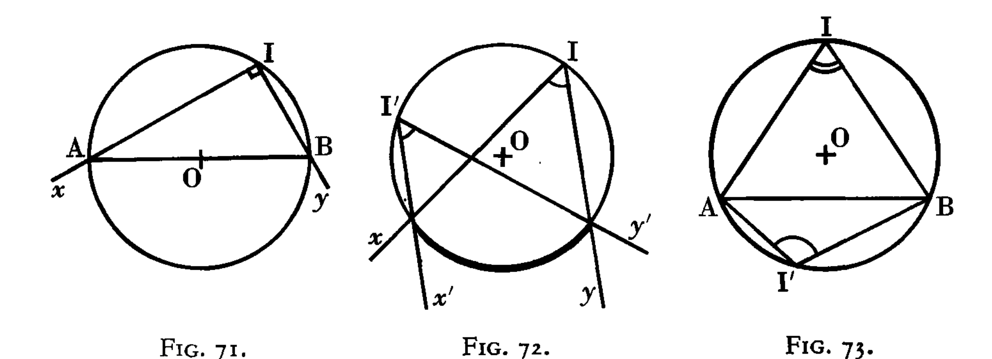


FIG. 71. FIG. 72. FIG. 73.

92. Quadrilatère convexe inscriptible. — Soit quatre points A, B, C, D sur un cercle. Si C et D sont de part et d'autre de AB, le quadrilatère ACBD est convexe et inscriptible. Ses angles $\widehat{D}$ et $\widehat{C}$, interceptant deux arcs adjoints, sont supplémentaires.

Réciproquement, soit un quadrilatère convexe ACBD dans lequel : $\widehat{C} + \widehat{D} = 2$ D. Supposons $\widehat{C} \leqslant 1$ D, et soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ACB. Sur ce cercle (*Fig. 74*) l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ est l'angle saillant $\widehat{AOB}$, donc O est dans le demi-plan d'arête AB qui contient C et on a : $\widehat{AOB} = 2\widehat{C}$. Le point O est sur AB si $\widehat{C} = 1$ D.

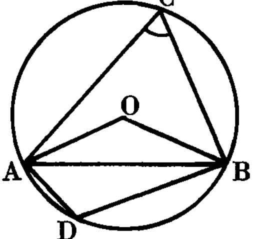


FIG. 74.

Soit maintenant O′ le centre du cercle circonscrit au triangle ADB, l'angle au centre associé à $\widehat{ADB}$ est rentrant ou plat, et O′ est dans le demi-plan d'arête AB contenant C. Il en résulte :

$$\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}.$$

Les deux triangles isocèles AOB et AO′B (propres ou impropres) ont leurs angles égaux et AB commun. Ils sont égaux, O et O′ sont confondus, et les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle.

■ THÉORÈME. — **Un quadrilatère convexe qui a deux angles opposés supplémentaires est inscriptible, et réciproquement.**

ACBD quadrilatère convexe.
$\widehat{C} + \widehat{D} = 2$ D $\iff$ **A, B, C, D sur un cercle.**

93. Quadrilatère croisé inscriptible. — **Si A, B, C, D sont sur un cercle, C et D** du même côté de AB, le **quadrilatère ACBD est croisé et inscriptible** (*Fig. 75*). **Les angles $\hat{C}$ et $\hat{D}$ interceptent** le même arc, ils **sont égaux.**

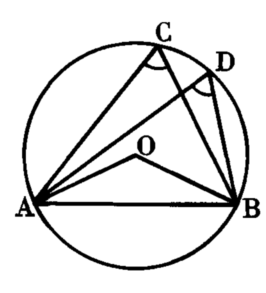


FIG. 75.

Réciproquement, **si C et D sont du même côté** de AB **et si $\hat{C} = \hat{D}$, en reprenant** le raisonnement **précédent, on démontre** que les centres des cercles **circonscrits aux triangles ACB et ADB** sont **confondus; les quatre points sont sur un** cercle.

■ **THÉORÈME. — Un quadrilatère croisé ACBD tel que $\hat{C} = \hat{D}$** est ins**criptible et réciproquement.**

ACBD quadrilatère croisé.
$\hat{C} = \hat{D} \iff$ **A, B, C, D sur un cercle.**

94. Ensemble des points d'où on voit un segment donné sous un angle donné. **Soit un segment AB non nul,** et un point M quelconque.

Si M est un point du segment AB, on a : $\widehat{AMB} = 2\text{D}$.

Si M est sur la droite AB, extérieur au segment **AB, on a** $\widehat{AMB} = 0$.

Si **enfin** M n'est pas **sur la droite AB, l'angle saillant $\widehat{AMB}$ est parfai**tement **déterminé.** Sa mesure est, **par définition, l'angle** sous **lequel du** point M on voit le segment AB.

Nous nous proposons de déterminer l'ensemble des points **M** *du plan, d'où l'on voit sous l'angle* α *un segment donné* AB ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\text{D}$).

Remarquons d'abord que si un point M du plan est tel que $\widehat{AMB} = 0$, ou $\widehat{AMB} = 2\text{D}$, les points A, M, B sont alignés et, par suite, dans ces **deux cas** particuliers, on peut conclure.

■ **L'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = 0$ est constitué par la droite AB privée du segment AB.**
L'ensemble des points M du plan tels **que** $\widehat{AMB} = 2\text{D}$ **est constitué par l'intervalle AB** (segment AB **privé de** ses deux **extrémités**).

Il nous reste à étudier le cas général, $0 < \alpha < 2\text{D}$ pour lequel nous utiliserons **la méthode indiquée au n° 69.** Nous ferons cette étude **dans un demi-plan** (π) **d'arête AB.**

1. EXISTENCE DE POINTS APPARTENANT A L'ENSEMBLE. — Pour déter**miner un point M dans le demi-plan** (π), il suffit de connaître les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ **du triangle ABM, pourvu** que :

$$\hat{A} + \hat{B} < 2\text{D} \quad \text{(Axiome d'Euclide).}$$

Or $\hat{A} + \hat{B} = 2\text{D} - \alpha$, il suffit donc de se donner $\hat{A} < 2\text{D} - \alpha$, alors $\hat{B}$ est déterminé ainsi que le point M.

2. Analyse. — Soit M un point de l'ensemble, le triangle AMB est propre; il existe (nº 70), un point O équidistant des trois points A, B, M; ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Soit At la demi-droite portée par la tangente en A au cercle et située dans le demi-plan (π') opposé à (π). On a : $\widehat{AMB} = \widehat{BAt} = \alpha$ (angles inscrits interceptant le même arc). La demi-droite At est donc fixe et parfaitement déterminée (*Fig. 76*).

Le centre O du cercle est alors fixe puisqu'il se trouve à la fois sur la médiatrice de AB et sur la perpendiculaire en A à At. Appelons (Γ) l'arc de ce cercle situé dans (π). Nous pouvons conclure :

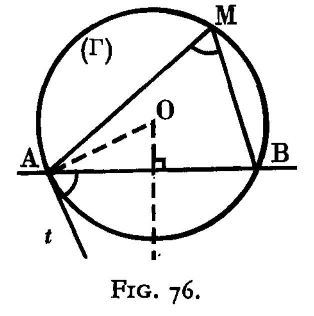


Fig. 76.

Dans le demi-plan (π) tout point de l'ensemble appartient à l'arc (Γ).

☆ DÉFINITION. — **Étant donné un segment AB et un angle α ($0 < \alpha < 2\text{D}$), dans tout demi-plan dont l'arête porte AB, l'arc (Γ) s'appelle arc capable de l'angle α, correspondant au segment AB.**

3. Synthèse. — Soit M un point quelconque de l'arc (Γ) dans le demi-plan (π), soit O le centre du cercle qui porte (Γ).

On a dans tous les cas :

$$\widehat{AMB} = \widehat{tAB} = \alpha.$$

Tout point de (Γ) appartient à l'ensemble.

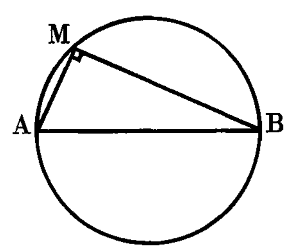


Fig. 77.

4. Conclusion. — Nous pouvons énoncer, en mettant d'abord en évidence le cas particulier important où $\alpha = 1\text{D}$:

- THÉORÈME. — **L'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment AB sous un angle droit est constitué par le cercle de diamètre AB (*Fig. 77*).**

- THÉORÈME. — **L'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment AB sous un angle donné α, est constitué par les deux arcs capables de l'angle α, correspondant au segment AB, situés dans les deux demi-plans déterminés par AB (*Fig. 78*).**

Remarque. — Les deux arcs capables obtenus sont égaux, puisqu'ils sont situés sur des cercles égaux et qu'ils sont interceptés par des angles inscrits égaux.

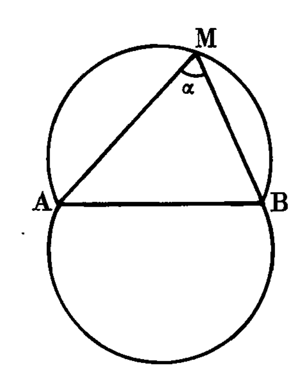


Fig. 78.

PROBLÈMES

485. — **Ensemble des milieux des cordes d'un cercle donné qui passent par un point donné.**

486. — **Soit un cercle (C) de diamètre AB. A tout point M de ce cercle on fait correspondre le point P de MA situé sur la demi-droite d'origine M ne contenant pas A, tel que MP = MB. Quel est l'ensemble de ces points P?**

487. — **Soit un cercle (C) de centre O et un** diamètre fixe AB. A tout point M du cercle, on fait correspondre le point P de la demi-droite OM tel que OP soit égal à la distance de M à la droite AB. Quel est l'ensemble des points P?

488. — Deux cercles se coupent en A et B. Par A on trace une sécante MAN. Étudier les angles du triangle BMN.

489. — Deux cercles sont tangents en A. Par A on trace deux sécantes ABB′ et ACC′ (B et C sont sur le même cercle). Étudier les cordes BC et B′C′.

490. — Sur la tangente en A à un cercle on porte un segment AC égal à une corde AB; la droite BC recoupe le cercle en D. Montrer que le triangle ADC est isocèle.

491. — **On donne un cercle (O) et sur ce cercle un point fixe A. On donne aussi une droite fixe (D) et sur cette droite un point fixe B. Par les points A et B on fait passer un cercle variable qui rencontre (O) en C et (D) en E. La droite CE rencontre (O) en F. Démontrer que le point F est fixe.**

492. — **Deux cercles égaux se coupent en A et B. Par B on trace une sécante quelconque qui coupe les cercles en C et C′.**

1° Démontrer que AC = AC′.

2° En déduire l'ensemble des points D milieux de CC′

493. — Soit un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle. Les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle A recoupent le cercle en D et D′.

1° Démontrer que DD′ est médiatrice de BC.

2° Démontrer que la bissectrice intérieure AD est bissectrice de l'angle $\widehat{HAO}$ (H est l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit).

3° Que peut-on dire du triangle si AD est également médiane?

494. — Quand la médiane d'un triangle ABC est égale à $\frac{BC}{2}$, le triangle est rectangle. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{A}$ si AM est supérieure ou inférieure à $\frac{BC}{2}$?

495. — Chercher les quadrilatères dont deux angles opposés sont droits et tels qu'une diagonale passe par le milieu de l'autre.

496. — **On prend 3 points A, B, C sur un cercle de centre O et l'on désigne par B′ un point du cercle tel que OB′ est perpendiculaire à AB et C′ un point du cercle tel que OC′ est perpendiculaire à AC. La droite B′C′ coupe AB et AC respectivement en M et N. Démontrer que le triangle MAN est isocèle.**

497. — 1° Démontrer que si l'on trace une sécante par l'un des points A de rencontre de deux cercles, elle coupe ces deux cercles en deux autres points où les tangentes à chacun des cercles font entre elles un angle constant.

2° Par A on trace une sécante MAM′ et par l'autre point de rencontre B des deux cercles, on trace une autre sécante PBP′. Démontrer que les droites MP et M′P′ sont parallèles. (M et P sont sur le même cercle.) Que devient cette propriété si M et P sont confondus?

498. — A quelle condition un parallélogramme est-il inscriptible? Même question pour le trapèze.

499. — **Par un point M de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle on trace MP, MQ perpendiculaires sur les côtés de l'angle droit. Démontrer que la médiatrice du segment PQ et la perpendiculaire menée de M sur PQ passent respectivement par un point fixe quand M décrit l'hypoténuse.**

500. — **Si un quadrilatère convexe ABCD a ses diagonales rectangulaires et est inscrit dans un cercle, les quatre tangentes en A, B, C, D forment un quadrilatère inscriptible.**

501. — **On marque sur un cercle (O) deux arcs consécutifs égaux $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$. On trace en C la tangente qui rencontre OB en D.**

1° Que peut-on dire de la droite AD?

2° On prolonge OA d'un segment égal AE = OA. Démontrer que :

$$\widehat{CDE} = 3\,\widehat{ADE}.$$

502. — Étant donné un triangle ABC et son cercle circonscrit, on trace la corde CD perpendiculaire à AB et la corde DE perpendiculaire à BC. Démontrer que C est le milieu de l'un des arcs $\widehat{AE}$.

503. — Sur les côtés d'un carré ABCD, on prend quatre points, M sur AB, N sur BC, P sur CD, Q sur AD.

1° Préciser les points où la diagonale BD rencontre les cercles de diamètres MN et PQ.

2° Construire un carré dont les côtés passent par quatre points donnés M, N, P et Q.

504. — ABCD désigne un quadrilatère inscriptible ; on fait passer par A et B un cercle quelconque, de même par B et C; par C et D et par D et A. On obtient quatre cercles qui se coupent en quatre nouveaux points E, F, G et H. Démontrer que le quadrilatère EFGH est inscriptible.

505. — Soit un cercle de centre O, AA′ un diamètre. Par A on trace la perpendiculaire à la tangente an cercle en un point M variable de ce cercle. Cette perpendiculaire coupe le cercle en P et la tangente en H. Démontrer que le point A′, le point M et le point Q symétrique de P par rapport à H, sont alignés.

506. — Un angle $\widehat{xAy}$ est dit intérieur à un cercle (C) de centre O si le point A est intérieur à (C). Les demi-droites Ax et Ay coupent le cercle en B et C. Les demi-droites Ax' et Ay' opposées coupent le cercle en B′ et C′. Évalner $\widehat{xAy}$ au moyen des angles au centre associés $\widehat{BOC}$ et $\widehat{B'OC'}$.

507. — Un angle xAy est dit extérieur à un cercle (C) de centre O si le point A est extérieur au cercle; le côté Ax coupe le cercle en B et C (B entre A et C); le côté Ay conpe le cercle en D et E (D entre A et E). Évaluer $\widehat{xAy}$ au moyen des angles au centre $\widehat{BOD}$ et $\widehat{COE}$.

508. — Démontrer que les bissectrices intérieures d'nn quadrilatère convexe forment un quadrilatère inscriptible. Même question pour les bissectrices extérieures.

509. — Soit AB et CD deux cordes parallèles d'un cercle.

1° Étudier le quadrilatère convexe ABCD.

2° AC et BD se coupent en E; AD et BC en F. Démontrer que O, E, F sont alignés et que les quadrilatères ADOE et AOCF sont inscriptibles.

510. — Soit AB une corde d'un cercle (O) et C le milieu de l'arc $\widehat{AB}$. On trace les cordes CD et CE quelconques qui coupent AB en F et G. Démontrer que le quadrilatère DFGE est inscriptible.

CHAPITRE VII

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

I. GÉNÉRALITÉS

95. Introduction. — Résoudre un problème de construction, c'est donner la possibilité de réaliser un ensemble géométrique au moyen d'opérations simples qui sont :

tracer une droite;
tracer un cercle.

Nous verrons, dans les exemples qui vont suivre, que l'on peut, en général, réduire un problème de construction, à la construction d'un ou de plusieurs points.
Chaque point étant défini comme l'intersection de deux droites, ou d'un cercle et d'une droite ou de deux cercles, toute opération pourra être exécutée avec la règle et le compas.

Enfin, le problème de construction demande de réaliser un certain ensemble à partir de certaines données. Une partie du problème consiste à se demander s'il y a une solution quelles que soient les données. C'est ce qu'on appelle la **discussion** du problème.

96. Revision des opérations élémentaires. — Le tableau suivant indique les opérations simples qui ont été étudiées dans les classes précédentes et qui sont à la base des problèmes de construction :

TITRE	EXPLICATIONS	FIGURE
Médiatrice d'un segment AB	Ouverture de compas $l > \frac{AB}{2}$, le cercle de centre A et de rayon l et le cercle de centre B de rayon l sont sécants ($2\,l < AB$) en M et M' $\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ M'A = M'B \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} MM' \text{ médiatrice} \\ \text{de } AB. \end{array}\right.$	FIG. 79.
Perpendiculaire en H $\in$ (*d*), à *une droite* (*d*).	1re *construction.* Avec le compas on marque, de part et d'autre de H sur (*d*) les points A et B tels que : $HA = HB.$ La perpendiculaire cherchée est la médiatrice de AB. On en construit les points M et M'. Les points M, H, M' sont alignés.	FIG. 80.
	2e *construction.* On trace un cercle de centre O arbitraire, passant par H. Ce cercle recoupe (*d*) en A, la perpendiculaire cherchée passe par le point B diamétralement opposé à A.	FIG. 81.

Titre	Explications	Figure
D'un point O, non situé sur une droite (d), tracer la perpendiculaire à cette droite.	Le cercle de centre O et de rayon l assez grand coupe (d) en A et B. La perpendiculaire cherchée est la médiatrice de AB. On construit un deuxième point M de cette médiatrice.	O A B (d) M Fig. 82.
Angle égal à un angle donné.	$\widehat{XIY}$ donné, un cercle de centre I coupe IX en A et IY en B. Le cercle égal de centre O coupe la demi-droite donnée Ox en M. Le cercle de centre M de rayon AB coupe le cercle de centre O en N : $AB = MN \iff \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{MN}$ $\iff \widehat{AIB} = \widehat{MON}$.	B I A N y O x M Fig. 83.
Bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$.	Un cercle de centre O coupe Ox en A et Oy en B. Le triangle AOB étant isocèle, la médiatrice de AB est la bissectrice cherchée.	O A B x y Fig. 84.
Par un point O tracer la parallèle à une droite (d)	On prend A quelconque sur (d) puis B sur (d) tel que AB = AO. On détermine alors M tel que MO = MB = AB. On a : MO = MB = AB = AO $\Longrightarrow$ ABMO losange $\Longrightarrow$ OM // AB.	O M (d) A B Fig. 85.

II. DÉTERMINATION DU CERCLE

97. Introduction. — Un cercle est déterminé lorsqu'on connaît son centre et son rayon. Nous nous proposons dans ce chapitre de rechercher si un cercle est déterminé par des conditions géométriques simples : passer par un point donné, être tangent à une droite donnée, avoir un rayon donné, etc.

98. Cercles passant par des points donnés.

1. Cercles passant par un point A. — Le point O étant arbitraire dans le plan, le cercle de centre O et de rayon OA satisfait évidemment aux conditions du problème.

- **Étant donné un point A, tout point O d'un plan passant par A peut être considéré comme le centre d'un cercle passant par A.**

2. Cercles passant par deux points distincts A et B. — S'il existe un cercle passant par A et B son centre O est tel que : OA = OB.
Le point O se trouve sur la médiatrice de AB.

Réciproquement, tout point O de la médiatrice de AB est tel que OA = OB, le cercle de centre O et de rayon OA passe par B.

- **L'ensemble des centres des cercles qui passent par deux points donnés A et B est l'ensemble des points de la médiatrice de AB.**

3. Cercle passant par trois points A, B, C. — Soit O le centre d'un tel cercle, à supposer qu'il existe. D'après ce qui précède, le point O se trouve :

sur la médiatrice de AB,
sur la médiatrice de AC.

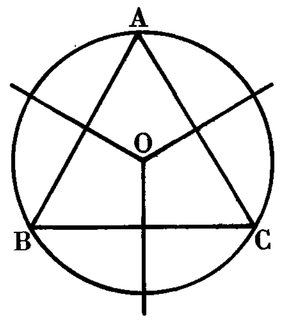
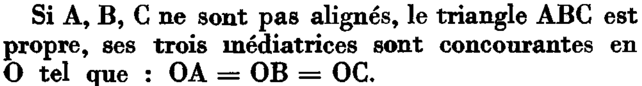


Fig. 86.

Si A, B, C sont alignés, les médiatrices de AB et de AC, étant parallèles, n'ont pas de point commun. Il n'existe pas de cercle passant par trois points alignés.



Si A, B, C ne sont pas alignés, le triangle ABC est propre, ses trois médiatrices sont concourantes en O tel que : OA = OB = OC.
Le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et C (*Fig. 86*).

- **Par trois points A, B, C non alignés, il passe un cercle et un seul. Ce cercle est le cercle circonscrit au triangle. Le peint commnn aux trois médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.**

99. Cercles tangents à des droites.

1. Cercles tangents a une droite. — Soit une droite (d) dans un plan (π). Soit O un point quelconque non situé sur (d), et H la projection de O sur (d). Le cercle de centre O et de rayon OH est tangent en H à (d).

Tout point du plan peut être considéré comme le centre d'un cercle tangent à une droite donnée du plan.

2. Cercles tangents a deux droites. — Soit (d) et (d') deux droites distinctes d'un plan.

a) — (d) et (d') sont parallèles. — S'il existe un cercle de centre O tangent à ces deux droites, H et H′ étant les projections de O sur (d) et (d'), on a :

$$\text{OH} = \text{OH}'.$$

Donc (nº 68) le point O se trouve sur la droite (D), parallèle équidistante de (d) et (d').

Réciproquement, tout point O de (D) étant équidistant de (d) et (d'), est le centre d'un cercle tangent à (d) et (d').

- **L'ensemble des centres des cercles tangents à deux droites parallèles (d) et (d') est l'ensemble des points de la droite (D) parallèle à (d) et (d') et équidistante de ces deux droites.**

b) — (d) et (d') sont concourantes. — Soit (D) et (D′) les droites portant les bissectrices des angles formés par (d) et (d'). Si un cercle de centre O est tangent à (d) et (d'), le point O, étant équidistant de (d) et (d'), se trouve sur l'une ou l'autre des droites (D) ou (D′).

Réciproquement, tout point de (D) ou (D′) étant équidistant de (d) et (d') est le centre d'un cercle tangent à ces deux droites.

- **L'ensemble des centres des cercles tangents à deux droites concourantes (d) et (d') est l'ensemble des points des droites (D) et (D′) portant les bissectrices des angles formés par ces deux droites.**

3. Cercles tangents a trois droites. — Soit (a), (b), (c) les trois droites, que nous supposerons distinctes. Lorsque deux de ces droites seront concourantes nous appellerons :

A le point commun à (b) et (c),
B le point commun à (c) et (a),
C le point commun à (a) et (b),

(l) et (l') les supports des bissectrices de (b) et (c),
(m) et (m') les supports des bissectrices de (c) et (a),
(n) et (n') les supports des bissectrices de (a) et (b).

Lorsque deux droites seront parallèles, nous appellerons :

(l) la parallèle équidistante de (b) et (c),
(m) la parallèle équidistante de (c) et (a),
(n) la parallèle équidistante de (a) et (b).

Enfin nous désignerons par O, lorsqu'il existe, le centre d'un cercle tangent aux trois droites et par H, K, L les projections respectives de O sur (a), (b) et (c).

Nous étudierons successivement les différents cas de figure, en utilisant les résultats du n° précédent.

a) Les trois droites sont concourantes en I. — Le point O doit se trouver à la fois sur (l) ou (l') et (m) ou (m'). Ces quatre droites étant concourantes en I, le problème est impossible.

Il n'existe pas de cercle tangent à trois droites concourantes données.

b) Les trois droites sont parallèles. — Le point O doit se trouver sur (l) qui constitue l'ensemble des points équidistants de (b) et (c) ; de même O doit se trouver sur (m). Or (l) et (m) étant parallèles n'ont pas de point commun.

Il n'existe pas de cercle tangent à trois droites parallèles données.

c) Deux des droites sont parallèles et la troisième est sécante commune aux deux autres.

Soit $(a) \parallel (b)$, et (c) sécante commune à (a) et (b) (*Fig. 87*).

Le point O, s'il existe, est équidistant de (a) et (b), donc se trouve sur (n) ; il est équidistant de (a) et (c), donc se trouve sur (m) ou (m').

(m) coupe (a) en B, donc coupe sa parallèle (n) en O, qui se projette en H, K, L sur (a), (b), (c).

(m') de même coupe (n) en O' qui se projette en H', K', L' sur (a), (b), (c).

$$\left.\begin{array}{l} O \in (n) \implies OH = OK \\ O \in (m) \implies OH = OL \end{array}\right\} \implies OH = OK = OL.$$

De même : $O'H' = O'K' = O'L'$.

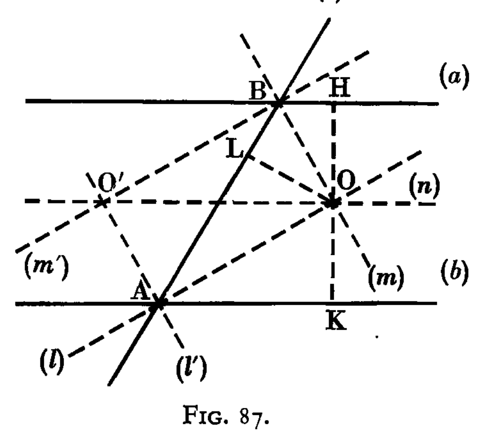


Fig. 87.

Les points O et O' sont les centres des cercles tangents aux trois droites.

Remarquons que :

$$(n) \parallel (a) \implies OH = O'H',$$

donc, les deux cercles sont égaux.

Remarque. — (m) et (m') sont perpendiculaires, comme bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires. (m') et (l) sont parallèles car les angles alternes-internes, déterminés par la sécante AB sont égaux, comme moitiés des angles alternes-internes égaux définis par les parallèles (a) et (b) et la sécante AB.

De même (m) et (l') sont parallèles.

Il en résulte que AOBO' est un rectangle.

▪ **Il existe deux cercles égaux tangents aux trois droites (*a*), (*b*), (*c*), les droites (*a*) et (*b*) étant parallèles.**

d) Les droites (*a*), (*b*), (*c*) *sont concourantes deux à deux.* — Les trois points A, B, C existent et déterminent un triangle (*Fig. 88*). Nous désignerons par (*l*), (*m*), (*n*) les supports des bissectrices intérieures du triangle, par (*l'*), (*m'*) et (*n'*) les supports des bissectrices extérieures. Nous savons (nº 74) que :

(*l*), (*m*) et (*n*) sont concourantes en I.

(*l'*), (*m'*) et (*n*) sont concourantes en I_c.

(*l'*), (*n'*) et (*m*) sont concourantes en I_b.

(*m'*), (*n'*) et (*l*) sont concourantes en I_a.

Le point O, s'il existe, est équidistant de (*a*) et (*b*), il se trouve donc sur (*n*) ou (*n'*); il est équidistant de (*a*) et (*c*), donc il se trouve sur (*m*) ou (*m'*).

Le point O appartient à l'ensemble des quatre points I, I_a, I_b, I_c.

Chacun de ces quatre points étant équidistant des trois droites est le centre d'un cercle tangent aux trois droites.

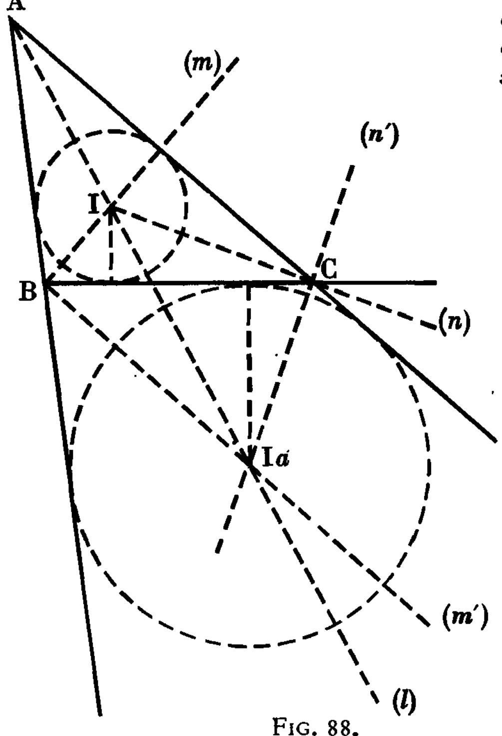


FIG. 88.

▪ **Il existe quatre cercles tangents aux trois droites portant les trois côtés d'un triangle, leurs centres sont :**

1. le point commun aux trois bissectrices intérieures; c'est le centre du cercle inscrit.

2. les trois points, dont chacun est commun à deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure, ce sont les centres des cercles exinscrits dans les angles A, B, C du triangle.

III. PROBLÈMES SUR LES TANGENTES AU CERCLE

100. Tangentes à un cercle, parallèles à une droite donnée ou passant par un point donné. — 1° Soit (C) le cercle donné de centre O, et une droite donnée (d).

ANALYSE. — S'il existe une tangente parallèle à (d), elle est déterminée par son point de contact T, tel que OT est perpendiculaire à la tangente donc à (d).

SYNTHÈSE. — La perpendiculaire tracée du centre O du cercle à (d) coupe le cercle en deux points T et T′. Les tangentes au cercle en T et T′ sont perpendiculaires à TT′ donc parallèles à (d) (*Fig. 89*).

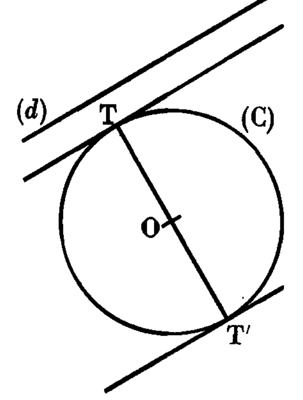


FIG. 89.

▪ THÉORÈME. — **Il existe deux tangentes à un cercle parallèles à une droite donnée. Leurs points de contact sont les extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à la droite.**

2° Soit O le centre du cercle (C), R son rayon, A le point donné. Posons OA = d.

ANALYSE. — Une tangente au cercle, si elle existe, est déterminée par son point de contact T. La droite AT tangente au cercle est perpendiculaire à OT, donc : $\widehat{OTA} = 1$ D.

Du point T on voit le segment OA sous un angle droit ; le point T se trouve donc sur le cercle de diamètre OA (*Fig. 90*).

SYNTHÈSE. — Si le cercle de diamètre OA coupe le cercle donné en deux points T et T′, les tangentes en T et T′ au cercle, respectivement perpendiculaires à OT et OT′ passent par A.

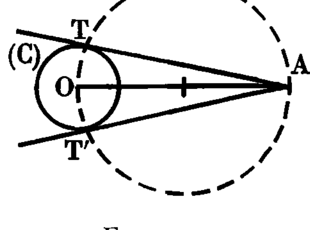


FIG. 90.

DISCUSSION. — Le problème est possible et admet deux solutions si les deux cercles de rayons R et $\frac{d}{2}$, dont la distance des centres est $\frac{d}{2}$ sont sécants. Il suffit (n° 86) d'exprimer qu'on peut construire un triangle avec les trois longueurs R, $\frac{d}{2}$ et $\frac{d}{2}$, d'où la condition :

$$R < \frac{d}{2} + \frac{d}{2}, \qquad \text{soit :} \qquad R < d.$$

▪ THÉORÈME. — **Par tout point A extérieur à un cercle, on peut tracer deux tangentes à ce cercle. Les points de contact sont les points d'intersection du cercle et du cercle de diamètre OA.**

REMARQUES. — 1. Si $d = R$, le point A est sur le cercle, on a une seule tangente : la tangente en A au cercle.

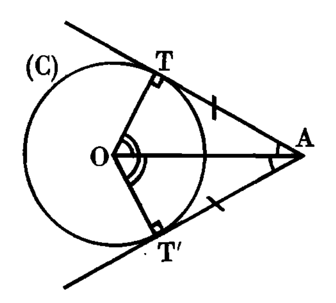


FIG. 91.

2. Nous avons vu (n° 80) que tout point d'une tangente, le point de contact mis à part, est extérieur au cercle. Il n'est donc pas possible qu'une tangente au cercle passe par un point intérieur au cercle. La discussion ci-dessus a fait retrouver ce résultat attendu, mais l'a complété : les points intérieurs sont les seuls par lesquels il ne passe pas de tangente.

En d'autres termes l'ensemble des tangentes à un cercle recouvre complètement l'extérieur du cercle.

3. Lorsque les deux tangentes existent, les deux triangles rectangles OTA et OT'A ont : OA commun, OT = OT'; ils sont égaux et (*Fig. 91*) : AT = AT'.

On exprime brièvement ce résultat en disant que :

Les tangentes tracées d'un point à un cercle sont égales.

Remarquons encore que $\widehat{AOT} = \widehat{AOT'}$ et $\widehat{TAO} = \widehat{T'AO}$: la droite OT est bissectrice de chacun des angles $\widehat{TOT'}$ et $\widehat{TAT'}$.

101. Calcul des segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les points de contact des cercles inscrits et exinscrits. — Soit H, K, L les points de contact avec BC, CA, AB du cercle inscrit de centre I. En utilisant la remarque 3 du paragraphe précédent, on a (*Fig. 92*) :

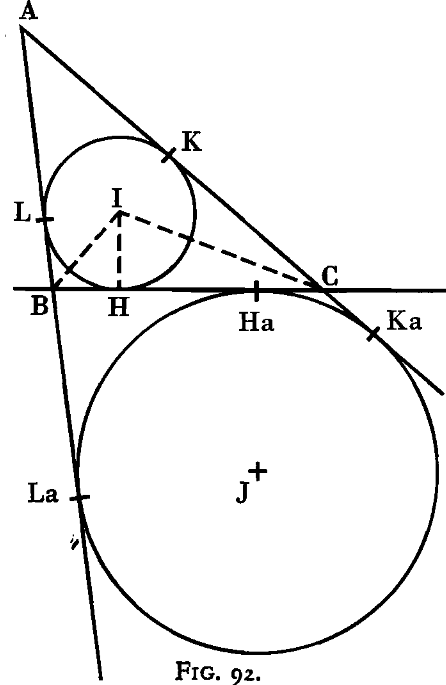


FIG. 92.

$$AK = AL = x.$$
$$BL = BH = y.$$
$$CH = CK = z.$$

Or :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{IBH} = \dfrac{\hat{B}}{2} = \widehat{IBC} \\ \widehat{ICH} = \dfrac{\hat{C}}{2} = \widehat{ICB}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{H entre B et C,}$$

De même K entre A et C et L entre A et B. En appelant a, b, c les longueurs des côtés du triangle, on a :

$$x + y = c,$$
$$y + z = a,$$
$$z + x = b.$$

En posant $a + b + c = 2p$ (périmètre du triangle) on a, par addition :

$$2(x + y + z) = 2p, \qquad \text{soit} \qquad x + y + z = p.$$

Il en résulte : $x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c.$

Soit, pour le cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$, H_a, K_a, L_a les points de contact. On voit, en raisonnant comme ci-dessus que :

H_a est entre B et C.
K_a tel que C est entre A et K_a.
L_a tel que B est entre A et L_a.

Posons :

$$AK_a = AL_a = x_a.$$
$$BL_a = BH_a = y_a.$$
$$CH_a = CK_a = z_a.$$

Nous avons :

$$AK_a + AL_a = AB + AC + BH_a + CH_a = AB + AC + BC.$$

Donc :

$$x_a = p.$$

Il en résulte :

$$y_a = p - c \quad \text{et} \quad z_a = p - b.$$

On remarque que les deux segments BC et HH_a ont même milieu.

Un calcul analogue donne sur les autres côtés :

$x_a = p;$	$y_a = p - c;$	$z_a = p - b$
$x_b = p - c;$	$y_b = p;$	$z_b = p - a$
$x_c = p - b;$	$y_c = p - a;$	$z_c = p.$

On calculera sans difficulté :

$HH_a = |b - c|;$ $\qquad KK_a = LL_a = a.$
$KK_b = |a - c|;$ $\qquad HH_b = LL_b = b.$
$LL_c = |a - b|;$ $\qquad HH_c = KK_c = c.$

IV. PROBLÈMES SPÉCULATIFS

102. Introduction. — Dans les problèmes que nous venons d'étudier, il s'agissait de mettre en place certains éléments : points, droites ou cercles, dont l'existence devait être mise en cause. Nous avons en général commencé la solution par une phrase analogue à celle-ci :

« Le point M, s'il existe, ... »

A partir de là, la solution proprement dite comprend deux parties :

1° ANALYSE, où l'on étudie le problème à partir de l'existence supposée des éléments inconnus.

2° SYNTHÈSE, où l'on cherche si les résultats de l'analyse conviennent. S'il y a lieu, on fera suivre la solution de la discussion.

Nous traiterons un nouvel exemple.

103. Problème. — *Construire un triangle* ABC, *connaissant l'angle* $\widehat{A}$, *le côté* BC = *a et la somme l des deux autres côtés.*

1. ANALYSE. — Soit ABC un triangle (à supposer qu'il existe) satisfaisant aux conditions du problème. Pour mettre en évidence la somme AB + AC = *l*, prolongeons BA d'un segment AD = AC (*Fig. 93*). Le triangle DAC étant isocèle et $\widehat{BAC}$ extérieur à ce triangle nous avons : $\widehat{BDC} = \frac{\widehat{A}}{2}$.

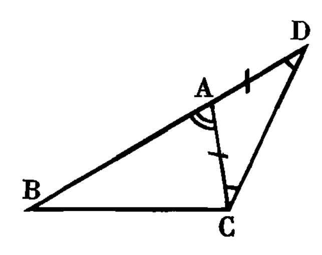


FIG. 93.

On connaît dans le triangle BDC :

$$BC = a, \quad BD = l, \quad \widehat{BDC} = \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Pour le construire, traçons un angle aigu $\widehat{xDy} = \frac{\widehat{A}}{2}$. Sur D*y* marquons B tel que DB = *l*. Le point C est déterminé par l'intersection de D*x* avec le cercle de centre B et de rayon *a* (*Fig. 94*).

Le triangle BDC étant construit, le point A se trouve :

1° sur le segment BD,
2° sur la médiatrice de CD.

Le point A est déterminé.

2. SYNTHÈSE. — On a alors : AB + AC = BD, si A est entre B et D

et :
$$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} + \widehat{ADC} = \widehat{A}.$$

DISCUSSION. — Soit H la projection de B sur Dx. La nature du problème impose :

$$b + c > a \quad \text{donc} \quad l > a.$$

Il y a deux points C et C′ si :

$$BH < a.$$

Si $BH = a$. Le point C est en H, le triangle ABC est isocèle ($AB = AC$).

Si $BH < a$, soit C entre H et D et C′ sur Hx. La médiatrice de CD coupe Dy en A situé entre B et D.

La médiatrice de C′D donne A′ entre B et D, car $BD > BC'$ (*Fig. 94*).

Remarquons que :

$$\widehat{DBC} = 2\,\text{D} - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{BCD}.$$

$$\widehat{BC'A'} = 2\,\text{D} - \widehat{BC'x} - \widehat{A'C'D}.$$

$$= 2\,\text{D} - \widehat{BCD} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Donc : $\widehat{DBC} = \widehat{BC'A'}$.

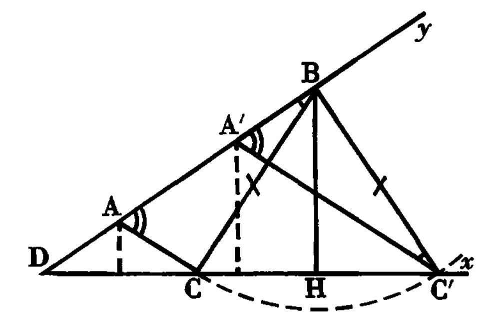


FIG. 94.

Les deux triangles ABC et A′C′B′ ont $BC = C'B'$ et leurs angles égaux, ils sont égaux. Le problème n'a donc qu'une solution.

En résumé : si $BH \leqslant a < l$, le problème a une solution.

(On traitera en exercice le même problème avec $b - c = l$.)

PROBLÈMES

511. — Construire un point situé à une distance donnée a d'un point A, et à une distance donnée d d'une droite donnée (D). Discuter en supposant que la distance de A à (D) est 4 cm, $d = 3$ cm, et a variable.

512. — Construire un cercle tangent en A à un cercle donné et passant par un point donné B.

513. — Ensemble des centres des cercles de rayon donné, tangents à un cercle donné.

514. — Construire un cercle de rayon donné r, passant par un point donné A et tangent à un cercle donné (C) de centre O et de rayon R. Discuter avec $OA = 8$ cm, $R = 5$ cm, r variable.

515. — Construire un cercle de rayon donné r, tangent à une droite donnée (D) et à un cercle (C) donné de centre O et de rayon R.

Discuter avec $R = 8$ cm; distance de O à (D) : 5 cm; r variable.

516. — Construire un triangle ABC rectangle en A connaissant :

1° BC et la différence $AB - AC$.

2° BC et la somme $AB + AC$.

3° L'angle $\widehat{B}$ et la différence $AB - AC$.

4° L'angle $\widehat{B}$ et la somme $AB + AC$.

517. — 1° Par deux points A et B on fait passer deux cercles de centres respectifs O et O′. Par A on trace une droite qui coupe

l'un des cercles en C et l'autre en C'; on désigne par M le milieu de AC et par M' le milieu de AC'. Démontrer que l'on a :

$$2\,MM' = CC'.$$

2° Construire la droite CC' de façon que CC' ait une longueur donnée. (*Tracer par O la parallèle à CC', par O' la perpendiculaire à CC', on obtient ainsi un triangle OO'P qu'on s'efforcera de construire.*)

La construction, lorsqu'elle est possible (on discutera), admet deux solutions : CC' et $C_1C'_1$. Que peut-on dire de la droite AB par rapport à ces deux droites?

3° Construire la droite CC' de façon que A soit le milieu du segment CC'. (*Utiliser le point de rencontre de OO' avec la médiatrice de CC'.*)

518. — Soit un arc de cercle (Γ) plus petit qu'un demi-cercle, A et B étant les extrémités de cet arc. A tout point M de (Γ) on fait correspondre sur la demi-droite d'origine A contenant M le point P tel que AP = MB. Quel est l'ensemble de ces points P?

519. — Soit un angle fixe $\widehat{xAy}$, un point variable B sur Ax, un point variable C sur Ay, les points B et C étant tels que $BC = l$. (l longueur fixe donnée). Quel est l'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles variables ABC?

520. — Soit un cercle (C) et deux points fixes B et C de ce cercle. Un point A variable parcourt le cercle.

1° Ensemble des centres des cercles inscrits aux triangles ABC.

2° Ensemble des centres des cercles exinscrits dans l'angle A.

3° Ensemble des orthocentres des triangles ABC.

(On cherchera dans chacun des cas à évaluer l'angle sous lequel on voit BC du point étudié.)

521. — Soit BC une corde d'un cercle, et A un point du cercle. Construire une corde du cercle, passant par A et dont le milieu est sur BC.

522. — On donne une droite xy et deux points A et B d'un même côté de cette droite. Construire sur xy, un point M tel que :

$$\widehat{yMA} = 2\,\widehat{BMx}.$$

523. — Construire un triangle isocèle ABC, de sommet principal A, connaissant les longueurs de ses hauteurs.

*

Construire un triangle isocèle ABC (AB=AC) dans lequel on pose : $a = BC$; $b = AB = AC$, $h = AH$ (hauteur issue de A), R = rayon du cercle circonscrit, *connaissant :*

524. — a et h.

525. — b et h.

526. — $a + b$ et h.

527. — L'angle $\widehat{A}$ et h.

528. — b et la hauteur issue de B.

529. — R et a.

530. — R et h.

531. — R et l'angle $\widehat{A}$.

532. — a, et sachant qu'un angle est le double d'un autre.

533. — h, et sachant que le triangle est équilatéral.

*

Construire un triangle ABC *rectangle* en A, dans lequel on pose : $a = BC$; $b = AC$; $h = AH$ (hauteur issue de A), *connaissant :*

534. — a et l'angle $\widehat{ABC}$.

535. — a et b.

536. — b et h.

537. — a et h.

a et la médiane BB'.

*

Construire un triangle ABC dans lequel on pose $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$, R = rayon du cercle circonscrit, *connaissant :*

538. — b et c, et sachant que

$$2\,\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}.$$

539. — b, c, et R.

540. — b, R et la médiane BB'.

541. — L'angle $\widehat{A}$ et les hauteurs BH et CK.

542. — a et les médianes BB' et CC'.

543. — a et les médianes AA' et BB'.

544. — b, c et la médiane AA'.

545. — a, la hauteur AH et la médiane AA'.

546. — a, la hauteur BK et la médiane BB'.

547. — b, c et une hauteur (2 cas).

548. — Deux angles et le périmètre (porter sur BC à l'extérieur de BC des segments BB' = BA et CC' = CA).

549. — a, l'angle $\hat{B}$ et $b + c$.

550. — a, l'angle $\hat{B}$ et $b - c$.

551. — Les milieux des côtés.

552. — Les trois médianes.

*

Construire un triangle ABC *connaissant :*

553. — Un côté BC, une hauteur et une médiane (plusieurs cas).

554. — L'angle $\hat{A}$ et les médianes issues de B et C.

555. — L'angle A, le rayon du cercle inscrit et la hauteur AH.

556. — Peut-on tracer trois cercles ayant leurs centres aux sommets d'un triangle et tangents extérieurement entre eux deux à deux? Définir, par rapport au triangle, le cercle qui passe par les trois points de contact.

557. — Construire un cercle de rayon donné tangent à deux cercles donnés.

558. — Construire un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites parallèles données.

*

Construire un triangle isocèle ABC (AB=AC) *connaissant :*

559. — Le rayon r du cercle inscrit et la hauteur AH.

560. — L'angle $\hat{B}$ et le rayon du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{B}$.

*

Construire un triangle ABC (BC = a, CA = b, AB = c) *connaissant :*

561. — $\hat{A}$ et les deux segments que sa bissectrice détermine sur le côté opposé.

562. — Les pieds des hauteurs.

563. — c, $\hat{A}$ et la bissectrice AD.

564. — $\hat{A}$, $\hat{B}$ et une hauteur.

565. — La hauteur AH, la médiane AM et la bissectrice AD (utiliser le cercle circonscrit).

566. — $\hat{C}$, la hauteur CD, la bissectrice CE.

567. — A et 2 hauteurs.

568. — La bissectrice AD, la hauteur AH et le rayon du cercle circonscrit.

569. — Le rayon du cercle circonscrit, un côté, une hauteur.

570. — Le rayon du cercle inscrit, le rayon d'un cercle exinscrit et $\hat{A}$.

571. — Les centres des trois cercles exinscrits.

572. — Le sommet A, le cercle circonscrit et le point G de concours des médianes.

573. — Le sommet A, le cercle circonscrit et l'orthocentre.

574. — Le sommet A, la droite qui porte BC, la médiane AM et $\hat{A}$.

575. — La médiane AM et les angles qu'elle forme avec AB et AC.

576. — b, c et sachant que $\hat{B} = 2\hat{C}$.

577. — a, $\hat{A}$ et le rayon du cercle inscrit.

578. — b, c et une hauteur.

*

579. — Ensemble des points d'où on peut mener à un cercle deux tangentes faisant un angle de 60°. Généraliser à un angle quelconque.

580. — Soit un triangle ABC, I le centre de son cercle inscrit H, K, L les points de contact avec BC, CA, AB. Évaluer les angles $\widehat{KIL}$, $\widehat{LIH}$, $\widehat{HIK}$. En déduire la construction d'un triangle connaissant le rayon du cercle inscrit et deux angles.

581. — Construire un triangle ABC, connaissant le rayon du cercle inscrit, l'angle $\hat{A}$ et le côté AB.

582. — 1° Tracer par un point A une droite (D) équidistante de deux points donnés B et C (c'est-à-dire telle que les distances de B et C à (D) soient égales).

2° Tracer une droite équidistante de trois points donnés.

583. — 1° On trace un quadrilatère convexe circonscrit à un cercle. Montrer que la somme

de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres. Réciproquement, tout quadrilatère convexe dans lequel les sommes des côtés opposés sont égales est circonscriptible à un cercle.

2° Si on ne sait pas si le quadrilatère circonscrit est convexe, montrer que la somme de deux côtés convenablement choisis est égale à la somme des deux autres. Étudier la réciproque.

584. — Le cercle inscrit dans un triangle ABC touche AB en E et le cercle exinscrit dans l'angle A touche AB en E'.

1° Démontrer que EE' = BC.

2° Construire un triangle dont on connaît l'angle $\widehat{A}$, le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A et le côté BC.

3° Évaluer AE' en fonction des côtés du triangle et en déduire que si les demi-droites qui portent les côtés AB et AC sont fixes, la droite BC reste tangente à un cercle fixe lorsque le triangle ABC se transforme en gardant un périmètre constant.

585. — Étant donné un triangle ABC, on trace par un point quelconque M de la droite BC une droite variable qui coupe AB en D et AC en E. Les cercles circonscrits aux triangles BDM et CEM se coupent en M et P. Trouver l'ensemble des points P.

586. — On donne un cercle (O) de centre O et un diamètre AB. Par le point A on trace une corde AC et la tangente au cercle en C. Trouver l'ensemble des points de rencontre M de cette tangente avec la parallèle à AC menée par O.

587. — Soit deux cercles de centres O et O', de rayons R et R' ($R \geqslant R'$). Une droite est tangente commune aux deux cercles, si elle touche le premier en T, le deuxième en T'.

1° Par O' on trace la parallèle à TT', qui coupe OT en M. Évaluer OM dans les différents cas possibles. En déduire une construction de TT'.

2° On donne $OO' = 10$, $R = 5$, $R' = 3$. Construire toutes les tangentes communes aux deux cercles.

3° Même question R et R' conservant les mêmes valeurs, prendre $OO' = 8$, puis $OO' = 6$.

588. — 1° Construire une corde d'un cercle, de longueur donnée et passant par un point donné.

2° On donne deux cercles de centres respectifs A et B. Tracer une droite tangente au cercle (A) qui soit coupée par l'autre cercle suivant une corde de longueur donnée.

3° Les deux cercles précédents étant donnés, tracer une droite sur laquelle le cercle (A) découpe une corde de longueur a, et le cercle (B) une corde de longueur b.

589. — Construire un parallélogramme connaissant les diagonales et un côté; les côtés et une diagonale.

590. — Construire un trapèze connaissant les longueurs des quatre côtés.

591. — On marque les milieux des côtés d'un quadrilatère; démontrer qu'ils sont les sommets d'un parallélogramme.

LIVRE IV

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

■

CHAPITRE VIII

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. DÉFINITION. EXEMPLES

104. Équations algébriques sur R. — Rappelons que toute équation algébrique à une inconnue sur l'ensemble des nombres relatifs est la formulation abrégée d'un problème du type suivant : étant donné deux expressions algébriques $f(x)$ et $g(x)$ de la variable x, existe-t-il une (ou plusieurs) valeur numérique de x pour laquelle les deux expressions prennent des valeurs numériques égales?

Nous écrirons une équation (E) sous la forme :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad f(x) = g(x). \tag{E}$$

EXEMPLES.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad x = 3. \tag{1}$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad \frac{x}{x-1} = \frac{8}{x+2}. \tag{2}$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}. \tag{3}$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2}. \tag{4}$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad x^2 + 4 = 0. \tag{5}$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad \sqrt{x-6} = \sqrt{5-x}. \tag{6}$$

Si elle existe, une valeur de x pour laquelle les *deux membres* de l'équation, $f(x)$ et $g(x)$, prennent des valeurs numériques égales, s'appelle une ***solution*** ou une *racine* de l'équation. On dit qu'elle ***vérifie l'équation*** ou qu'elle ***satisfait à l'équation.***

Exemples.

L'équation (1) admet la solution évidente 3, et n'en admet pas d'autre.

4 est *une* racine de l'équation (2).

5, 8, $\sqrt{2}$ et bien d'autres nombres, vérifient l'équation (3).

L'expression algébrique $f(x)$ est définie sur un certain domaine $\mathfrak{D}_1$, de même $g(x)$ est définie sur un certain domaine $\mathfrak{D}_2$. Soit x_0 une solution de l'équation : $x \in R \quad \exists x? \quad f(x) = g(x) \quad (E)$.

Si $f(x_0) = g(x_0)$, c'est d'abord que $f(x_0)$ et $g(x_0)$ *existent*,

donc : $$x_0 \in \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2.$$

Nous appellerons $\mathfrak{D}$ le ***domaine de validité*** **de (E).**

Exemples.

Pour l'équation (1) $\mathfrak{D}_1 = R$, $\mathfrak{D}_2 = R$, $\mathfrak{D} = R$.

Pour (2) $\mathfrak{D}_1 = R - \} 1 \{$, $\mathfrak{D}_2 = R - \} -2 \{$, $\mathfrak{D} = R - \} -2; 1 \{$.

Pour (3) $\mathfrak{D}_1 = R - \} 1 \{$, $\mathfrak{D}_2 = R - \} 1 \{$, $\mathfrak{D} = R - \} 1 \{$.

Pour (4) $\mathfrak{D}_1$ est caractérisé par $x \geqslant 2$, $\mathfrak{D}_2$ également, $\mathfrak{D}$ est caractérisé par $x \geqslant 2$.

Pour (5) $\mathfrak{D}_1 = R$, $\mathfrak{D}_2 = R$, $\mathfrak{D} = R$.

Pour (6) $\mathfrak{D}_1$ est caractérisé par $x \geqslant 6$ et $\mathfrak{D}_2$ par $x \leqslant 5$, donc $\mathfrak{D}$ est vide :

$$\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = \varnothing.$$

Quand le domaine de validité d'une équation est vide, l'équation n'a pas de solution.

Une valeur de x autre que l'une des racines de l'équation (E) ***ne vérifie pas l'équation.*** Soit x_1 une telle valeur. Deux cas sont possibles.

1° $x_1 \in \mathfrak{D}$, $f(x_1)$ et $g(x_1)$ existent, avec $f(x_1) \neq g(x_1)$.

2° $x_1 \notin \mathfrak{D}$, l'une au moins des expressions $f(x)$ et $g(x)$ n'est pas définie pour $x = x_1$.

Exemples.

10 ne vérifie pas l'équation (2) car $\dfrac{10}{10-1} \neq \dfrac{8}{10+2}$.

Le nombre 1 ne vérifie pas l'équation (3) car les membres de cette équation ne sont pas définis pour $x = 1$.

Pour une raison analogue 0 ne vérifie pas l'équation (4).

105. Résoudre une équation. — La solution du problème que traduit une équation comporte deux étapes :

1° Chercher s'il existe une (ou plusieurs) valeur de l'inconnue qui vérifie l'équation.

2° S'il existe une telle (ou de telles) valeur, la (les) calculer effectivement d'une manière exacte, ou en donner une valeur suffisamment approchée.

Exemples.

Il ne suffit pas, pour résoudre l'équation (2), de dire qu'elle admet la solution 4. Elle en admet peut-être d'autres. Nous apprendrons à la résoudre et nous montrerons qu'elle admet deux solutions, 4 et 2, et point d'autre.

Il est facile de résoudre l'équation (3) : elle admet pour solutions tous les nombres réels, 1 excepté.

On voit de même que tous les nombres x_0 tels que $x_0 \geqslant 2$ sont solutions de (4), et ceux-là seulement.

L'équation (5) n'a pas de solution car x^2 étant positif ou nul pour toute valeur de x, $x^2 + 4$ ne saurait être nul. Nous *démontrons* ainsi que cette équation n'a pas de racine; nous ne nous contentons pas de dire que nous n'en trouvons pas.

Il est essentiel de déterminer le domaine de validité d'une équation et d'en prendre note soigneusement. Puisque les racines, s'il y en a, ne peuvent se trouver que dans ce domaine $\mathcal{D}$ et que les calculs que l'on peut être conduit à faire ne sont légitimes que sur $\mathcal{D}$, le problème que traduit l'équation (E) peut être remplacé par le problème

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x ? \qquad f(x) = g(x). \tag{E}$$

En l'écrivant sous cette forme, on se prémunit contre des risques d'erreur ou d'oubli.

D'une façon générale, nous appellerons équation sur un domaine $\Delta \subset \mathrm{R}$ un problème du type :

$$x \in \Delta \quad \exists x ? \quad f(x) = g(x). \tag{F}$$

Exemple. L'équation : $x \in \mathrm{R}^+ \quad \exists x ? \qquad x^2 = 25.$

admet la solution unique $\qquad x = 5,\ 5 \in \mathrm{R}^+,$

tandis que l'équation : $\quad x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad x^2 = 25,$

admet deux solutions : $\qquad -5$ et $+5.$

Paramètres. — Les expressions algébriques $f(x)$ et $g(x)$, qui constituent les membres d'une équation, peuvent contenir d'autres lettres que x, mais ces lettres représentent alors des nombres *connus*, bien que non spécifiés numériquement. La question que pose l'équation ne porte pas sur ces lettres que l'on appelle des *paramètres*. La réponse fait, en général, intervenir ces paramètres.

Exemple.

L'équation $\qquad x \in \mathrm{R} \quad a \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad ax + a = 5x + 4 \qquad (7)$

conduit à la réponse suivante :

1° $a \neq 5, \quad x = \dfrac{4 - a}{a - 5}$ $\qquad$ 2° $a = 5$ pas de solution.

et donne un premier exemple de *discussion*.

Exercices. *Étudier les équations suivantes : domaine de validité; résolution ou constatation d'une impossibilité, voire d'une indétermination sur un certain ensemble; discussion, si l'équation contient un paramètre.*

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ?$

592. $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}$.

593. $x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3}$.

594. $x + \sqrt{x-3} = 5 + \sqrt{x-3}$.

595. $x + \dfrac{1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$.

596. $x + \dfrac{1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

597. $\dfrac{x}{x^3-8} = \dfrac{2}{x^3-8}$.

598. $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

599. $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{a}{\sqrt{x-2}}$.

600. $\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2-x}} = \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$.

601. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-3}} = \dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$.

602. $\sqrt{ax} = a$.

603. $\sqrt{bx} = -b$.

604. $x + \sqrt{x^2} = 0$.

605. $x + \sqrt{x^2} = 2$.

606. $\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{x-1}$.

607. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 16$.

608. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x} = a$.

609. $\sqrt{(1-x)^2} = \sqrt{(x-1)^2}$.

610. $ax + b\sqrt{x^2} = 0$.

Exercices.

II. ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

106. Définition. — Nous allons poursuivre l'étude des équations en revisant un cas particulier, simple et fondamental. La résolution d'autres équations, plus compliquées, que nous aborderons par la suite, se ramènera en dernière analyse à celle d'une équation de ce type.

☆ **Une équation entière du premier degré et de forme réduite est une équation du type :**

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax + b = 0 \tag{1}$$

où a et b sont des nombres (ou des expressions algébriques par rapport à des paramètres); a n'est pas nul, sinon il n'y aurait plus d'équation.

107. Résolution de l'équation $x \in \mathrm{R}\ \exists x?\ \ ax + b = 0$. — Nous connaissons le cas particulier de ce problème :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x + \alpha = 0 \tag{1}$$

que nous avons étudié, à propos des ensembles symétrisés et des nombres opposés.

La réponse est qu'il existe une solution et une seule : le nombre $(-\alpha)$, l'opposé de α.

Le cas général :

$$a \neq 0 \quad x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad ax + b = 0 \qquad (2),$$

se ramène à celui-là en utilisant l'identité évidente :

$$a \neq 0 \quad x \in \mathrm{R} \quad \forall x \quad ax + b \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right). \qquad (3).$$

En effet, s'il existe une solution x_0,

$$ax_0 + b = 0 \iff a\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = 0;$$

et comme $a \neq 0$, c'est le second facteur qui est nul.

$$ax_0 + b = 0 \iff x_0 + \frac{b}{a} = 0.$$

La solution ne peut être que le nombre $-\frac{b}{a}$, en vertu de (1), et ce nombre vérifie effectivement (2) en vertu de l'identité (3).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

▪ THÉORÈME. — **L'équation (véritable, avec $a \neq 0$)**

$$x \in \mathbf{R} \quad \exists x ? \quad ax + b = 0$$

admet la solution unique $-\frac{b}{a}$.

REMARQUE. — Lorsque les coefficients a et b sont des expressions algébriques par rapport à des paramètres, il peut arriver que a s'annule pour certaines valeurs des paramètres.

Le problème :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad 0 \times x + b = 0$$

peut continuer à se poser, mais sa résolution ne dépend plus en réalité du choix de x. Il n'y a plus à proprement parler d'équation.

Si $b \neq 0$, le problème posé est *impossible*.

Si $b = 0$, toute valeur de x convient : le problème est *indéterminé*.

Nous résumerons cette étude dans le tableau ci-après :

Discussion de l'équation du premier degré

$$x \in \mathbf{R} \quad \exists x ? \qquad ax + b = 0.$$

$a \neq 0$:	solution unique	$-\frac{b}{a}$.
$a = 0$	$b \neq 0$:	problème impossible.
$a = 0$	$b = 0$:	problème indéterminé.

Exemple.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \frac{m-1}{m}x = m + p$$

Cette équation n'a de sens que pour $m \neq 0$.

Pour $m - 1 \neq 0$ ou $m \neq 1$, la solution unique est :

$$x = \frac{m(m+p)}{m-1}.$$

Si $m = 1$ le problème devient

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad 0 = 1 + p$$

Si $p \neq -1$ impossibilité.
Si $p = -1$ indétermination.

Résumé de la discussion :

$$m \neq 0 \begin{cases} m \neq 1 & \textit{une solution} \quad x = \dfrac{m(m+p)}{m-1} \\ m = 1 & \begin{cases} p \neq -1 & \textit{impossibilité} \\ p = -1 & \textit{indétermination } (x \text{ arbitraire}) \end{cases} \end{cases}$$

$m = 0$ *impossibilité.*

Exercices. *Discuter et résoudre les équations* $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

611. $(m-1)x = 2m - 2.$ **612.** $(a-b)x + \frac{a-c}{b} = 0.$

613. $(m^2-1)x + m - 1 = 0.$ **614.** $(a+1)x + (b-1) = 0.$

615. $abcx + (a-b)(b-c)(c-a) = 0.$

616. $\frac{a+1}{a-1}x + \frac{a+b}{a-b} = 0.$ **617.** $\left(1 - \frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{a} = 0.$

618. $(a-1)(a-2)x + (a-b) = 0.$

619. $\sqrt{a-b}\,x + a - b + c = 0.$

620. $\frac{a-b}{a}x = a + 1.$ **621.** $\frac{a-1}{a-2}x = a + b.$

622. $\frac{a-1}{a}x = a - b.$ **623.** $(a-b)x = \frac{c}{a}.$

624. $(a-2)x = \left[\frac{a-1}{a}c - a + b\right].$

625. $x[(a-1)b - a] = \left[\frac{a-b}{a}c - a + 1\right].$

Exercices.

III. THÉORÈMES GÉNÉRAUX CONCERNANT LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A UNE INCONNUE

108. Transformations régulières. — Étant donné une équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) = g(x) \tag{E}$$

on est souvent conduit, pour la résoudre, à la *transformer*, c'est-à-dire à lui substituer une autre équation (E′) obtenue à partir de $f(x)$ et de $g(x)$ par des calculs algébriques.

Mais une telle transformation ne se légitime qu'à la double condition de ne perdre aucune solution de (E) et de n'introduire dans (E′) aucune solution étrangère à (E).

Exemple. $$x \in \mathrm{R} \quad \sqrt{x^2 + 8x - 8} = -x. \tag{E}$$

On peut former une autre équation (E′) en élevant les deux membres au carré :

$$x \in \mathrm{R} \quad x^2 + 8x - 8 = x^2 \tag{E′}$$

Comme $a = b \implies a^2 = b^2$, on voit que toute solution de (E) appartient à (E′).

(E′) admet la solution $x = 1$, qui, portée dans (E), donne au membre de gauche la valeur 1 et à celui de droite la valeur -1.

1 est une solution de (E′) mais elle est étrangère à (E). On ne peut donc remplacer purement est simplement (E) par (E′).

Se rappelant, d'autre part, l'importance, pour une équation, de son domaine de validité, on saisira la raison et l'intérêt de la définition suivante :

☆ DÉFINITION. — **On dit que la transformation $\mathcal{T}$ qui change l'équation (E_1) en l'équation (E_2) est une transformation régulière sur le DOMAINE Δ si les équations**

$$x \in \Delta \quad \exists x? \qquad f(x) = g(x) \tag{E_1}$$
$$x \in \Delta \quad \exists x? \qquad p(x) = q(x) \tag{E_2}$$

ont le même ensemble (éventuellement vide) de solutions.

Le passage de (E_1) à (E_2) est donc une transformation régulière dans les deux (et seuls) cas suivants :

a) aucun élément de Δ ne vérifie (E_1), aucun ne vérifie (E_2).

b) certains éléments de Δ vérifient (E_1), certains vérifient (E_2) et toute solution de l'une est solution de l'autre.

Ces conditions peuvent s'écrire :

a) $x_0 \in \Delta; \quad \forall x_0 \ (E_1)$ non vérifiée $\iff \forall x_0 \ (E_2)$ non vérifiée.

b) $x_0 \in \Delta; \quad \exists x_0 \ f(x_0) = g(x_0) \iff \exists x_0 \ p(x_0) = q(x_0)$.

EXEMPLES.

Le passage de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} - \{1\} \quad \exists x? \quad (x-1)(x-2) + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \qquad (\mathrm{E}_1)$$

à l'équation :

$$x \in \mathrm{R} - \{1\} \quad \exists x? \quad (x-1)(x-2) = 0 \qquad (\mathrm{E}_2)$$

est régulier sur $\Delta = \mathrm{R} - \{1\}$, car l'une et l'autre équation a sur Δ la seule solution 2. *Il n'en irait pas de même* sur R, car (E_1) n'admet pas la solution 1 que (E_2) admet.

109. Théorèmes concernant les transformations régulières. — Nous venons de donner une définition d'une extrême généralité; pratiquement nous n'utiliserons qu'une catégorie restreinte de transformations régulières, correspondant à des cas usuels : suppression de dénominateurs, transposition d'un membre à l'autre, toute manipulation dont le lecteur possède déjà une certaine pratique.

On voit aussitôt que si l'on effectue successivement la transformation $\mathcal{T}$ régulière sur Δ, de (E_1) en (E_2), puis la transformation $\mathcal{T}'$, régulière sur Δ, de (E_2) en (E_3), le passage de (E_1) à (E_3) constitue une transformation régulière sur Δ; (E_1) et (E_3) ayant dans Δ le même ensemble, éventuellement vide, de solutions. Et c'est par de telles suites de transformations que l'on procède en pratique.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

- THÉORÈME I. — **Si l'on fait successivement la transformation, régulière sur le domaine Δ, d'une équation (E_1) en une équation (E_2), puis la transformation, régulière sur le même domaine, de l'équation (E_2) en l'équation (E_3), le passage de (E_1) à (E_3) constitue une transformation régulière sur le domaine Δ.**

RÉDUCTION, SIMPLIFICATIONS DIVERSES DE CHAQUE MEMBRE D'UNE ÉQUATION. — Étant donné une équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad f(x) = g(x) \qquad (\mathrm{E})$$

l'une des opérations les plus fréquentes au cours de sa résolution, consiste à réduire ou à simplifier individuellement chaque membre.

De telles opérations ne peuvent être légitimes que sur le domaine de validité de l'équation, $\mathcal{D}$.

EXEMPLE.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \qquad (\mathrm{E})$$

Le domaine de validité est $\mathcal{D} = \mathrm{R} - \{1\}$.

La simplification est possible sur $\mathcal{D}$, et l'on forme une nouvelle équation :

$$x \in \mathrm{R} - \{1\} \quad \exists x? \quad x + 1 = 2 \qquad (\mathrm{E}')$$

à condition d'examiner si la transformation est régulière — problème que nous aborderons immédiatement, sous son aspect général.

Pour souligner l'importance du domaine de validité $\mathcal{D}$ d'une équation nous écrirons l'équation sous la forme :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad f(x) = g(x) \qquad \text{(E)}$$

et nous nous limiterons aux transformations *régulières sur* $\mathcal{D}$.

En élargissant un peu la question, demandons-nous ce qu'il advient si l'on remplace $f(x)$ par une expression algébrique $p(x)$ définie sur $\mathcal{D}$ et qui prend pour toute valeur $x_0 \in \mathcal{D}$ la même valeur que $f(x)$.

On obtient une nouvelle équation :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad p(x) = g(x). \qquad \text{(E')}$$

Dans le cas *a*) où (E) n'a pas de solution, on voit que :

$$\begin{matrix} x_1 \in \mathcal{D} & \text{et} & \forall x_1 & f(x_1) \neq g(x_1) \\ & \text{et} & \forall x_1 & f(x_1) = p(x_1) \end{matrix} \implies x_1 \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \forall x_1 \quad p(x_1) \neq g(x_1).$$

Donc (E') n'admet pas de solution. Et réciproquement dans le sens de (E') vers (E).

Dans le cas *b*) où (E) admet une, ou des, solution x_0, ... on voit que

$$\begin{matrix} x_0 \in \mathcal{D} & \exists x_0 & \text{et} & f(x_0) = g(x_0) \\ \text{et} & \forall x_0 & & f(x_0) = p(x_0) \end{matrix} \implies x_0 \in \mathcal{D} \quad \exists x_0 \quad \text{et} \quad p(x_0) = g(x_0).$$

toute solution de (E) vérifie (E'); et réciproquement, dans le sens de (E') vers (E).

- THÉORÈME II. — **Soit $\mathcal{D}$ le domaine de validité de l'équation :**

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) = g(x) \qquad \text{(E)}$$

Soit $p(x)$ une expression algébrique définie sur $\mathcal{D}$ et qui prend pour toute valeur $x_0 \in \mathcal{D}$ la même valeur que $f(x)$; soit encore $q(x)$ une expression algébrique définie sur $\mathcal{D}$ et prenant pour toute valeur $x_0 \in \mathcal{D}$ la même valeur que $g(x)$; alors on passe de (E) à l'équation :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad p(x) = q(x) \qquad \text{(E')}$$

par une transformation régulière sur $\mathcal{D}$.

Exemples.

1. Revenons à l'équation ci-dessus :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2. \qquad \text{(E)}$$

Nous avons formé l'équation :

$$x \in \mathrm{R} - \{1\} \quad \exists x? \qquad x + 1 = 2, \qquad \text{(E')}$$

Nous savons maintenant que cette transformation est régulière. Or pour (E'), la réponse est NON, car :

$$x \in \mathrm{R} \quad \text{et} \quad x + 1 = 2 \implies x = 1 \quad \text{et} \quad 1 \notin \mathrm{R} - \{1\}.$$

(E) n'a donc pas de solution.

2.

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \; (x+1)^2 + (x-3)^2 - 2x^2 + 5x - 10 = 2x - 1 - 2(x+3) \quad (\mathrm{E})$

$f(x)$ et $g(x)$ étant des polynomes, ils sont définis sur R, et $\mathfrak{D} = \mathrm{R}$. En les réduisant on obtient des polynomes $p(x)$ et $q(x)$ qui prennent les mêmes valeurs que f et g respectivement.

Le théorème II s'applique, on obtient l'équation

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x = -7 \qquad (\mathrm{E}')$$

dont l'unique solution évidente -7 est l'unique solution de (E). Cet exemple a une portée générale. Formulons donc le Corollaire suivant.

▪ COROLLAIRE DU THÉORÈME II. — **Si les deux membres d'une équation sont des polynomes, on obtient, en réduisant les deux membres, une nouvelle équation qui admet le même ensemble de solutions que l'ancienne.**

Autres exemples.

1. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad 3\sqrt{x-1} + x + \sqrt{x-1} + 1 - 4\sqrt{x-1} = 0 \quad (\mathrm{E}).$

Le domaine de validité de cette équation est l'ensemble $\mathfrak{D}$ caractérisé par $x \geqslant 1$.

Sur ce domaine $\mathfrak{D}$ le premier membre prend les mêmes valeurs que le binome $x + 1$. L'équation proposée admet donc les mêmes solutions sur $\mathfrak{D}$ que l'équation :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad x + 1 = 0. \qquad (\mathrm{E}')$$

La réponse est NON, car la valeur -1 qui annule $x + 1$ n'appartient pas à $\mathfrak{D}$. (E′) n'a pas de solution, (E) n'a pas de solution.

2. Soit encore l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \frac{1}{x-1} + x - \frac{1}{x-1} = 2. \qquad (\mathrm{F})$$

Le domaine de validité est : $\quad \mathfrak{D} = \mathrm{R} - \{1\}$.

Sur ce domaine $\mathfrak{D}$ le premier membre prend la même valeur que le monôme x L'équation proposée admet donc les mêmes solutions sur $\mathfrak{D}$ que l'équation :

$$x \in \mathfrak{D} \qquad \exists x? \quad x = 2 \qquad (\mathrm{F}')$$

La réponse est OUI, la solution évidente de l'équation (F′) est $2 \in \mathfrak{D}$. C'est la solution unique de (F).

110. Transposition d'un membre à l'autre. — Soit, sur son domaine de validité $\mathfrak{D}$, l'équation :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \;\; f(x) = g_1(x) + g_2(x). \qquad (\mathrm{E})$$

Il est clair que, d'après la définition même de la différence :

$$x_0 \in \mathfrak{D} \quad \exists x_0 \qquad f(x_0) = g_1(x_0) + g_2(x_0)$$
$$\Longleftrightarrow \quad x_0 \in \mathfrak{D} \quad \exists x_0 \;\; f(x_0) - g_1(x_0) = g_2(x_0).$$

Donc toute solution de (E) est solution de :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad f(x) - g_1(x) = g_2(x) \qquad \text{(E')}$$

et *réciproquement*.

Les équations (E) et (E') ont le même ensemble de solutions.

- THÉORÈME III. — **Si l'on transpose un terme, avec changement de signe, d'un membre à l'autre d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a le même ensemble de solutions que l'ancienne.**

Cette opération semble ne pas mettre en cause le domaine de validité. On peut en effet surseoir à la recherche de ce domaine et transposer le terme $g_2(x)$, *à condition de ne pas effectuer*.

Exemple.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x + \sqrt{x-4} = 1 + \sqrt{x-4} \qquad \text{(E)}$$

On peut, si l'on veut (mais nous ne le conseillons pas), former :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x + \sqrt{x-4} - \sqrt{x-4} = 1. \qquad \text{(E')}$$

Mais, si l'on veut effectuer, il convient (théorème II) de ne le faire que sur $\mathfrak{D}$ caractérisé par $x \geqslant 4$.

On obtient :

$$x \geqslant 4 \quad \exists x? \quad x = 1 \qquad \text{(E'')}$$

Réponse : NON.

Exemples d'application du théorème III.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x^2 + 1 = 4 + 2x \qquad \text{(E)}$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x^2 - 2x + 1 = 4. \qquad \text{(E')}$$

Soit encore l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \frac{1}{x(x+1)} = -1 - \frac{1}{x+1}, \qquad \text{(F)}$$

Son domaine de validité est $\mathfrak{D} = \mathrm{R} - \{-1, 0\}$.

Appliquons le Théorème III à l'expression $-\dfrac{1}{x+1}$ qui figure dans le membre de droite. Il vient : $x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{x+1} = -1,$ (F')

puis

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad \frac{x+1}{x(x+1)} = -1, \qquad \text{(F'')}$$

obtenue en effectuant le membre de gauche.

Enfin

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad \frac{1}{x} = -1, \qquad \text{(F''')}$$

car la simplification est légitime sur $\mathfrak{D}$.

On obtient donc une équation dont la réponse est NON, car :

$$\frac{1}{x} = -1 \implies x = -1 \quad \text{et} \quad -1 \notin \mathfrak{D}.$$

REMARQUE[1]. — Étant donné une équation, on peut, en vertu du Théorème III, transposer le second membre en entier. L'équation prend alors la forme :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad h(x) = 0.$$

111. Généralisation du théorème de transposition. — On peut interpréter le théorème de transposition comme la possibilité d'effectuer une transformation régulière sur le domaine de définition $\mathcal{D}$ de l'équation :

$$x \in \mathcal{D} \quad \mathrm{E}\,x? \qquad f(x) = g_1(x) + g_2(x), \qquad \text{(E)}$$

en ajoutant aux deux membres la même expression $-g_2(x)$.

On peut alors se demander si la même possibilité subsiste en ajoutant aux deux membres une expression algébrique $\mathrm{A}(x)$, quelconque, *mais définie sur* $\mathcal{D}$.

Formons alors l'équation :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad f(x) + \mathrm{A}(x) = g(x) + \mathrm{A}(x), \qquad \text{(E')}$$

D'après les propriétés fondamentales de l'égalité, il est clair que dans le cas *a*) où (E) admet des solutions $x_0, \dots$

$$x_0 \in \mathcal{D} \quad \exists x_0 \quad \text{et} \quad f(x_0) = g(x_0)$$
$$\Longleftrightarrow \quad x_0 \in \mathcal{D} \quad \exists x_0 \quad \text{et} \quad f(x_0) + \mathrm{A}(x_0) = g(x_0) + \mathrm{A}(x_0).$$

Toute solution de (E) est solution de (E'), et réciproquement. Nous pouvons donc énoncer un théorème plus général que le Théorème III.

■ **THÉORÈME IV. — Soit $\mathcal{D}$ le domaine de validité de l'équation :**

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) = g(x) \qquad \text{(E)}$$

et soit $\mathrm{A}(x)$ une expression algébrique définie sur $\mathcal{D}$; alors l'équation :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad f(x) + \mathrm{A}(x) = g(x) + \mathrm{A}(x) \quad \text{(E')}$$

admet les mêmes solutions sur $\mathcal{D}$ que l'équation (E).

EXEMPLE.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 + 6x = 7, \qquad \text{(E)}$$

et :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 + 6x + 9 = 16, \qquad \text{(E')}$$

ce qui permet d'écrire :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x+3)^2 = 4^2 \qquad \text{(E')}$$

et conduit à la résolution, que nous étudierons plus tard, mais dont nous sommes ici très proches.

1. Le mathématicien Al Khovarismî a écrit au début du VIIᵉ siècle un livre intitulé : *Al djebr w'al moukâbala*, titre qui signifie à peu près « action de faire passer et d'agencer les parties d'un tout ». L'auteur décrit dans le langage de son époque le théorème III et ses conséquences. Le mot *algèbre* vient du titre de son livre.

112. Équations rationnelles et entières. — Lorsque les deux membres $f(x)$ et $g(x)$ de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad f(x) = g(x)$$

sont des polynomes, le domaine de validité de l'équation coïncide avec R et les théorèmes précédents permettent de mettre l'équation sous la forme :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad \mathrm{P}(x) = 0$$

où $\mathrm{P}(x)$ désigne un polynome réduit.

☆ De telles équations sont dites **rationnelles et entières.**

S'il arrive que $\mathrm{P}(x)$, après réduction, soit du premier degré, on sait alors résoudre (et, le cas échéant, discuter) l'équation.

EXEMPLES.

1. $$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad (x-3)(x-5) = (x-2)^2 + 1. \qquad (1)$$

D'après le théorème I, on peut développer chaque membre :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad x^2 - 8x + 15 = x^2 - 4x + 5. \qquad (2)$$

D'après les théorèmes I et III on peut écrire :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad x^2 - 8x + 15 - x^2 + 4x - 5 = 0, \qquad (3)$$

et effectuer :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad -4x + 10 = 0. \qquad (4)$$

Réponse : OUI $\qquad x = \frac{5}{2}.$

2. $$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad (x+a)^2 = x^2 + 6ax + a^2 - a + 5 \qquad (\mathrm{I})$$

On obtient successivement :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 6ax + a^2 - a + 5 \qquad (\mathrm{II})$$
$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad -4ax = -a + 5. \qquad (\mathrm{III})$$

Si $\qquad a \neq 0 \qquad x = \frac{a-5}{4a}.$

Si $\qquad a = 0 \qquad$ Problème impossible.

113. Problème posé par les dénominateurs. — Soit $\mathfrak{D}$ le domaine de validité de l'équation :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists\, x? \qquad f(x) = g(x), \qquad (\mathrm{E})$$

et soit $\mathrm{B}(x)$ une expression algébrique. Si l'on veut transformer régulièrement (E) on évitera d'en multiplier les deux membres par un nombre éventuellement nul. La question se pose alors d'utiliser une expression algébrique toujours définie sur $\mathfrak{D}$, et jamais nulle sur $\mathfrak{D}$.

On forme alors l'équation :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists\, x? \qquad f(x)\,\mathrm{B}(x) = g(x)\,\mathrm{B}(x). \qquad (\mathrm{E}')$$

Il est clair que :

$$\begin{array}{llll} & x_0 \in \mathcal{D} & \exists\, x_0 & f(x_0) = g(x_0) \\ \Longrightarrow & x_0 \in \mathcal{D} & \exists\, x_0 & f(x_0)\,B(x_0) = g(x_0)\,B(x_0) \end{array}$$

et que :

$$\begin{array}{llll} & x_0 \in \mathcal{D} & \exists\, x_0 & f(x_0)\,B(x_0) = g(x_0)\,B(x_0) \quad \text{et} \quad B(x_0) \neq 0 \\ \Longrightarrow & x_0 \in \mathcal{D} & \exists\, x_0 & f(x_0) = g(x_0). \end{array}$$

Toute solution de (E) est solution de (E′), et réciproquement. Nous énoncerons donc le théorème suivant.

▪ THÉORÈME V. — **Soit $\mathcal{D}$ le domaine de validité de l'équation**

$$x \in R \quad \exists\, x? \qquad f(x) = g(x) \qquad \text{(E)}$$

et soit $B(x)$ une expression algébrique toujours définie et jamais nulle sur $\mathcal{D}$; alors l'équation

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists\, x? \qquad f(x)\,B(x) = g(x)\,B(x) \qquad \text{(E')}$$

admet les mêmes solutions que (E) sur D.

Exemples.

1.
$$x \in R \quad \exists\, x? \qquad \frac{3}{4}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

On prend $B(x) = 12$, d'où :

$$\begin{array}{lll} x \in R & \exists\, x? & 9x + 2 = 4x + 6 \\ x \in R & \exists\, x? & 9x - 4x = 6 - 2 \qquad \text{Th. III} \\ x \in R & \exists\, x? & 5x = 4 \end{array}$$

La réponse est OUI : $x = \dfrac{4}{5}\cdot$

2.
$$x \in R \quad \exists\, x? \qquad \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}, \qquad (G)$$

admet comme domaine de validité

$$\mathcal{D} = R - \{-3,\ +3\}$$

Tous les calculs suivants sont faits pour $x \in \mathcal{D}$. Multiplions les deux membres par l'expression $(x+3)(x-3)$ qui est toujours définie et jamais nulle sur $\mathcal{D}$. Cette opération nous permet de *supprimer les dénominateurs*. Il vient

$$\begin{array}{lll} x \in \mathcal{D} & \exists\, x? & (x+3)^2 - (x-3)^2 = 12 \qquad (G') \\ x \in \mathcal{D} & \exists\, x? & 12x = 12. \qquad (G'') \end{array}$$

La réponse est OUI : $x = 1 \qquad 1 \in \mathcal{D}.$

3. Soit encore l'équation :

$$x \in R \quad \exists\, x? \qquad \frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x} = 2 - \frac{2}{x}. \qquad (H)$$

Le domaine de validité est :

$$\mathcal{D} = R - \{0, 1\}$$

Tous les calculs suivants sont faits sur $\mathfrak{D}$. Multiplions les deux membres par l'expression $x(x-1)$ qui est toujours définie et jamais nulle sur $\mathfrak{D}$. Nous supprimons les dénominateurs et il vient :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad x^2 + (x-1)(x-2) = 2x(x-1) - 2(x-1) \quad (H')$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad 2x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 4x + 2 \quad (H'')$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad x = 0. \quad (H''')$$

La réponse est NON, car $0 \notin \mathfrak{D}$.

114. Conclusion. — On commencera par noter soigneusement le domaine de validité $\mathfrak{D}$ de l'équation (E) que l'on **se propose d'étudier.**

Sur $\mathfrak{D}$ il est alors possible :

1° d'effectuer toute opération d'addition, soustraction, multiplication, simplification, à l'intérieur de chaque membre;

2° d'ajouter ou de retrancher aux deux membres toute expression algébrique définie sur $\mathfrak{D}$;

3° de transposer un terme d'un membre à l'autre en changeant son signe;

4° de multiplier les deux membres par une expression définie et non nulle sur $\mathfrak{D}$.

On obtient ainsi des équations qui, sur $\mathfrak{D}$, ont toutes les solutions de (E) et point d'autres.

Exercices. *Résoudre les équations* $x \in \mathbf{R} \quad \exists x?$

626. $(x-3)(x-5)=(x-2)(x-9)$; $(x-3)^2 = (x-2)(x-5)$.

627. $\frac{x-1}{4} - \frac{5-2x}{9} = 3x - \frac{2}{3}$; $\frac{5x-2}{4} - \frac{x-8}{3} = \frac{x-1}{2} + 5$.

628. $(x+1)(2x-3)=(2x-1)(x+3)$; $(x+3)^2 = (x+2)(x-1)$.

629. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{7} = 30$; $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = x + \frac{3}{4}$.

630. $\frac{x-3}{5} - \frac{2x-1}{10} = \frac{x+1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{4x+1}{3} - \frac{x-3}{6} = x + \frac{2}{3}$.

631. $\frac{x}{176-x} = \frac{5}{6}$; $\frac{23+x}{40+x} = \frac{2}{3}$.

632. $\frac{x+315}{60} = \frac{x}{35}$; $\frac{7x}{5} = \frac{5(x-8)}{3}$.

633. $x\sqrt{3} - 1 = x + 3$; $(\sqrt{3}-1)x + 4 = x - \sqrt{3}$.

634. $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(x-1)(x-3)}{2} = \frac{(7x+1)(x-2)}{10} + \frac{2}{5}$.

635. $\frac{(2x-5)(2x+1)}{8} - \frac{(x+3)^2}{6} = \frac{(x-3)x}{3}$.

636. $(x-1)^3 + (x-2)^3 = x^3 + (x-3)^3$.

637. $|x+1| = 4$; (lire : valeur absolue de $x+1$).

638. $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x + 2$.

639. $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{5} = \frac{7x-2}{15}$.

640. $\frac{3x-2}{5} + \frac{x-1}{9} = \frac{14x-3}{15} - \frac{2x+1}{9}$.

641. $\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x+5}{6} + 1$.

640. $\frac{2x-1}{4} + \frac{x-3}{3} = \frac{4x-2}{3} - \frac{6x+7}{12}$.

Exercices.

IV. APPLICATION A LA RÉSOLUTION D'AUTRES ÉQUATIONS

115. Produit de facteurs. — Soit à résoudre l'équation

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x^2 - 3x) = 0 \tag{E}$$

Cette équation se met sous la forme :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x(x-3) = 0. \tag{E}$$

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul. L'équation (E) se *décompose* donc en deux équations du premier degré

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x = 0 \tag{E_1}$$
$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x - 3 = 0 \tag{E_2}$$

Chacune de ces équations admet une solution, savoir $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$. (E) admet *deux* solutions : 0 et 3.

Autre exemple.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad (x-1)(2x+3) = (x-1)^2. \tag{F}$$

On aperçoit le facteur commun $(x-1)$ dans les deux membres. On a successivement :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x-1)(2x+3) - (x-1)^2 = 0$$
$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x-1)[2x+3-(x-1)] = 0$$
$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x-1)(x+4) = 0$$
$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x-1) = 0 \tag{F_1}$$
$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x+4) = 0 \tag{F_2}$$

(F) admet donc deux solutions $x = 1$, $x = -4$.

116. Équations renfermant l'inconnue au dénominateur. — Soit à résoudre l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \frac{x-a}{x-2a} = \frac{x-3}{x-8} \tag{E}$$

$$\mathfrak{D} = \mathrm{R} - \{2a;\ 8\}.$$

Sur ce domaine, par application du Théorème V, ou par un raisonnement direct utilisant l'équivalence logique :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma$$

on transforme régulièrement l'équation en :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x ? \qquad (x - a)(x - 8) = (x - 3)(x - 2a)$$
$$x^2 - ax - 8x + 8a = x^2 - 3x - 2ax + 6a$$
$$(a - 5)x = -2a.$$

Si $a = 5$, le problème est impossible.

Si $a \neq 5$ et si $\frac{-2a}{a-5} \neq 2a$ et si $\frac{-2a}{a-5} \neq 8$,

le problème admet une solution : $x = \frac{-2a}{a-5}$.

Étude du premier cas d'exception.

Il conduit à une nouvelle équation, où l'inconnue est le paramètre de l'équation (E)

$$a \in \mathrm{R} - \{5\} \quad \exists a ? \quad \frac{-2a}{a-5} = 2a, \qquad \text{(F)}$$
$$a \in \mathrm{R} - \{5\} \quad \exists a ? \quad -2a = 2a(a - 5),$$
$$a \in \mathrm{R} - \{5\} \quad \exists a ? \quad 2a(4 - a) = 0.$$

Cette équation se décompose. Elle admet la solution 0 et la solution 4.
Pour $a = 0$ et pour $a = 4$, l'équation (E) n'admet pas de solution, puisque la valeur $\frac{-2a}{a-5}$ est hors du domaine de validité.

Étude du second cas d'exception.

Il conduit à l'équation :

$$a \in \mathrm{R} - \{5\} \quad \exists a ? \quad \frac{-2a}{a-5} = 8,$$
$$a \in \mathrm{R} - \{5\} \quad \exists a ? \quad -2a = 8(a - 5),$$
$$10a = 40,$$
$$a = 4.$$

On retrouve une valeur déjà exclue.

RÉSUMÉ

$a \neq 0$, $a \neq 4$, $a \neq 5$ une solution $x = \frac{-2a}{a-5}$.

$a = 0$ ou $a = 4$ ou $a = 5$: problème impossible.

117. Équations irrationnelles.

☆ **On appelle équation irrationnelle une équation où l'inconnue figure sous un radical.**

EXEMPLE 1. Résoudre l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad x - \sqrt{x^2 - 1} = -x + 8 - \sqrt{x^2 - 1}. \qquad \text{(E)}$$

Le domaine de validité est caractérisé par $|x| \geqslant 1$. Sur ce domaine, on peut transformer régulièrement (E) en :

$$|x| \geqslant 1 \quad \exists x ? \qquad x = -x + 8 \qquad \text{(E')}$$
$$|x| \geqslant 1 \quad \exists x ? \qquad 2x = 8$$
$$|x| \geqslant 1 \quad \exists x ? \qquad x = 4.$$

Réponse : OUI, $x = 4$.

S'il y avait eu 0,8 au lieu de 8 dans (E) la réponse eût été NON.

Cet exemple rappelle que, même pour une équation que l'on pourrait qualifier de « pseudo-irrationnelle », la présence d'un radical oblige à des précautions.

EXEMPLE 2. Résoudre l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \qquad \sqrt{x^2 - 1} = 2 - x. \qquad (1)$$

Le domaine de validité est caractérisé par $|x| \geqslant 1$. Rappelons que le radical, de par sa définition même, désigne une quantité positive ou nulle.

On sait que : $a = b \implies a^2 = b^2$;

mais, en sens inverse :

$$a^2 = b^2 \implies (a^2 - b^2) = 0 \implies (a + b)(a - b) = 0,$$
$$\implies a = b \quad \text{ou} \quad a = -b.$$

Pour utiliser une transformation régulière, nous tiendrons compte des signes et nous préciserons :

$$a = b \quad \text{et} \quad a \geqslant 0 \iff a^2 = b^2 \quad \text{et} \quad a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad b \geqslant 0.$$

Le problème posé équivaut donc au problème suivant :

$$(2) \quad |x| \geqslant 1 \quad \exists x ? \quad (\sqrt{x^2 - 1})^2 = (2 - x)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 - 1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2 - x \geqslant 0.$$
$$(2) \quad |x| \geqslant 1 \quad \exists x ? \quad x^2 - 1 = (2 - x)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 - 1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2 - x \geqslant 0.$$

La condition $\sqrt{x^2 - 1} \geqslant 0$ est remplie, par définition. Son écriture est superflue.

D'autre part, si l'équation (2) admet une racine, celle-ci rend positive ou nulle l'expression $(2-x)^2$, donc aussi x^2-1, et la condition $|x^2| \geqslant 1$ se trouvera nécessairement vérifiée. Reste donc :

$$2-x \geqslant 0 \quad \exists x ? \quad x^2-1=(2-x)^2=x^2-4x+4.$$

Réponse : OUI, $x=\frac{5}{4}$.

Autre méthode.

Le domaine de validité est $|x| \geqslant 1$. Sur ce domaine $\sqrt{x^2-1}$ existe et, en vertu de :

$$a=b \implies a^2=b^2,$$

toute solution de (1) vérifie :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x ? \quad x^2-1=(2-x)^2. \qquad (2\ bis)$$

Mais pour une telle solution, x^2-1 est nécessairement positive ou nulle.

Reste donc : $\exists x ? \quad x^2-1=x^2-4x+4,$

d'où

$$x=\frac{5}{4}.$$

Si une solution existe, ce ne peut être que $\frac{5}{4}$. Or pour $x=\frac{5}{4}$ nous avons d'une part :

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{25}{16}-1}=\frac{3}{4}$$

et d'autre part :

$$2-x=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

$\frac{5}{4}$ est donc *la* solution de l'équation (1).

118. Sur les équations du type $\exists x ? \quad \sqrt{A}=B$. — D'une façon générale, le domaine de validité de l'équation

$$x \in R \quad \exists x ? \quad \sqrt{A(x)}=B(x), \qquad (E)$$

est nécessairement inclus dans l'ensemble caractérisé par $A \geqslant 0$. Si une solution de (E) existe, en vertu de :

$$a=b \implies a^2=b^2,$$

cette solution vérifie :

$$x \in R \quad \exists x ? \quad A=B^2. \qquad (E_1)$$

Mais, pour une telle solution, A prend nécessairement une valeur positive ou nulle. Il est donc inutile de tenir compte de la restriction $A \geqslant 0$.

D'autre part, le radical désignant par définition un nombre positif ou nul, s'il existe une solution α de (E_1), on aura :

$$A(\alpha)-B^2(\alpha)=0 \implies [\sqrt{A(\alpha)}-B(\alpha)]\,[\sqrt{A(\alpha)}+B(\alpha)]=0,$$

donc soit : $\sqrt{A(\alpha)}=B(\alpha), \qquad (E)$

soit : $\sqrt{A(\alpha)}=-B(\alpha). \qquad (E')$

Les deux faces de cette alternative s'excluent, sauf dans le cas où :

$$A(\alpha) = B(\alpha) = 0.$$

En conclusion :

- **Les racines de l'équation $\sqrt{A} = B$ sont celles des racines de l'équation $A = B^2$ qui rendent B positif (ou nul).**

Exemple 1.

$$x \in R \quad \exists x? \qquad 3 - 2x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - x \qquad (1)$$

Les parties polynomes étant toujours définies, on peut isoler le radical :

$$x \in R \quad \exists x? \qquad \sqrt{x^2 - x + 1} = x - 2. \qquad (1)$$

Ce problème équivaut à :

$$x \in R \quad \exists x? \qquad x^2 - x + 1 = (x-2)^2 \quad \text{et} \quad x - 2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

$$x \in R \quad \exists x? \qquad x^2 - x + 1 = x^2 - 4x + 4 \quad \text{et} \quad x - 2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

$$x \in R \quad \exists x? \qquad 3x = 3 \quad \text{et} \quad x - 2 \geqslant 0. \qquad (2)$$

La réponse est NON. (2) est impossible, ainsi que (1).

Exemple 2. $x \in R \quad \exists x? \qquad \sqrt{3x-1} = -\sqrt{x+3} \qquad$ (E)

Réponse : Cette équation est impossible car le premier membre désigne, quand il existe, une quantité positive ou nulle, le second une quantité négative ou nulle, et ces deux quantités ne sont pas nulles simultanément.

Exemple 3. $x \in R \quad \exists x? \qquad \sqrt{x+1} = \sqrt{5x-2}. \qquad$ (1)

Domaine de validité : $x \geqslant -1$ et $x \geqslant \frac{2}{5}$, soit $x \geqslant \frac{2}{5}$.

Sur ce domaine, le problème (1) est équivalent à :

$$x \in R \quad \exists x? \qquad x + 1 = 5x - 2 \quad \text{et} \quad x \geqslant \frac{2}{5} \qquad (2)$$

$$x \in R \quad \exists x? \qquad x = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad x \geqslant \frac{2}{5}. \qquad (2)$$

Réponse : OUI, à savoir $x = \frac{3}{4}$.

Exemple 4. $x \in R \quad \exists x? \qquad \sqrt{x-1} = \sqrt{5x-2}. \qquad$ (1)

Domaine de validité : $x \geqslant 1$ et $x \geqslant \frac{2}{5}$ donc : $x \geqslant 1$

Ce problème équivaut à :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x - 1 = 5x - 2 \quad \text{et} \quad x \geqslant 1 \qquad (2)$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x \geqslant 1. \qquad (2)$$

Réponse : NON.

EXEMPLE 5. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1.$ (1)

Domaine de validité $\mathfrak{D}$: $x \geqslant -2$ et $x \geqslant 1$, donc $x \geqslant 1$.

Sur ce domaine en vertu de l'implication :

$$a = b \implies a^2 = b^2,$$

si une solution de l'équation proposée existe, elle vérifie nécessairement :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad [\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}]^2 = 1 \qquad (2)$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad x + 2 + x - 1 - 2\sqrt{(x+2)(x-1)} = 1 \qquad (2)$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad \sqrt{(x+2)(x-1)} = x \qquad (2)$$

En vertu du même principe, cette solution vérifiera aussi :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad (x+2)(x-1) = x^2 \qquad (3)$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad x^2 + x - 2 = x^2. \qquad (3)$$

L'équation (3) admet la solution $x = 2$.

Si (1) admet une solution, ce ne peut être que 2. Or pour $x = 2$: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$ prend la valeur numérique :

$$\sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$$

2 est *la* solution de (1).

Autre méthode. — Le domaine de validité de (1) est $x \geqslant 1$. Sur ce domaine, l'expression :

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$$

est toujours définie, et jamais nulle.

On peut transformer régulièrement (1) en multipliant ses deux membres par $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}$. On obtient :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad (x+2) - (x-1) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} \qquad (1\ bis)$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3. \qquad (1\ bis)$$

Toute solution de (1) vérifie aussi (1 *bis*), et réciproquement. On en déduit que toute solution de (1) vérifie le système :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3. & (1\ bis) \end{cases}$$

Par addition et soustraction, on obtient

$$\sqrt{x+2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x-1} = 1,$$

d'où :

$$x = 2 \qquad 2 \in \mathcal{D}.$$

Nous avons raisonné par conditions nécessaires, mais comme l'équation (1) fait partie du système (S) la vérification est immédiate : 2 convient.

Exercices. *Résoudre les équations* $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

643. $\dfrac{x+5}{x-5} - \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{25}{x^2-25}$; $\quad \dfrac{x}{11-x} = \dfrac{1-x}{x}$.

644. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{1}{2}$; $\quad \dfrac{1-\dfrac{x-2}{x+2}}{2+\dfrac{x}{x+2}} = \dfrac{1}{4}$.

645. $(3x-1)(x-2)(x+1) = 0$; $\quad (3x-2)(5x-1)(5x+1) = 0$

Résoudre et discuter $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

646. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} = 2$; $\quad \dfrac{a-x}{b} - \dfrac{b-x}{a} = 1$.

647. $\dfrac{x}{1-a} - \dfrac{x}{a+1} = \dfrac{1}{a^2-1}$; $\quad \dfrac{x-1}{a} + \dfrac{x-2}{b} = 2$.

648. $\dfrac{x+4}{ax-3} = b$; $\quad \dfrac{x-a}{x-b} = \dfrac{x-5}{x-6}$.

649. $\dfrac{a-x}{a} = \dfrac{x-b}{b}$; $\quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a} - \dfrac{x}{b}$.

650. $$\frac{x-a}{a-b} - \frac{3ax}{a^2-b^2} = \frac{x-a}{a+b} - \frac{ax}{a^2-b^2}.$$

Résoudre les équations $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$:

651. $1 - \sqrt{x-3} = 0$; $\quad 1 + \sqrt{x-3} = 0$.

652. $\sqrt{x^2-4} = x-1$; $\quad \sqrt{x^2-4} = 1-x$.

653. $\sqrt{(x-2)(x-3)} = x-3$; $\quad x + \sqrt{x^2-3x} = 4$.

654. $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 2$.

655. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-3} = 1$; $\quad \sqrt{x+6} + \sqrt{x-3} = 1$.

656. $\sqrt{x-5} = \sqrt{3x+1}$; $\quad \sqrt{x-5} + \sqrt{1-3x} = 0$.

Résoudre et discuter $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$:

657. $\sqrt{x^2+ax} = x-a$; $\quad \sqrt{x^2+2x+1} = x-a$.

658. $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}} = \sqrt{\dfrac{a+2x}{a-2x}}$; $\quad 3 + \sqrt{x^2-a} = x+4$.

659. *Résoudre :*

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

(Remarquer que chacun des radicandes est le carré d'une expression irrationnelle.)

Exercices.

PROBLÈMES

660. — Problème corrigé. Résoudre :

$x \in \mathbb{R} \quad \exists x? \qquad \dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{2}{x}.$

SOLUTION ABRÉGÉE : $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{ a;\ b;\ 0 \}$
D. C. : $x(x-a)(x-b)$.
On obtient :

$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad (a+b)x = 2ab.$

$a+b \neq 0 \qquad x = \dfrac{2ab}{a+b}$

si : $\dfrac{2ab}{a+b} \neq 0$ et si $\dfrac{2ab}{a+b} \neq a$

et si : $\dfrac{2ab}{a+b} \neq b.$

Discussion :

$a+b \neq 0$ et $\dfrac{2ab}{a+b} = 0 \implies a = 0$

ou (exclusif) : $b = 0$

$a+b \neq 0$ et $\dfrac{2ab}{a+b} = a \implies a = b;$

$a+b \neq 0$ et $\dfrac{2ab}{a+b} = b \implies a = b;$

$a+b = 0$ si $ab \neq 0$ Impossible.

si $ab = 0$ alors $a = b = 0$,

indétermination, mais $x \neq 0$.

Résumé

$a+b \neq 0$	$a \neq b$, $ab \neq 0$	1 solution
	$ab = 0$	0 solution
	$a = b$	0 solution
$a+b = 0$	$ab \neq 0$	0 solution
	$ab = 0$	$x \in \mathbb{R}^*$, arbitraire.

Résoudre et, le cas échéant, discuter les équations suivantes :

$x \in \mathbb{R} \quad \exists x?$

661. $\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{x}{5}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{x}{6};$
$x+\dfrac{3x-9}{5}=4-\dfrac{5x-12}{3}.$

662. $\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{3}{2x^2-3x}=\dfrac{5}{x};$
$\dfrac{3x-7}{4x+2}=\dfrac{3x-14}{4x-13}.$

663. $\dfrac{a}{b-x}=\dfrac{b}{a-x};$
$\dfrac{a(a-x)}{b}+\dfrac{b(x-b)}{a}=x.$

664. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3) = 2(x-2)(x-3).$

665. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{5}=x-17.$

666. $(x+1)^4-(x-1)^4 = 8x(x^2+1).$

667. $(x+1)^3-(x-1)^3 = 5x+8(x-3).$

668. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{x-1}.$

669. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2x-5}{x-3}=3.$

670. $\dfrac{x^3-1}{x}=(x-2)(x+2)+\dfrac{11}{x}.$

671. $\dfrac{x+7}{x-3}+\dfrac{4x-2}{x-5}=5.$

672. $x^2(x+1)=4(x+1).$

673. $(3x+2)^2=(x+1)^2.$

674. $x^2-1+2a(x-1) = (a+1)x-a-1.$

675. $(x-a)(x-2a)(x+a)=x^3+2a^3.$

676. $\dfrac{x-3}{ax-1}=b.$

677. $\dfrac{x+3}{x-a}=\dfrac{x-2}{x-b}.$

678. $\dfrac{a-2b-1}{x}=\dfrac{2a-b-1}{x-3}.$

679. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{a}{b+a}.$

680. $\sqrt{(x-1)(x-2)}=x-1.$

681. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=4.$

682. $\sqrt{(x-3)(x-10)}=x-5.$

683. $x+\sqrt{x^2-2x}=3.$

684. $\sqrt{x^2+1} = x - 4.$

685. $\sqrt{x^2-1} = x + 6.$

686. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3}.$

687. $\sqrt{x^2+4} = x - 5.$

688. $\sqrt{x+4} = 4x + 2.$

689. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}.$

690. $\sqrt{(x+4)(x-4)} = x - 4.$

691. $\sqrt{(x-4)(x-9)} = x - 6.$

692. $\sqrt{4+\sqrt{x^4+x^2}} = x - 2.$

693. $\sqrt{4+\sqrt{x^4+x^2}} = 2 - x.$

694. $\sqrt{x^2-3x+8} = x - 4.$

695. $\sqrt{4x^2-9} = 2x - 1.$

696. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 3.$

697. $\sqrt{(x-1)(x+4)} = x - 2.$

698. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} = 3.$

699. $x + \sqrt{x^2-4x} = 3;\ x - \sqrt{x^2-4x} = 3.$

700. $\sqrt{(x+3)(x-3)} = x - 3.$

701. $\sqrt{(x-3)(x-5)} = x - 6.$

702. $\sqrt{x^2+5x+4} = x - a.$

703. $2(x+2)(x-4) = x^2 - 4.$

704. $(3x-1)(5x-4) = 25x^2 - 16.$

705. $(x-3)(x-5)(x-8) = 0.$

706. $\dfrac{ax}{a+b} + 2ab = \dfrac{bx}{a-b} + a^2 - b^2.$

707. $\dfrac{x}{a-1} - \dfrac{x+1}{a+1} = \dfrac{x+1}{a-1} - \dfrac{x}{1-a^2}$

708. $\dfrac{(2x-3)(2x-1)}{8} - \dfrac{(x+2)^2}{6} = \dfrac{x(x-2)}{3}.$

709. $(x-5)(x-7) + (x-5)^2 = 0.$

710. $(2x-3)(5x+1)(5-2x) = 0.$

711. $\dfrac{x+a}{x-a} - \dfrac{x+b}{x-b} = \dfrac{a-b}{(x-a)(x-b)}.$

712. $\dfrac{x+a}{x+b} + \dfrac{x-a}{x-b} = 2.$

713. $\dfrac{x}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{x}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{x}{(c-a)(c-b)} = 1.$

714. $\dfrac{(x-a)^2}{x^2} = \dfrac{x}{x+2a}.$

715. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b} + \dfrac{b}{x}.$

716. $\dfrac{(1+x)^2}{1+ax} = 1 - x.$

717. $(a-x)(b-x) + (a+x)(c-x) - (b-x)(a-c) = 0.$

718. $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{(x+2)(x+3)}.$

719. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}.$

720. $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{x-4}{x-5} - \dfrac{x-5}{x-6}.$

721. $\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+3x+9} = \dfrac{x+2}{x+3}.$

722. $\dfrac{x+7}{x-3} + \dfrac{4x-2}{x-5} = 5.$

723. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{4x-5}{x(x^2-1)}.$

724. $\dfrac{x-2}{x-3} - \dfrac{2x+11}{2x+9} = \dfrac{17}{(x-3)(2x+9)}.$

725. $\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x-2}} + x - 2 = 0.$

CHAPITRE IX

INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES INÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A UNE INCONNUE

119. Inéquations algébriques sur R. — Rappelons que toute inéquation algébrique à une inconnue sur l'ensemble des nombres réels est l'expression ou la formulation abrégée d'un problème du type suivant : étant donné deux expressions algébriques $f(x)$ et $g(x)$ de la variable x, existe-t-il une (ou plusieurs) valeur numérique de x pour laquelle la valeur numérique prise par $f(x)$ est supérieure à la valeur numérique prise par $g(x)$?

Nous écrirons une inéquation (S) sous la forme :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) > g(x). \qquad \text{(S)}$$

On peut aussi considérer comme une inéquation au sens large :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) \geqslant g(x). \qquad \text{(SL)}$$

Exemples.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x > 3 \qquad (1)$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \frac{x}{x-1} > \frac{8}{x+2} \qquad (2)$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3} \qquad (3)$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x + \sqrt{x-3} > \sqrt{x-3} \qquad (4)$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 + 4 > 0 \qquad (5)$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad -x^2 - 1 > 0 \qquad (6)$$

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \sqrt{x-6} > \sqrt{5-x} \qquad (7)$$

Si elle existe, une valeur de x pour laquelle $f(x) > g(x)$ est appelée une *solution* de l'inéquation. On dit qu'elle *vérifie* l'inéquation, ou qu'elle *satisfait* à l'inéquation. Résoudre une inéquation c'est d'abord rechercher si elle admet des solutions et ensuite trouver, quand elles existent, toutes les solutions. Plusieurs notions exposées à propos des équations s'étendent facilement aux inéquations; aussi les traiterons-nous rapidement.

Domaine de validité d'une inéquation.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) > g(x) \qquad \text{(S)}$$

☆ **Nous appellerons domaine de validité de l'inéquation (S), et désignerons par $\mathfrak{D}$, le sous-ensemble de R sur lequel les expressions algébriques sont définies toutes les deux.**

Exemples.

Pour (2) $\mathfrak{D} = \mathrm{R} - \{-2, 1\}$. Pour (4) $\mathfrak{D}$ est caractérisé par $x \geqslant 3$.
Pour (7) $\mathfrak{D} = \varnothing$, cette inéquation n'a certainement pas de solution.
Pour (5) et pour (6) $\mathfrak{D} = \mathrm{R}$; on voit facilement que $\forall x$, x est solution de (5) et non solution de (6). L'inéquation (5) est toujours vérifiée, (6) jamais.

Si une solution x_0 existe, comme $f(x_0)$ et $g(x_0)$ existent, $x_0 \in \mathfrak{D}$. Mais $x_0 \in \mathfrak{D}$ n'est pas une condition suffisante pour qu'un nombre soit solution.
Dès que $\mathfrak{D}$ sera déterminé, on écrira le problème (S) sous la forme :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad f(x) > g(x). \qquad \text{(S)}$$

120. Transformations régulières sur un domaine Δ. — Pour résoudre une inéquation on peut être conduit à la transformer en une autre plus simple, ou d'un type connu. Une telle transformation n'est légitime que si l'ensemble des solutions de la première inéquation coïncide avec l'ensemble des solutions de la seconde. Nous dirons alors qu'il s'agit d'une transformation régulière.

On peut énoncer, touchant les transformations régulières d'inéquations, des théorèmes homologues de ceux qui concernent les équations.

▪ THÉORÈME I. — **Deux transformations, régulières sur un même domaine Δ, faites successivement, équivalent à une transformation régulière sur le même domaine.**

▪ THÉORÈME II. — **Soit $\mathfrak{D}$ le domaine de validité de l'inéquation**

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) > g(x) \qquad \text{(S)}$$

Soit $p(x)$ une expression algébrique définie sur $\mathfrak{D}$ et qui pour toute valeur $x_0 \in \mathfrak{D}$ prend la même valeur que $f(x)$; soit de même $q(x)$ une expression algébrique définie sur $\mathfrak{D}$ et qui pour toute valeur $x_0 \in \mathfrak{D}$ prend la même valeur que $g(x)$; alors l'inéquation :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad p(x) > q(x) \qquad \text{(S')}$$

a sur $\mathfrak{D}$ le même ensemble de solutions que l'inéquation (S).

▪ THÉORÈME III. — **Sur son domaine de validité $\mathfrak{D}$, l'inéquation :**

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists\, x? \qquad f_1(x) + f_2(x) > g_1(x) + g_2(x) \qquad (S)$$

a sur $\mathfrak{D}$ le même ensemble de solutions que les inéquations :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists\, x? \qquad f_1(x) + f_2(x) - g_1(x) > g_2(x) \qquad (S')$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists\, x? \qquad f_2(x) > g_1(x) + g_2(x) - f_1(x) \qquad (S'')$$

▪ THÉORÈME IV. — **Soit $\mathfrak{D}$ le domaine de validité de l'inéquation :**

$$x \in \mathbf{R} \quad \exists\, x? \qquad f(x) > g(x) \qquad (S)$$

et soit $A(x)$ une expression algébrique toujours définie sur $\mathfrak{D}$; alors l'inéquation :

$$x \in \mathbf{R} \quad \exists\, x? \qquad f(x) + A(x) > g(x) + A(x) \quad (S')$$

a le même ensemble de solutions sur $\mathfrak{D}$ que l'inéquation (S).

Ces théorèmes se démontrent comme leurs homologues de la théorie des équations. On notera dans l'énoncé du Théorème V une modification importante par rapport à son homologue.

▪ THÉORÈME V. — **Soit $\mathfrak{D}$ le domaine de validité de l'inéquation :**

$$x \in \mathbf{R} \quad \exists\, x? \qquad f(x) > g(x) \qquad (S)$$

Soit $B(x)$ une expression algébrique toujours définie et toujours strictement positive sur $\mathfrak{D}$; soit d'autre part $C(x)$ une expression algébrique toujours définie et toujours strictement négative sur $\mathfrak{D}$; alors les inéquations :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists\, x? \qquad B(x)\,f(x) > B(x)\,g(x) \qquad (S')$$
$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists\, x? \qquad C(x)\,f(x) < C(x)\,g(x) \qquad (S'')$$

ont sur $\mathfrak{D}$ le même ensemble de solutions que (S).

La démonstration de ce théorème se fonde pour l'essentiel sur les implications mutuelles suivantes :

$$\alpha > \beta \quad \text{et} \quad \gamma > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha\gamma > \beta\gamma \quad \text{et} \quad \gamma > 0.$$
$$\alpha > \beta \quad \text{et} \quad \delta < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha\delta < \beta\delta \quad \text{et} \quad \delta < 0.$$

II. INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

121. Inéquation entière et rationnelle du premier degré. — Lorsque $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynomes, l'inéquation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) > g(x) \tag{S}$$

est dite entière et rationnelle, son domaine de validité est R. On peut la mettre sous la forme équivalente :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \mathrm{P}(x) > 0 \tag{S'}$$

où $\mathrm{P}(x)$ est un polynome. Lorsque $\mathrm{P}(x)$ est un polynome du premier degré $ax + b$ (véritablement, avec $a \neq 0$) on est ramené à résoudre une inéquation entière et rationnelle du premier degré.

☆ **Une inéquation entière du premier degré à une inconnue est une inéquation du type :**

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax + b > 0 \tag{1}$$

où a et b sont des nombres ou des expressions algébriques par rapport à des paramètres; a n'est pas nul, sinon il n'y aurait plus d'inéquation.

Résolution de l'inéquation $\exists x? \quad ax + b > 0$. — Puisque a est différent de 0, le polynome $ax + b$ est identique au polynome $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$, et par conséquent l'inéquation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax + b > 0 \tag{1}$$

a le même ensemble de solutions que l'inéquation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad a\left(x + \frac{b}{a}\right) > 0. \tag{2}$$

1° Si a est positif, le problème devient :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x + \frac{b}{a} > 0 \qquad \text{ou} \qquad x > -\frac{b}{a}$$

et la réponse apparaît, évidente, savoir : $x > -\frac{b}{a}$.

2° Si a est négatif, le problème s'écrit :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x + \frac{b}{a} < 0 \qquad \text{ou} \qquad x < -\frac{b}{a}.$$

Il admet la réponse, évidente : $x < -\frac{b}{a}$.

Remarque. — Pour $a = 0$ le problème serait :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad b > 0$$

mais il n'y a plus à proprement parler d'inéquation. La réponse ne dépend plus d'un choix de x, la voici :

α) si : $b > 0, \quad \forall x \quad b > 0$ tout x convient.
β) si : $b < 0, \quad \forall x \quad b < 0$ aucun x ne convient.

Exemple. *Résoudre l'inéquation :*

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m+1)x + m - 3 > 4x + 1. \tag{1}$$

On obtient, en réduisant :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m-3)x > 4 - m. \tag{2}$$

1° Si $m > 3$, $m - 3$ est positif. Les solutions sont données par :

$$x > \frac{4-m}{m-3}.$$

2° Si $m < 3$, $m - 3$ est négatif. Les solutions sont données par :

$$x < \frac{4-m}{m-3}.$$

3° Si $m = 3$, il reste :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad 0 > 1.$$

Aucune valeur de x ne convient.

122. Le polynome du premier degré. — Élargissant le cadre de nos préoccupations, nous allons maintenant étudier le signe que prend, selon les différentes valeurs numériques attribuées à la variable x, le polynome du premier degré :

$$ax + b$$

dans lequel nous supposons $a \neq 0$ (sinon le polynome ne serait pas du premier degré, il se réduirait à une constante).

Nous sommes dégagés du souci de résoudre telle ou telle inéquation, mais nous avons remarqué :

1° que le nombre $-\frac{b}{a}$ sépare les valeurs de x qui sont solutions de l'inéquation :

$$a \neq 0, \qquad x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax + b > 0 \tag{S}$$

de celles qui ne le sont pas;

2° que le nombre $-\frac{b}{a}$ est la racine de l'équation :

$$a \neq 0, \qquad x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax + b = 0. \tag{E}$$

Ces remarques nous conduisent à utiliser encore l'identité :

$$a \neq 0 \quad \forall x \quad ax + b \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

pour faire apparaître dans l'expression du polynome $ax + b$, ce nombre remarquable $-\frac{b}{a}$ que nous appellerons par extension *la racine du polynome.*

Posant alors : $$-\frac{b}{a} = p$$

nous obtenons : $a \neq 0 \quad \forall x \quad ax + b \equiv a(x - p)$;

d'où résultent facilement les implications mutuelles :

$$x_0 < p \iff a(x_0 - p) \text{ a le signe de } -a.$$
$$x_0 = p \iff a(x_0 - p) \text{ est nul.}$$
$$x_0 > p \iff a(x_0 - p) \text{ a le signe de } +a.$$

▪ THÉORÈME. — **Pour $x = x_0$, le polynome du premier degré $ax + b$, $a \neq 0$, dont la racine est $-\frac{b}{a} = p$,**

1° prend le signe de « $-a$ » si, et seulement si, x_0 est inférieur à p;
2° prend la valeur zéro si, et seulement si, x_0 est égal à p;
3° prend le signe de a si, et seulement si, x_0 est supérieur à p.

Exercices. *Résoudre les inéquations $x \in \mathrm{R}$ $\exists x$?*

726. $2x - 6 > x + 5$; $\quad 5 - 3x > x + 1$.

727. $x - \frac{x-2}{3} > \frac{1}{2} + x$; $\quad \frac{2x-5}{3} > \frac{2-x}{6}$.

728. $7x - \frac{x+1}{2} < \frac{1-3x}{5}$; $\quad \frac{x+1}{4} < \frac{1-3x}{5} + \frac{1-x}{10}$.

729. — Démontrer que :

$$a \in \mathrm{R}^+ \; b \in \mathrm{R}^+ \quad \forall a \forall b \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

730. — Démontrer que :

$$a \in \mathrm{R}^+ \quad b \in \mathrm{R}^+ \quad \forall a \forall b \quad \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

731. — Pour $a > 0$ et $b > 0$ soit c le nombre défini par :

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Démontrer que $\forall a \forall b \quad c \leqslant \sqrt{ab}$.

732. — Démontrer que :

$$a \in \mathrm{R}^+ \quad b \in \mathrm{R}^+ \quad a + b = 1 \implies \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$$

(Utiliser les exercices précédents; on montrera que $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$ et $ab \leqslant \frac{1}{4}$).

733. — Démontrer que :

$$a \in \mathrm{R}^+ \, b \in \mathrm{R}^+ \, c \in \mathrm{R}^+ \quad \forall a \forall b \forall c \quad (a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\,abc.$$

Exercices.

III. APPLICATION A LA RÉSOLUTION D'AUTRES INÉQUATIONS

123. Produit de facteurs du premier degré. — Soit à résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad (x - 3)(5x - 1) > 0. \qquad \text{(S)}$$

On connaît le signe d'un produit de facteurs si l'on connaît celui de chaque facteur, or ceux-ci sont des binomes du premier degré, c'est donc le cas.

Dressons un tableau qui contiendra les signes des deux facteurs, suivant les valeurs de x. L'abréviation *sgn* veut dire « signe de ».

pour	$x <$	$\frac{1}{5}$	$< x <$	3	$< x$
sgn $(x - 3)$	$-$		$-$	0	$+$
sgn $(5x - 1)$	$-$	0	$+$		$+$
sgn $(x - 3)(5x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'inéquation est vérifiée pour $x < \frac{1}{5}$ ou pour $x > 3$. On prendra soin, en dressant un tel tableau, qui peut s'appliquer à plusieurs facteurs, de classer les valeurs remarquables de x par ordre croissant.

124. Inéquations rationnelles. — Soit, par exemple, à résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \frac{3}{1 - x} > \frac{5}{2x + 1}. \qquad \text{(S)}$$

Les signes des dénominateurs dépendent de x. Pour les supprimer il faudrait distinguer plusieurs cas. On opère de la façon suivante.

Le domaine de validité est $\mathrm{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$. Sur ce domaine, on a :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad \frac{3}{1 - x} - \frac{5}{2x + 1} > 0,$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad \frac{3(2x + 1) - 5(1 - x)}{(1 - x)(2x + 1)} > 0,$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad \frac{11x - 2}{(1 - x)(2x + 1)} > 0.$$

Le signe de cette fraction est facile à déterminer, puisque les termes en sont des binomes ou produit de binomes. On dresse un tableau. Pour rappeler que $-\frac{1}{2}$ et 1 sont exclues du domaine de validité on trace, conventionnellement, une double barre sous chacune de ces valeurs.

pour	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{11}$	$\frac{2}{11} < x < 1$	$1 < x$
$sgn\,(11x-2)$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$sgn\,(1-x)$	$+$	$+$	$+$	$-$
$sgn\,(2x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$sgn\,\frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}$	$+$	$-$	$+$	$-$

L'inéquation est vérifiée pour $x < -\frac{1}{2}$, et pour : $\frac{2}{11} < x < 1$.

125. Inéquations simultanées. — Soit, par exemple, à résoudre le problème :

$$x \in R \quad \exists x? \qquad -1 < \frac{x}{x-3} < +2. \qquad \text{(P)}$$

Il s'agit donc de trouver les solutions communes à deux inéquations. La première, définie sur $R - \{3\}$, s'écrit :

$$x \in R - \{3\} \quad \exists x? \qquad \frac{x}{x-3} + 1 > 0, \qquad (1)$$

ou :

$$x \in R - \{3\} \quad \exists x? \qquad \frac{2x-3}{x-3} > 0. \qquad (1)$$

La seconde, définie sur le même domaine, s'écrit :

$$x \in R - \{3\} \quad \exists x? \qquad 2 - \frac{x}{x-3} > 0, \qquad (2)$$

ou :

$$x \in R - \{3\} \quad \exists x? \qquad \frac{x-6}{x-3} > 0. \qquad (2)$$

Le lecteur dressera les tableaux correspondants. La première est vérifiée

pour : $x < \frac{3}{2}$ et pour $x > 3$

la seconde pour : $x < 3$ et pour $x > 6$.

Les solutions du problème sont données par l'intersection de ces ensembles. Il est commode de représenter les ensembles graphiquement à l'aide d'un axe. On barre les parties à exclure pour la première à l'aide de hachures ////// et les parties à exclure pour la seconde à l'aide de hachures \\\\\\ (habitude qui facilite les *vérifications*). Les solutions sont données, s'il en reste, par les parties non hachurées.

$\frac{3}{2}$ 3 6 x

ici il reste : $x < \frac{3}{2}$ et $x > 6$.

126. Inéquations irrationnelles. — Donnons d'abord l'exemple suivant :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \sqrt{2x-1} > \sqrt{x-4}. \qquad (1)$$

Domaine de validité : $\mathcal{D}$: $x \geqslant \frac{1}{2}$ et $x \geqslant 4$ soit : $x \geqslant 4$.

Sur $\mathcal{D}$ les deux membres sont définis et sont *positifs*, or :

$$0 < \alpha < \beta \iff 0 < \alpha \text{ et } 0 < \beta \text{ et } \alpha^2 < \beta^2$$

(1) est donc équivalente à : $x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad 2x-1 > x-4,$ (2)

toujours vérifiée sur $\mathcal{D}$; il reste donc la condition $x \geqslant 4$.

AUTRE EXEMPLE. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x+3 < \sqrt{x^2+5}.$ (1)

Domaine de validité : R.

Le membre de droite est toujours positif, strictement.

1° Si $x+3 \leqslant 0$ (1) est donc vérifiée :

$$x \leqslant -3 \quad \forall x \quad x \text{ solution.}$$

2° Si $x+3 > 0$, les deux membres étant positifs, (1) est équivalente sur ce domaine à :

$$x > -3 \quad \exists x? \qquad (x+3)^2 < x^2+5 \qquad (2)$$

soit

$$x > -3 \quad \exists x? \qquad x^2+6x+9 < x^2+5$$

$$x > -3 \quad \exists x? \qquad 6x > -4$$

$$x > -3 \quad \exists x? \qquad x < -\frac{2}{3}.$$

Réponse : OUI, avec $-3 < x < -\frac{2}{3}$.

Il reste $x < -\frac{2}{3}$, qui rassemble les deux cas.

Exercices. *Résoudre les inéquations* $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

734. $(x-1)(1-3x) < 0; \qquad (x-2)(4-3x) > 0.$

735. $(4x-1)(x-2)(x+1)(2-3x) > 0.$

736. $\frac{x}{x-2} > 3; \qquad \frac{x}{x-2} < 3.$

737. $\frac{3x}{x-1} < -1; \qquad \frac{3x-2}{5-3x} > 1.$

Résoudre les inéquations simultanées $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

738. $\frac{x}{3}+\frac{1}{2} > x-\frac{1}{3}$ et $\frac{x+1}{x} > \frac{x-1}{2x}.$

739. $\frac{x-1}{4} < \frac{x+3}{2}$ et $\frac{x+1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}.$

740. $\frac{3x}{x-1} > 4$ et $\frac{x}{x+1} < 2.$

741. $\frac{(x+1)(x-2)}{2x-3} > 0$ et $\frac{(1-x)(x+2)}{x} < 0.$

742. $\frac{x\sqrt{2}-1}{x-\sqrt{2}} < 0$ et $\frac{x\sqrt{3}-1}{2x-\sqrt{3}} > 0.$

Résoudre les inéquations irrationnelles $x \in \mathbb{R} \quad \exists x?$

743. $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$; $\sqrt{1-x} > \sqrt{2x-3}$.

744. $1 + \sqrt{x-2} > 4$; $1 - \sqrt{x-2} > 4$.

745. $x - 3 < \sqrt{x^2+1}$; $3 - x < \sqrt{x^2+1}$.

746. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} > 2$; $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} > 2$.

747. $0 < \dfrac{4x-1}{\sqrt{16x^2+1}} < 1$.

Exercices.

PROBLÈMES

Résoudre et discuter les inéquations :

$x \in \mathbb{R} \quad \exists x?$

748. $\dfrac{(m-3)x}{2m} > \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{x-1}{m}$.

749. $\dfrac{(m+1)x}{m^2-1} > \dfrac{2-x}{m-1} + \dfrac{1+x}{m+1}$.

750. $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-3} > \dfrac{x-a}{x-a-1} - \dfrac{x-a-1}{x-a-2}$.

751. $\dfrac{x^2+ax+a^2}{x^2+bx+b^2} > \dfrac{x+a}{x+b}$.

752.

$$\frac{ax}{(a-b)(a-c)} + \frac{bx}{(b-a)(b-c)} + \frac{cx}{(c-a)(c-b)} > 1.$$

753. $\sqrt{(x+3)(x-3)} > x-3$;

$\sqrt{(x-3)(x-5)} > x-6$.

754. $\sqrt{x^2-5x} > x-a$;

$\sqrt{x^2+x} > x+a$.

755. $\sqrt{2x-a-1} > \sqrt{x-a} + \sqrt{x-1}$;

$\sqrt{2x-a-1} > \sqrt{x-a} - \sqrt{x-1}$.

756. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$x \in \mathbb{R} \quad \exists x? \qquad \dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{m} = 2$

a-t-elle : 1° une solution positive; 2° une solution comprise entre 2 et 3? Pour quelle valeur de m est-elle impossible?

757. — Pour quelle valeur de m l'équation :

$x \in \mathbb{R} \quad \exists x? \quad \dfrac{x-2}{3x-m} = 2$

a-t-elle une solution x telle que

$x > 1$; $x > \dfrac{4}{3}$; $x > -1$; $x > 2$?

Peut-elle avoir pour solution $x = m$?

758. — 1° Résoudre l'équation suivante dans laquelle m est un nombre connu :

$x \in \mathbb{R} \quad \exists x?$

$$\frac{x+2m}{5} + 2 = \frac{3x-m}{2} + \frac{m}{10} - \frac{m-2x}{20}.$$

2° Pour quelle valeur de m cette équation a-t-elle pour solution $x = \dfrac{3}{2}$?

3° Quelles sont les valeurs entières de m pour lesquelles x est compris entre 2 et 5?

759. — Résoudre et discuter :

$x \in \mathbb{R} \quad \exists x? \quad (x^2-2)(x^2-3) > (m-2)(m-3)$.

760. — Démontrer

$a \in \mathbb{R}^+ b \in \mathbb{R}^+ c \in \mathbb{R}^+ \ \forall a \ \forall b \ \forall c$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc.$$

Résoudre les inéquations $x \in \mathbb{R} \quad \exists x?$

761. $\sqrt{|x^2-1|} > x-5$.

762. $|(x-3)(x-5)| > x-3$.

763. $|x| + |x-1| + |x-2| > m$ (Discuter).

764. $(|x|-5).(|x|-3) > 0$.

765. $(|x|-5)(|x|-3) > \dfrac{|x|-5}{|x|-3}$.

766. $\big||x|-5\big| > \big||3x|-3\big|$

767. $\sqrt{|x-5|} > \sqrt{x^2-10x+25}$.

768. $(x-1)(x-2) > (|x|-1)(|x|-2)$.

CHAPITRE X

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. TRANSFORMATION DU POLYNOME DU SECOND DEGRÉ

127. Polynome du second degré. — Un polynome du second degré, réduit et ordonné, est de la forme :

$$ax^2 + bx + c,$$

Nous supposerons toujours le coefficient a différent de zéro : pour a nul, le degré s'abaisse. Le polynome du second degré contient donc, après réduction, trois termes au maximum. On le désigne souvent par l'expression *trinome du second degré*, dénomination critiquable puisqu'un tel polynome peut ne comporter que deux termes, comme il en va pour les binomes

$$5\,x^2 - 3\,; \qquad 8\,x^2 + x\,;$$

voire un seul, ainsi qu'en témoigne le monôme :

$$7\,x^2.$$

Comme toute expression algébrique contenant la variable x, le polynome $ax^2 + bx + c$ prend des valeurs numériques quand on donne à x des valeurs numériques. Au sens que le lecteur connaît déjà et que nous préciserons au Chapitre XX, c'est une *fonction* de x. On représente souvent le polynome $ax^2 + bx + c$ par la notation $f(x)$ (qui se lit f de x, abréviation de fonction de x) et on écrit :

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c. \qquad (1)$$

On entend par là que pour toute valeur numérique x_0 attribuée à x, il y a égalité entre la valeur numérique $ax_0^2 + bx_0 + c$ que prend le polynome

et la valeur numérique que prend l'expression $f(x)$ qui désigne et symbolise ce polynome :

$$x_0 \in R \quad \forall x_0 \qquad f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c. \qquad (2)$$

Nous allons maintenant établir des identités concernant le polynome du second degré; elles nous serviront en particulier pour résoudre les équations et les inéquations du second degré.

Présentons-les d'abord sur des exemples numériques.

128. Transformations de polynomes numériques du second degré.

1° On peut écrire $9x^2 - 4 \equiv (3x - 2)(3x + 2)$, en vertu d'une identité usuelle.

2° Le polynome $16x^2 + 1$ ne peut donner lieu à une décomposition analogue, car une telle décomposition caractérise nécessairement un polynome de la forme $\alpha^2x^2 - \beta^2 \quad \alpha \in R \quad \beta \in R$.

3° Le polynome $2x^2 - 3$ est identique à $(x\sqrt{2} - \sqrt{3})(x\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Il est loisible d'économiser un symbole de racine carrée en décomposant, non point :

$$f(x) \equiv 2x^2 - 3,$$

mais :

$$2f(x) \equiv 4x^2 - 6 = (2x - \sqrt{6})(2x + \sqrt{6}).$$

4° Le polynome $2x^2 + 3$ ne peut se décomposer en un produit. Retenons la possibilité d'écrire :

$$2(2x^2 + 3) \equiv 4x^2 + 6.$$

Dans l'expression $4x^2$, x intervient par l'intermédiaire du carré du monôme $2x$.

5° Le polynome $x^2 - 2x - 8$ est un trinome. La lettre x y intervient par l'intermédiaire du groupement $\boxed{x^2 - 2x}$, lequel apparaît quand on développe $(x - 1)^2$:

$$(x - 1)^2 \equiv \boxed{x^2 - 2x} + 1.$$

La possibilité s'offre donc de faire porter l'élévation au carré sur le binome $x - 1$ et d'écrire :

$$x^2 - 2x - 8 \equiv x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 \equiv (x - 1)^2 - 9,$$

Il suffit pour cela d'ajouter le 1 qui « manquait », et de le retrancher aussitôt. Nous avons ainsi mis le polynome sous la forme d'une différence de deux carrés. Il en résulte que :

$$x^2 - 2x - 8 \equiv (x - 1)^2 - 9 \equiv [(x - 1) + 3][(x - 1) - 3]$$
$$\equiv (x + 2)(x - 4).$$

6° Dans le même esprit, le polynome $x^2 + 4x + 2$ donne lieu aux identités :

$$x^2 + 4x + 2 \equiv x^2 + 4x + 4 - 4 + 2 \equiv (x + 2)^2 - 2$$
$$\equiv [(x + 2) + \sqrt{2}][(x + 2) - \sqrt{2}] \equiv (x + 2 + \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2}).$$

7° Le polynome $x^2 + 6x + 19$ peut se transformer comme suit :

$$x^2 + 6x + 19 \equiv x^2 + 6x + 9 + 10 \equiv (x + 3)^2 + 10.$$

Toute décomposition est impossible *à partir de cette forme* et l'on pressent, ce qu'une étude plus poussée confirmera, l'impossibilité d'une décomposition quelle qu'elle soit.

8° Soit le polynome $\quad f(x) \equiv 3x^2 - 5x + 1.$

Formons : $\quad 3f(x) \equiv 9x^2 - 15x + 3,$

afin de mieux voir s'il est possible de faire intervenir le carré de quelque binome.

Nous en présumons maintenant le premier terme : $3x$. Essayons :

$$(3x - m)^2 \equiv 9x^2 - 6mx + m^2.$$

Pour ajuster ce calcul au cas précis il suffit donc de poser :

$$6m = 15 \quad \text{soit} \quad m = \frac{5}{2}.$$

Nous poursuivons par :

$$3f(x) \equiv 9x^2 - 15x + 3 \equiv 9x^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3$$
$$\equiv \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}.$$

La présence du signe *moins* permet une décomposition en un produit :

$$3f(x) \equiv \left(3x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(3x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$
$$= \left(3x - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(3x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right).$$

9° Dans le même esprit, le polynome :

$$f(x) \equiv -7x^2 + x - 8,$$

est susceptible des transformations suivantes :

$$-7f(x) \equiv 49x^2 - 7x + 56 \equiv 49x^2 - 2 \times 7x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 56$$
$$\equiv \left(7x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{223}{4}.$$

10° Sans commentaires :

$$f(x) \equiv -\frac{1}{3}x^2 + 16x + 5$$
$$-\frac{1}{3}f(x) \equiv \frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{5}{3} \equiv \left(\frac{1}{3}x - 8\right)^2 - \frac{197}{3}$$
$$\equiv \left[\frac{x}{3} - 8 + \sqrt{\frac{197}{3}}\right]\left[\frac{x}{3} - 8 - \sqrt{\frac{197}{3}}\right].$$

129. Formes particulières du polynome du second degré. — Examinons le cas général.

Soit le polynome $f(x) \equiv ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$ (A)

$\forall x \quad af(x) \equiv a^2x^2 + abx + ac$ ou, en « complétant le carré » de $ax + \frac{b}{2}$:

$$\forall x \quad af(x) \equiv a^2x^2 + 2\left(a \times \frac{b}{2}\right)x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + ac$$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4\,ac - b^2}{4} \tag{B}$$

Le nombre $4\,ac - b^2$ est donc appelé à jouer un rôle remarquable dans la classification des divers cas.

L'usage scolaire est de considérer le nombre opposé $b^2 - 4\,ac$, d'appeler ce nombre le *discriminant* du polynome et de le représenter par la majuscule grecque Δ.

1er Cas. $4\,ac - b^2 > 0$, donc $\Delta = b^2 - 4\,ac < 0$

$4\,ac - b^2$ étant positif peut être considéré comme le carré du nombre positif $2\,K = \sqrt{4\,ac - b^2}$ et l'on a :

$$a\,f(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2 \tag{C_1}$$

2e Cas. $4\,ac - b^2 < 0$, donc $\Delta = b^2 - 4\,ac > 0$

$b^2 - 4\,ac$ étant positif peut être considéré comme le carré du nombre positif $\sqrt{b^2 - 4\,ac} = \sqrt{\Delta}$ et l'on a

$$a\,f(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 \tag{C_2}$$

Il est alors possible de décomposer en produit cette différence de deux carrés :

$$a\,f(x) \equiv \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right). \tag{D_2}$$

3e Cas. $4\,ac - b^2 = 0$, donc $\Delta = b^2 - 4\,ac = 0$

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2. \tag{C_3}$$

L'expression $af(x)$ est le carré d'un polynome du premier degré, elle se décompose en un produit de deux facteurs identiques, ce que nous soulignerons en usant d'une répétition :

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)\left(ax + \frac{b}{2}\right). \tag{D_3}$$

Résumé

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0. \qquad \text{(A)}$$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4} \qquad \text{(B)}$$

$$b^2 - 4ac \equiv \Delta.$$

1° $\Delta < 0 \quad \Delta = -4K^2 \quad \forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2.$ $\quad (C_1)$

2° $\Delta > 0 \quad \Delta = (\sqrt{\Delta})^2 \quad \forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2$ $\quad (C_2)$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right). \qquad (D_2)$$

3° $\Delta = 0 \quad \forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ $\quad (C_3)$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)\left(ax + \frac{b}{2}\right). \qquad (D_3)$$

REMARQUE. — Les identités de la page 76 :

$$x \in R \quad \forall x \quad x^2 - (a + b)x + ab \equiv (x - a)(x - b) \qquad (\alpha)$$

$$x \in R \quad \forall x \quad x^2 + (a + b)x + ab \equiv (x + a)(x + b) \qquad (\beta)$$

permettent dans certains cas le passage direct et facile de la forme (A) à la forme (D_2).

Exercices. Étant donné un polynome $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$, mettre le polynome $af(x)$ sous la forme (B), puis sous l'une des formes (C) et, éventuellement, sous l'une des formes (D). On donne $f(x) \equiv$

769. $x^2 + 2x + 2.$

770. $x^2 + 2x - 1.$

771. $x^2 + x + 1.$

772. $x^2 - x - 1.$

773. $x^2 - x + 1.$

774. $x^2 + x + \frac{1}{2}.$

775. $2x^2 + x + 1.$

776. $5x^2 + 2x + 5.$

777. $x^2 - x - \frac{3}{2}.$

778. $3x^2 + 5x - 1.$

779. $-3x^2 - 5x + 10.$

780. $-5x^2 + x + 1.$

781. $ax^2 + ax + a + 1.$

782. $\frac{1}{2}x^2 + 5x - 1.$

783. $-5x^2 + ax + a^2.$

784. $-\frac{1}{3}x^2 + ax - \frac{a^2}{5}.$

785. $-7x^2 - ax + ab.$

786. $-2x^2 - \frac{1}{4}x + 6.$

787. $\sqrt{2}x^2 - 6x + \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Exercices.

II. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

130. L'équation du second degré. — Une équation entière et rationnelle peut toujours s'écrire sous la forme :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) = 0 \tag{E}$$

où $f(x)$ désigne un polynome en x réduit et ordonné. Nous dirons que (E) est une équation du second degré si le polynome $f(x)$ est du second degré

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

A tout polynome du second degré $f(x)$ on peut donc associer une équation du second degré, que nous appellerons l'équation *associée* au polynome :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) = 0 \tag{$\mathcal{A}$}$$

et réciproquement, de l'équation vers un polynome.

Le domaine de validité d'une telle équation coïncidant avec R lui-même, on ne change pas les solutions éventuelles en remplaçant $f(x)$ par toute expression algébrique identique à $f(x)$.

De plus, du fait que a est supposé non nul (sinon l'équation ne serait pas du second degré), on sait que l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad af(x) = 0 \tag{$\mathcal{A}'$}$$

a le même ensemble de solutions sur R que l'équation ($\mathcal{A}$). Cette seconde forme nous permettra d'utiliser les résultats de la section précédente.

131. Résolution de l'équation du second degré. — Soit le polynome :

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Étudions l'équation : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax^2 + bx + c = 0$ (A)

ou, ce qui revient au même : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad af(x) = 0.$ (A)

En vertu de l'identité $af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}$, l'équation a le même ensemble de solutions que l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4} = 0 \tag{B}$$

Il convient donc de distinguer selon le signe du nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est le discriminant du polynome $ax^2 + bx + c$, premier membre de l'équation, et que nous appellerons le *discriminant de l'équation.* Nous retrouvons les cas étudiés dans la section précédente.

1° $\Delta < 0 \qquad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2.$

L'équation (2) se transforme régulièrement en l'équation :

$$x \in R \quad \exists x ? \qquad \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2 = 0 \qquad (C_1)$$

Le premier membre ne peut prendre que des valeurs supérieures ou égales à K^2. Il n'y a pas de solution.

2° $\Delta > 0$. Dans ce cas $af(x)$ est décomposable en produit, les identités :

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 \equiv \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right) \quad (C_2, D_2)$$

font que l'équation étudiée admet le même ensemble de solutions que l'équation :

$$x \in R \quad \exists x ? \qquad \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right) = 0 \qquad (D_2)$$

laquelle se décompose en deux équations du premier degré en vertu du théorème concernant la nullité d'un produit.

L'équation : $\quad x \in R \quad \exists x ? \qquad ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2} = 0$

admet, puisque a diffère de zéro, la solution : $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

L'autre équation admet la solution : $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ces deux nombres sont les deux solutions de l'équation (A).

3° $\Delta = 0$. Dans ce cas, l'identité $af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ montre que l'équation (1) équivaut à :

$$x \in R \quad \exists x ? \qquad \left(ax + \frac{b}{2}\right)\left(ax + \frac{b}{2}\right) = 0. \qquad (C_3)$$

Il existe une solution, qui, annulant les deux facteurs, est dite *double*. On convient d'écrire :

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

afin que ce cas apparaisse comme le cas particulier que donneraient les formules précédentes si l'on y remplaçait $\Delta = b^2 - 4ac$ par zéro.

▪ **THÉORÈME. — L'équation :**

$$a \neq 0 \quad x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad ax^2 + bx + c = 0$$

1° n'admet pas de racine si son discriminant[1] $b^2 - 4ac$ est négatif,

2° admet, quand son discriminant est positif, deux racines données par les formules :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1)$$

3° admet, quand son discriminant est nul, deux racines égales

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

132. Exemples. — Lorsqu'une équation du second degré ne relève pas d'une méthode directement appropriée à son cas, les formules que nous avons établies permettent soit de constater une impossibilité, soit de calculer effectivement les racines.

Nous ne saurions cependant trop insister sur le bénéfice que l'on retirera en s'imposant d'appliquer, non pas les formules, mais la *méthode*. Dans tous les cas, tant numériques que littéraux, on guettera toute occasion de simplifier les calculs par une utilisation judicieuse des particularités.

EXEMPLE 1. $\quad x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad x^2 - 15x - 35 = 0.$

Aucune particularité, semble-t-il. On peut utiliser les formules :

$$a = 1, \qquad b = -15, \qquad c = -35.$$

$$b^2 - 4ac = 3^2 \times 5^2 + 4 \times 7 \times 5 = 5(45 + 28) = 5 \times 73.$$

La factorisation ne faisant pas apparaître de carrés, nous écrirons :

$$x' = \frac{15 - \sqrt{365}}{2}; \qquad x'' = \frac{15 + \sqrt{365}}{2}.$$

EXEMPLE 2. $\quad x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad 54x^2 + 7x = 0.$

Le premier membre de l'équation se décompose par mise en facteur de x. L'équation s'écrit :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad x(54x + 7) = 0.$$

Les solutions sont : $\quad x' = -\frac{7}{54} \quad$ et $\quad x'' = 0.$

On traitera de même toutes les équations du type :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x ? \quad ax^2 + bx = 0.$$

D'une façon générale, lorsque le premier membre est aisément décomposable, ou décomposé, on utilisera cette décomposition pour résoudre l'équation.

La méthode générale ayant pour objet d'aboutir à la décomposition, il serait d'une insigne maladresse d'y recourir pour obtenir laborieusement un résultat évident.

1. Du latin *discrimen* : séparation. Le signe du discriminant sépare les divers cas.

EXEMPLE 3. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - (a + 2b)x + 2ab = 0.$

Nous pouvons appliquer l'identité (α) (page 205) :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad (x - a)(x - 2b) = 0$$
$$x' = a; \qquad x'' = 2b.$$

Nous obtenons des racines rationnelles par rapport aux paramètres. Or les formules générales sont irrationnelles. Cherchons l'explication. Le discriminant est :

$$(a + 2b)^2 - 8ab = a^2 + 4ab + 4b^2 - 8ab = a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2.$$

Le discriminant est un *carré parfait* : c'est le carré de l'expression $a - 2b$ ou de l'expression $2b - a$. Les racines sont

$$\frac{a + 2b + 2b - a}{2} = 2b, \qquad \frac{a + 2b + a - 2b}{2} = a.$$

EXEMPLE 4. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad -3x^2 + 11x + 8{,}25 = 0.$

Pour éviter une faute de signe dans l'application des formules il est préférable de changer tous les signes de l'équation, qui devient :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad 3x^2 - 11x - 8{,}25 = 0.$$

Le discriminant est :

$$121 + 4 \times 3 \times 8{,}25 = 220 = 4 \times 55.$$

Les racines sont donc : $x' = \dfrac{11 - 2\sqrt{55}}{6}$ et $x'' = \dfrac{11 + 2\sqrt{55}}{6}$.

EXEMPLE 5. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad mx^2 + 5x - 3m = 0 \qquad m \neq 0.$

Cette équation contient le paramètre m. Formons le discriminant :

$$\Delta = 25 - 4m(-3m) = 25 + 12m^2.$$

Δ est positif pour toute valeur de m. L'équation a des racines données par les formules

$$x' = \frac{-5 - \sqrt{25 + 12m^2}}{2m} \qquad \text{et,} \qquad x'' = \frac{-5 + \sqrt{25 + 12m^2}}{2m}.$$

Pour $m = 0$, l'équation est une équation du premier degré qui admet la racine :

$$x = 0.$$

Nous aurions pu annoncer, avant même de calculer le discriminant, que celui-ci serait positif. La formule $\Delta = b^2 - 4ac$ montre en effet que :

$$ac < 0 \implies b^2 - 4ac > 0 \implies \exists x',\ \exists x''.$$

Formulons ce résultat général.

- **Quand a et c sont de signes contraires, l'équation**

  $$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

  admet deux racines.

La condition $ac < 0$ est une condition *suffisante* pour que l'équation admette des racines. Ce n'est pas une condition nécessaire.

EXEMPLE 6. $x \in R \quad \exists x? \quad 3x^2 - 5 = 0.$

On écrit : $x \in R \quad \exists x? \quad 9x^2 - 15 = 0$

$x \in R \quad \exists x? \quad (3x + \sqrt{15})(3x - \sqrt{15}) = 0$

d'où :
$$x' = -\frac{\sqrt{15}}{3} \quad \text{et} \quad x'' = +\frac{\sqrt{15}}{3}$$

EXEMPLE 7. $x \in R \quad \exists x? \quad 3x^2 - 34x + 5 = 0.$

Utilisons les formules : $a = 3, \quad b = -34, \quad c = 5;$

$$\Delta = 34^2 - 4 \times 3 \times 5 = 4 \times 17^2 - 4 \times 3 \times 5$$
$$\Delta = 4 \times (17^2 - 15) = 4 \times 274; \qquad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{274}$$
$$x' = \frac{34 - 2\sqrt{274}}{2 \times 3} = \frac{17 - \sqrt{274}}{3}; \qquad x'' = \frac{17 + \sqrt{274}}{3}.$$

Nous avons simplifié par deux. La remarque prête à généralisation.

EMPLOI DU DISCRIMINANT RÉDUIT. — **Quand le coefficient b contient en évidence le facteur 2, on peut simplifier les formules.**

Soit : $b = 2b'$.

On a alors : $b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$

d'où
$$x' = \frac{-2b' - 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-2b' + 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

ou en simplifiant par 2 :
$$x' = \frac{-b' - \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \qquad x'' = \frac{-b' + \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \qquad \text{(I } bis\text{)}$$

$b'^2 - ac$ s'appelle le *discriminant réduit.* On pose $\Delta' = b'^2 - ac$.

AUTRE EXEMPLE. $x \in R \quad \exists x? \quad 5x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Delta' = 9 - 5 = 4 \qquad x' = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}; \qquad x'' = \frac{3+2}{5} = 1.$$

133. Comparaison des deux racines. — Nous avons donné les formules :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Pour $\Delta \neq 0$, les deux racines sont inégales. **Quelle est la plus grande?**

Les numérateurs se classent toujours dans l'ordre :

$$-b - \sqrt{\Delta} < -b + \sqrt{\Delta}.$$

On peut donc en conclure, selon le signe de a :

1° Pour $a < 0 \quad x' > x''$.

2° Pour $a > 0 \quad x' < x''$.

Exercices. *Résoudre les équations suivantes, ou reconnaître les impossibilités (on choisira la méthode la mieux appropriée).*

$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x?$

788. $(x+1)(x-3)=0.$

789. $(5x-3)(5x+1)=0.$

790. $(x-3)^2-16=0.$

791. $(x+3)^2-16=0.$

792. $(x-2)^2+2=0.$

793. $x^2-8x+6=0.$

794. $x^2-10x+16=0.$

795. $x^2-4x-32=0.$

796. $x^2-7x+6=0.$

797. $x^2-x-6=0.$

798. $8x^2+6x+1=0.$

799. $6x^2-7x+1=0.$

800. $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{8})x+4=0.$

801. $x^2+1{,}22x-0{,}01=0.$

802. $100x^2-20x+3=0.$

803. $169x^2+13x-1=0.$

804. $x^2-5\mathrm{R}x+6\mathrm{R}^2=0.$

805. $x^2-mx+m-1=0.$

806. $x^2-4ax+3a^2=0.$

807. $x^2-2(a-b)x-4ab=0.$

808. $(2x-1)(3x-2)=0.$

809. $(x-\sqrt{2})(2x-\sqrt{3})=0.$

810. $4x^2-36=0.$

811. $16x^2-25=0.$

812. $16x^2+25=0.$

813. $x^2+8x+6=0.$

814. $x^2+10x+16=0.$

815. $x^2+4x-32=0.$

816. $x^2+7x+6=0.$

817. $x^2+x-6=0.$

818. $8x^2-6x+1=0.$

819. $7x^2+5x+1=0.$

820. $x^2+(1+\pi)x+\pi=0.$

821. $x^2-0{,}36x-0{,}18=0$

822. $25x^2-10x+0{,}5=0.$

823. $121x^2-11x+0{,}1=0.$

824. $\dfrac{5x-1}{x+2}-\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{8}{3}.$

825. $x^2-(a+2)x+2a=0.$

826. $2ax^2-(a+2)x+1=0.$

827. $ax^2-(a^2+3)x+3a=0.$

828. $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0.$

829. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{7}{12}.$

830. $\dfrac{4x-1}{x-1}-\dfrac{4x+1}{x+1}=\dfrac{9}{4}.$

831. $(3x-1)(2x+1)=9x^2-1.$

832. $x^2-3\mathrm{R}x+2\mathrm{R}^2=0.$

833. $x^2-\mathrm{R}x-6\mathrm{R}^2=0.$

834. $x^2+4ax+3a^2=0.$

835. $x^2+2(a-b)x-4ab=0.$

836. $5x^2-6x+27=0.$

837. $(x-3)(x-2)=(2x-1)(x-3).$

838. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-2a}+\dfrac{1}{x}=0.$

839. $(\sqrt{3}+1)x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1=0.$

840. $(m-3)x^2-2mx+12=0.$

841. $(x-a)(ax-1)=x^2-a^2.$

842. $x^2-6x+9=(x-3)(5x-1).$

840. $x^3-8=(x-2)^2(2x+1).$

844. $x(x-1)(x-2)-x^3-1=0.$

845. $\dfrac{4x-3}{2x-5}-\dfrac{5x+1}{x+3}=\dfrac{19}{3}.$

846. $x^2-(m+2)x+m+1=0.$

847. $2abx^2-(2a+b)x+1=0.$

840. $x^2-2ax+a^2-b^2=0.$

849. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$

850. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{24}.$

851. $\dfrac{x^2-x-1}{x+2}=2x+3.$

852. $(5x-1)(x+2)=(2x-3)(5x-1).$

853. $(5x-1)(x+2)(x-3)=0.$

854. $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{x+a}{x}=\dfrac{b^2+1}{b}.$

855. $(x^2+1)(x-4)(x+4)=0.$

856. $x^2-16=(2x+3)(x+4).$

857. $4x^2-4x+1=(2x-1)(x-2).$

858. $\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0.$

Exercices.

III. SIGNES DES RACINES.

134. Le problème des signes des racines. — Dans cette section nous nous proposons exclusivement de déterminer les signes des racines d'une équation du second degré :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x ? \quad ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(E)}$$

dans le cas où les racines existent.

L'idée de résoudre l'équation et de déterminer ensuite le signe de chaque racine peut paraître la plus simple; en fait elle conduit à des inéquations irrationnelles. Il vaut mieux procéder autrement. Étudions d'abord quelques exemples.

EXEMPLE 1. $\exists\, x ? \quad x^2 + 7x + 1 = 0$.

On a $\Delta = 7^2 - 4$, donc $\Delta > 0$: les racines existent. Or pour toute valeur positive x_0, les monômes à coefficients positifs

$$x^2, \qquad 7x, \qquad 1$$

prennent des valeurs positives, et leur somme ne saurait être nulle.

Les racines sont donc *négatives.*

Le même raisonnement s'applique à toute équation qui admet des racines et dont les coefficients a, b, c (pris dans cet ordre) répondent quant à leurs signes au *schéma uni :*

$$+, \qquad +, \qquad +$$

ou au *schéma :*

$$-, \qquad -, \qquad -$$

obtenu en changeant tous les signes du premier.

EXEMPLE 2. $\exists\, x ? \quad x^2 - 5x + 2 = 0$.

On a $\Delta = 25 - 8$, donc $\Delta > 0$: les racines existent. Or pour toute valeur négative x_0, les monômes à coefficients alternés

$$x^2, \qquad -5x, \qquad 2$$

prennent des valeurs positives, et leur somme ne saurait être nulle.

Les racines sont donc *positives.*

Le même raisonnement s'applique à toute équation qui admet des racines et dont les coefficients a, b, c (pris dans cet ordre) répondent, quant à leurs signes, au *schéma alterné :*

$$+, \quad -, \quad +$$

ou au *schéma :*

$$-, \quad +, \quad -$$

obtenu en changeant tous les signes du premier.

EXEMPLE 3. $\exists x? \quad x^2 + 5x - 1 = 0.$

Le schéma des signes des coefficients est ici :

$$+, \quad +, \quad -$$

les signes extrêmes sont opposés : c'est le cas où $ac < 0$. Nous avons déjà noté l'implication :

$$ac < 0 \implies \Delta > 0$$

qui dans le cas présent prouve l'existence des racines.

En fait, puisque $\Delta = b^2 - 4ac$, nous avons l'implication plus forte :

$$ac < 0 \implies \Delta > b^2$$

ou : $$ac < 0 \implies (-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta}) < 0.$$

Les expressions :

$$-b + \sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad -b - \sqrt{\Delta},$$

qui figurent en numérateur dans les formules de résolution ont donc des signes contraires, et les racines sont aussi de signes contraires.

Il y a *une* racine *positive* et *une* racine *négative*. Le même raisonnement s'applique à toute équation dont les coefficients a, b, c (pris dans cet ordre) répondent quant à leurs signes à un schéma où les signes extrêmes s'opposent :

$$+, \quad +, \quad -$$
$$+, \quad -, \quad -$$
$$-, \quad +, \quad +$$
$$-, \quad -, \quad +$$

135. Théorème de Descartes[1]. — Pour décrire simplement les différents schémas de signes que nous venons de rencontrer, posons la définition suivante :

☆ DÉFINITION. — **Ayant écrit sur une ligne le schéma qui donne les signes des coefficients a, b, c (pris dans cet ordre), nous dirons chaque fois que deux signes consécutifs diffèrent, que cette différence introduit dans le schéma *une variation*.**

Récapitulant les résultats obtenus, nous pouvons dire :

1° $\Delta > 0$ et un schéma à *zéro* variation (schéma uni)

$$+, \quad +, \quad + \quad \text{ou} \quad -, \quad -, \quad -,$$

impliquent *zéro* racine positive (et deux négatives).

2° $\Delta > 0$ et un schéma à *deux* variations (schéma alterné)

$$+, \quad -, \quad + \quad \text{ou} \quad -, \quad +, \quad -$$

impliquent *deux* racines positives.

3° Un schéma à *une* seule variation

$$+, \quad +, \quad - \quad \text{ou} \quad +, \quad -, \quad -, \quad \text{ou} \quad -, \quad + \quad +, \quad \text{ou} \quad -, \quad -, +$$

(schéma à signes extrêmes opposés)

implique $\Delta > 0$ et *une* racine positive (l'autre étant négative).

En conclusion nous formulerons donc :

1. René DESCARTES (1596-1650), philosophe, mathématicien et physicien français auteur du *Discours de la méthode*.

▪ THÉORÈME DE DESCARTES. — **Si l'équation :**

$$x \in \mathbf{R} \quad \exists x? \quad ax^2 + bx + c = 0$$

admet des racines, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations du schéma :

signe de a, signe de b, signe de c.

REMARQUE. — Les cas où $b = 0$ et où $c = 0$ se traitent directement.

136. Application à une équation paramétrique. — *Soit, par exemple, à discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines de l'équation*

$$x \in \mathrm{R} \quad m \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0. \quad \text{(E)}$$

Cette question revient à connaître, suivant les valeurs de m, les signes du discriminant Δ et des trois coefficients a, b, c.

1° $$\frac{1}{4}\Delta = (m-1)^2 - m(m-3) = m + 1$$

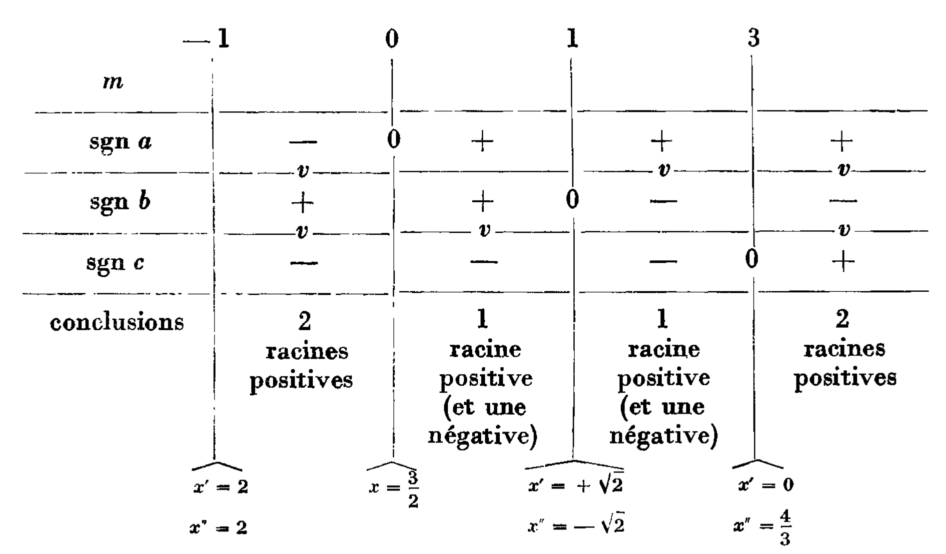
$$\Delta > 0 \iff m > -1.$$

2° $a = m \qquad a > 0 \iff m > 0.$

3° $b = -2(m-1) \qquad b > 0 \iff m < 1.$

4° $c = m - 3 \qquad c > 0 \iff m > 3.$

Nous formerons alors le tableau suivant, où v indique une variation.



m	-1		0		1		3	
sgn a		$-$	0	$+$		$+$		$+$
		v				v		v
sgn b		$+$		$+$	0	$-$		$-$
		v		v				v
sgn c		$-$		$-$		$-$	0	$+$
conclusions		2 racines positives		1 racine positive (et une négative)		1 racine positive (et une négative)		2 racines positives
	$x' = 2$, $x'' = 2$		$x = \frac{3}{2}$		$x' = +\sqrt{2}$, $x'' = -\sqrt{2}$		$x' = 0$, $x'' = \frac{4}{3}$	

Les *cas limites* s'étudient directement. Pour $m = 0$ l'équation (E) devient une équation du premier degré et admet une racine.

137. Sur le classement des valeurs remarquables. — Dans l'exemple précédent, le classement des valeurs remarquables de m n'a soulevé aucune difficulté. Il n'en va pas toujours ainsi et il convient de se ménager des vérifications du genre suivant :

1° Pour $c = 0$, l'équation admet zéro comme racine; la ou les valeurs de m correspondantes se trouvent donc dans des intervalles où Δ est positif.

2° Les valeurs de m pour lesquelles le coefficient a est nul se trouvent dans une région où $\Delta = b^2 - ac$ est positif (ou nul).

EXEMPLE. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - (3m - 1)x + 2m + 5 = 0$

$$\Delta = (3m - 1)^2 - 4(2m + 5) = 9m^2 - 14m - 19$$

Δ nul pour : $\qquad m' = \dfrac{7 - 2\sqrt{55}}{9} \qquad$ et $\qquad m'' = \dfrac{7 + 2\sqrt{55}}{9}$.

Nous verrons plus tard, n° **151**, que Δ est positif à l'extérieur de l'intervalle $]m', m''[$.

Or c est nul pour $2m + 5 = 0$, soit $m = -\dfrac{5}{2}$.

On peut affirmer que :

$$-\frac{5}{2} < \frac{7 - 2\sqrt{55}}{9}.$$

Exercices. *Sans calculer les racines, donner les signes des racines des équations lorsque les racines existent* $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

859. $3x^2 - 5x - 1 = 0; \qquad 5x^2 + x + 1 = 0.$

860. $4x^2 - 8x + 1 = 0; \qquad 4x^2 + 8x + 1 = 0.$

861. $x^2 + 3x + 1 = 0; \qquad 7x^2 + x + 2 = 0.$

862. $x^2 - 2\mathrm{R}x - \mathrm{R}^2 = 0; \qquad x^2 - 3\mathrm{R}x + \mathrm{R}^2 = 0 \qquad (\mathrm{R} > 0).$

863. — On donne l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m + 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0.$$

1° Pour quelles valeurs de m a-t-elle des racines?
2° Pour quelles valeurs de m a-t-elle deux racines de signes contraires?
3° Pour quelles valeurs de m a-t-elle deux racines positives?

864. — Existence et signes des racines de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \lambda x^2 - 2(\lambda - 2)x + \lambda - 3 = 0.$$

865. — Existence et signes des racines de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 3m - 1 = 0.$$

On vérifiera que $\dfrac{1}{4}\Delta = 2m(-m + 3)$.

866. — Existence et signe des racines de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad mx^2 - 2(m + 1)x + m - 1 = 0.$$

867. — Déterminer m pour que l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad mx^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$$

admette deux racines de signes contraires.

868. — Déterminer m pour que l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$$

admette deux racines positives. **Exercices.**

IV. RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES

138. Somme et produit des racines. — Les formules :

$$b^2 - 4\,ac > 0; \quad x' = \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,ax}}{2\,a}; \quad x'' = \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \qquad \text{(I)}$$

sont irrationnelles par rapport aux coefficients a, b, c. Les expressions donnant x' et x'' sont des expressions *conjuguées* : on passe de l'une à l'autre en changeant le signe devant le radical. Il existe donc deux façons simples de combiner x' et x'' pour obtenir un résultat rationnel : en faire la somme et en faire le produit.

1° Somme des racines :

$$b^2 - 4\,ac > 0, \quad x' + x'' = \frac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} + \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$
$$= -\frac{2\,b}{2\,a} = -\frac{b}{a}.$$

2° Produit des racines :

$$b^2 - 4\,ac > 0, \quad x'x'' = \frac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \times \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4\,ac)}{4\,a^2} = \frac{4\,ac}{4\,a^2} = \frac{c}{a}.$$

Dans le cas particulier où $b^2 - 4\,ac = 0$, nous avons posé :

$$x' = x'' = -\frac{b}{2\,a}. \qquad \text{(II)}$$

On vérifie facilement que les précédents résultats restent valables :

$$x' + x'' = -\frac{b}{2\,a} + \frac{-\,b}{2\,a} = \frac{-\,b}{a}$$
$$x'x'' = \left(-\frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2}{4\,a^2} = \frac{4\,ac}{4\,a^2} = \frac{c}{a}.$$

Nous avons donc démontré l'implication :

$b^2 - 4\,ac \geqslant 0$ et x' et x'' sont *les* racines de $x \in \mathbf{R} \quad \exists\, x? \quad ax^2 + bx + c = 0.$	$\Longrightarrow$	$b^2 - 4\,ac \geqslant 0$ $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$ $x'x'' = \dfrac{c}{a}.$

139. Étude de la proposition réciproque. — Supposons maintenant que deux nombres, que nous appellerons α et β pour la clarté du raisonnement, vérifient les conditions :

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \\ \alpha\beta = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Pouvons-nous en conclure que α et β sont LES[1] racines de l'équation du second degré admettant a, b et c comme coefficients?

Il est évident que α et β sont les racines de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \qquad \text{(E)}$$

et plus généralement :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \mathrm{K}(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \quad \mathrm{K} \neq 0. \qquad \text{(E}'\text{)}$$

En vérifient-ils d'autres? Réservons cette question : il nous suffit pour le moment de savoir que α et β vérifient (E′) que nous pouvons écrire :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \mathrm{K}[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] = 0 \qquad \text{(E}'\text{)}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'hypothèse $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \mathrm{K}\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0 \qquad \text{(E}'\text{)}$$

et, entre autres, pour $\mathrm{K} = a$.

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

Nous avons donc une implication réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{c} b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ \text{et} \\ x' \text{ et } x'' \text{ sont les racines de} \\ x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad ax^2 + bx + c = 0. \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{c} b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ x' + x'' = -\frac{b}{a} \\ x'x'' = \frac{c}{a}. \end{array}} \qquad \text{(III)}$$

1. — L'article défini *les* traduit le fait que l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$ formé par les deux nombres coïncide avec l'ensemble $\{x', x''\}$ formé par les deux racines.
Si nous avions écrit : « ... sont racines ... » cela aurait signifié : α vérifie l'équation, β vérifie l'équation, avec la possibilité d'avoir par exemple $\alpha = x'$, $\beta = x'$ (et x'' quelconque). (Voir Ex. 892.)

140. Équations qui ont les mêmes racines. — Nous sommes en mesure d'aborder la question que nous avons soulevée, mais réservée, au paragraphe précédent.

Supposons que les équations :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(E)}$$
$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad a'x^2 + b'x + c' = 0 \qquad \text{(E')}$$

admettent des racines, et les mêmes racines, α et β.

On aura : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$.

D'où : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. La réciproque est évidente.

■ THÉORÈME. — **Pour que deux équations du second degré aient les mêmes racines, il faut et il suffit que l'une ait des racines et que leurs coefficients soient proportionnels.**

Ainsi les équations : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \mathrm{K}(x-\alpha)(x-\beta) = 0$,

constituent l'ensemble de toutes les équations du second degré admettant α et β pour racines.

EXEMPLE. — 1. Formons toutes les équations ayant pour racines 2 et 5 :

$$2 + 5 = 7, \qquad 2 \times 5 = 10, \qquad \text{donc :}$$

Réponse : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \mathrm{K}x^2 - 7\,\mathrm{K}x + 10\,\mathrm{K} = 0.$

2. Formons toutes les équations dont les racines sont $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$:

$$2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4 \qquad (2 + \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{2}) = 2$$

Réponse : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \mathrm{K}x^2 - 4\,\mathrm{K}x + 2\,\mathrm{K} = 0.$

141. Existe-t-il deux nombres ayant une somme et un produit donnés ? — La forme des relations III suggère le problème suivant :

$$\alpha \in \mathrm{R} \quad \beta \in \mathrm{R} \quad \exists \alpha? \quad \exists \beta? \quad \alpha + \beta = \mathrm{S} \quad \alpha.\beta = \mathrm{P}; \quad \mathrm{S} \text{ et } \mathrm{P} \text{ donnés.}$$

D'après l'étude précédente, ces nombres, s'ils existent, sont les racines de :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0$$

et réciproquement, si cette équation admet des racines, celles-ci vérifient $\alpha + \beta = \mathrm{S}$ $\alpha.\beta = \mathrm{P}$. La condition d'existence est donc $\mathrm{S}^2 - 4\,\mathrm{P} \geqslant 0$. On obtient :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathrm{S} - \sqrt{\mathrm{S}^2 - 4\,\mathrm{P}}}{2} \\ \beta = \dfrac{\mathrm{S} + \sqrt{\mathrm{S}^2 - 4\,\mathrm{P}}}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathrm{S} + \sqrt{\mathrm{S}^2 - 4\,\mathrm{P}}}{2} \\ \beta = \dfrac{\mathrm{S} - \sqrt{\mathrm{S}^2 - 4\,\mathrm{P}}}{2} \end{cases}$$

et, pour $\mathrm{S}^2 - 4\,\mathrm{P} = 0$, $\alpha = \beta = \frac{\mathrm{S}}{2}$.

REMARQUE. *a*) La condition $S^2 - 4P \geqslant 0$ est toujours vérifiée si $P \leqslant 0$.
b) Cette condition peut s'écrire :

$$S^2 \geqslant 4P \quad \text{ou} \quad \left(\frac{S}{2}\right)^2 \geqslant P.$$

Ceci montre que le *produit de deux nombres est toujours inférieur ou au plus égal au carré de leur demi-somme.*

On peut énoncer :

Le produit de deux nombres réels dont la somme est constante acquiert sa plus grande valeur quand ces deux nombres sont égaux.

EXEMPLE. — De tous les rectangles qui ont le même périmètre, le carré est celui dont l'aire est la plus grande.

En se limitant à des nombres positifs on voit que :

La moyenne géométrique de deux nombres positifs est inférieure ou au plus égale à leur moyenne arithmétique

$$\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \beta > 0 \implies \sqrt{\alpha\beta} \leqslant \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

On peut dire aussi :

La somme de deux nombres positifs dont le produit est constant acquiert sa plus petite valeur quand ces deux nombres sont égaux.

EXEMPLE. — De tous les rectangles ayant la même aire, le carré est celui qui a le plus petit périmètre.

142. Déterminer la seconde racine d'une équation du second degré dont l'une est connue. — Les formules donnant la somme et le produit des racines d'une équation permettent de trouver la seconde racine quand l'une est connue. On se sert de celle qui paraît la plus appropriée (le plus souvent, le produit).

EXEMPLE. $x \in R \quad \exists x? \quad mx^2 - (2m + 1)x + m + 1 = 0, \quad m \neq 0.$

on voit que : $\forall m \quad m - (2m + 1) + m + 1 = 0$ d'où $x' = 1$

et $x' \times x'' = \dfrac{m+1}{m}$ donne $x'' = \dfrac{m+1}{m}$.

143. Équations dont les racines sont liées par une relation imposée. —
Soit l'équation : $x \in R \quad \exists x? \quad x^2 + px + q = 0$

dont les racines, pour $p^2 - 4q \geqslant 0$, sont α et β.

Si nous imposons aux racines de vérifier une relation donnée, nous obtiendrons une relation liant p et q. Ce calcul, si l'on utilisait les formules de résolution, comporterait des radicaux. On évite de telles opérations en utilisant les relations entre les coefficients et les racines.

EXEMPLE. $x \in R \quad m \in R \quad \exists x? \quad x^2 - (m + 3)x + 2(m + 2) = 0 \quad (1)$

Soit à déterminer s'il existe une valeur du paramètre m pour laquelle l'équation ait une racine double de l'autre.

Le problème posé se traduit par les équations :

$$x' \in R, \quad x'' \in R \quad m \in R \quad \exists x? \quad \exists m? \quad x' + x'' = m + 3 \quad (2)$$

$$x'x'' = 2(m + 2) \quad (3)$$

$$x' = 2x''. \quad (4)$$

En utilisant d'abord les relations linéaires (2) et (4), on obtient :

$$\begin{cases} x' + x'' = m + 3 & (2) \\ x' = 2\,x'' & (4) \end{cases} \iff \begin{cases} x'' = \dfrac{m+3}{3} & (5) \\ x' = 2\,\dfrac{m+3}{3}. & (6) \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans (3) on obtient pour m :

$$\exists\, m? \qquad \frac{2\,(m+3)^2}{9} = 2\,(m+2) \tag{7}$$

ou, réductions faites, $\exists\, m? \quad m^2 - 3\,m - 9 = 0.$ **(7 *bis*)**

On en déduit :

$$m_1 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \quad \text{et :} \quad m_2 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

Par suite $\begin{cases} x''_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ x'_1 = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x''_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x'_2 = 3 + \sqrt{5}. \end{cases}$

Exemple 2.

Déterminer m pour que l'équation

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad x^2 - mx + m + 1 = 0$$

admette deux racines liées par la relation $x'x'' + 2\,(x' + x'') - 19 = 0.$

***Si* ces racines existent, on doit avoir :** $x' + x'' = m \qquad x'x'' = m + 1.$

La relation imposée donne : $m + 1 + 2\,m - 19 = 0 \iff m = 6.$

L'équation cherchée ne peut être que :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad x^2 - 6\,x + 7 = 0$$

Elle a effectivement deux racines : $x' = 3 - \sqrt{2}\,; \qquad x'' = 3 + \sqrt{2}$ **et convient.**

Exemple 3.

Déterminer λ pour que l'équation

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \qquad \lambda x^2 + 20\,x - \lambda + 124 = 0 \qquad \lambda \neq 0$$

admette deux racines α et β telles que $\beta = \alpha^2$.

Si α et β existent, on a : $\alpha\beta = -1 + \dfrac{124}{\lambda} \qquad$ **et** $\qquad \alpha^2 = \beta$

d'où :

$$\alpha^3 = -1 + \frac{124}{\lambda}. \tag{1}$$

D'autre part :

$$\beta + \alpha = \frac{-20}{\lambda}. \tag{2}$$

Pour utiliser (1) élevons au cube les deux membres de (2), il vient :

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\,\alpha\beta\,(\alpha + \beta) = -\frac{8\,000}{\lambda^3}$$

d'où :

$$\exists\, \lambda? \quad -1 + \frac{124}{\lambda} + \left(-1 + \frac{124}{\lambda}\right)^2 - \frac{60}{\lambda}\left(-1 + \frac{124}{\lambda}\right) = -\frac{8\,000}{\lambda^3}$$

ou : $\exists \lambda ? \quad \left(-1+\frac{124}{\lambda}\right)\left(1-1+\frac{124}{\lambda}-\frac{60}{\lambda}\right)+\frac{8\,000}{\lambda^3}=0$

ou : $\exists \lambda ? \quad \lambda(-\lambda+124)64+8\,000=0$

ou : $\exists \lambda ? \quad \lambda^2-124\lambda-125=0$

d'où deux valeurs à étudier : $\lambda'=-1$ et $\lambda''=125$.

Pour $\lambda'=-1$, l'équation devient

$$\exists x ? \quad -x^2+20x+125=0.$$

Les racines en sont -5 et $+25$ et, effectivement : $25=(-5)^2$.

Pour $\lambda''=125$, l'équation devient :

$$\exists x ? \quad 125x^2+20x-1=0.$$

Elle admet les racines $-\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{25}$, et, effectivement : $\left(\frac{1}{-5}\right)^2=\frac{1}{25}$.

Conclusion a ces exemples. — Le lecteur retiendra que pour déterminer les valeurs d'un paramètre (ou des paramètres) de telle sorte que les racines d'une équation du second degré (E) soient liées par une relation (L), il est en général très avantageux de se servir des relations entre les coefficients et les racines de (E).

144. Fonctions symétriques des racines. — Les expressions :

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x'x''=\frac{c}{a}$$

ne changent pas si l'on permute x' et x'' : ce sont des expressions *symétriques* en x' et x''.

On démontre, et nous vérifions sur des exemples simples, que toute expression symétrique en x' et x'' s'exprime au moyen des deux expressions fondamentales : somme et produit. On peut alors, après avoir vérifié qu'une équation admet des racines x' et x'', mais sans résoudre l'équation, calculer des expressions symétriques en x' et x''.

Exemples. 1° Calculer $x'^2+x''^2$, si $b^2-4ac \geqslant 0$.

On a : $x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

2° Pour $b^2-4ac \geqslant 0$ former l'équation qui a pour racines $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$.

On a : $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}=-\frac{b}{a}\times\frac{a}{c}=-\frac{b}{c}$

$$\frac{1}{x'}\times\frac{1}{x''}=\frac{1}{x'x''}=\frac{a}{c} \quad \text{avec} \quad c \neq 0.$$

L'équation demandée est : $\exists X ?\quad X^2 + \frac{b}{c}X + \frac{a}{c} = 0$

ou : $\exists X ?\quad cX^2 + bX + a = 0.$

Le discriminant de cette équation est $b^2 - 4ac$. On vérifie que cette équation a des racines si la première en a. On l'appelle *l'équation aux inverses* de la première.

Exercices. *Trouver deux nombres connaissant leur somme s et leur produit p :*

869. $s = 14$, $p = 33$.

870. $s = 27$, $p = 50$.

871. $s = -12$, $p = 11$.

872. $s = -43$, $p = 442$.

873. $s = 72$, $p = 1\,296$.

Mettre en évidence une des racines des équations suivantes, et en déduire l'autre $x \in \mathbf{R}\ \exists x?$

874. $x^2 - 7x + 6 = 0$; $6x^2 - 7x + 1 = 0$.

875. $5x^2 + 9x + 4 = 0$; $7x^2 + 8x + 1 = 0$.

876. $x(x + b) = a(a + b)$; $ax^2 + bx + c = a + b + c$.

877. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$; $\frac{x}{a} - \frac{a}{x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$.

878. $x(x - a) = b(b - a)$.

879. $ax^2 + bx + c = a - b + c$.

Résoudre les systèmes $\exists x?\ \exists y?$

880. I. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ xy = -15 \end{cases}$

Former toutes les équations ayant pour racines :

881. $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ **882.** $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

883. $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{4}$.

884. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

885. $m - \sqrt{m^2 + 1}$ et $m + \sqrt{m^2 + 1}$.

Déterminer les paramètres pour que les équations suivantes admettent les mêmes racines :

886. $\begin{cases} x^2 - (2m - 1)x + 2m - 30 = 0 \\ x^2 - (m - 1)x + m + p = 0 \end{cases}$ **887.** $\begin{cases} x^2 - (m + 1)x + m + p = 0 \\ 2x^2 - (m - 1)x + 3p = 0. \end{cases}$

888. $\begin{cases} mx^2 - 2x + m - p = 0 \\ (m + 1)x^2 - mx + p = 0. \end{cases}$

Déterminer m pour que les équations suivantes admettent deux racines liées par une relation (L) *:*

889. $\exists x?\ (m - 3)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ et (L) $x'^2 + x''^2 = 52$.

890. $\exists x?\ (m - 4)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ et (L) $7x' - x'' = 6$.

891. $\exists?\ x^2 - 2mx + m^2 - m + 8 = 0$

et (L) $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{5}$, puis $\frac{6}{35}$.

892. Exercice corrigé. — 1° Exprimer que p et q *sont racines* de

$$x^2 + px + q = 0.$$

SOLUTION ABRÉGÉE : $\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0 \\ q^2 + pq + q = 0. \end{cases}$

a) $q = 0 \qquad p = 0.$

b) $p + q = -1; \quad 2p^2 + q = 0;$

$$d'où\ 2p^2 - p - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p = 1; & q = -2, \\ p = -\frac{1}{2}; & q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2° Exprimer que p et q *sont les racines* de

$$x^2 + px + q = 0.$$

$$\begin{cases} p + q = -p. \\ pq = q. \end{cases}$$

a) $q = 0 \qquad p = 0.$

b) $p = 1 \qquad q = -2.$

On ne retrouve pas la solution $p = -\frac{1}{2}$ *et* $q = -\frac{1}{2}$ *où l'équation est* $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$ *dont LES racines sont* $-\frac{1}{2}$ *et* $+1$.

893. — Soit l'équation :

$$x \in R \quad \exists x? \quad x^2 - 2(m + 2)x + 4m + 5 = 0. \quad (E)$$

1° Déterminer m pour que les racines soient liées par la relation :

$$x' - x'' = 2.$$

2° Même question avec $10x' - 3x'' = 1$.

894. — Soit l'équation :

$$x \in R \quad \exists x? \quad (m - 25)x^2 + 20x - m + 149 = 0. \quad (E)$$

Déterminer m pour que les racines soient liées par la relation $x'' = x'^2$.

895. — x' et x'' étant les racines de l'équation :

$$x \in R \quad \exists x? \quad x^2 - 7x - 4 = 0,$$

calculer : $x'^2 + x''^2$; $\quad \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$; $\quad \frac{x' - 1}{x''} + \frac{x'' - 1}{x'}$.

896. — Soit l'équation :

$$x \in R \quad \exists x? \quad x^2 + px + q = 0 \quad (E).$$

On suppose $p^2 - 4q \geqslant 0$, elle admet des racines x' et x''.
Former l'équation dont les racines sont :

$$X' = \frac{x'^2 + x''}{x''}, \qquad X'' = \frac{x''^2 + x'}{x'}.$$

897. — Déterminer m pour que l'équation :

$$\exists x? \quad (m^2 - 1)x^2 + (m + 1)x + m^2 + m - 4 = 0$$

admette la racine $x = 1$. Calculer l'autre.

898. Même exercice avec :

$$\exists x? \quad (m + 1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 2.$$

899. — Même exercice avec :

$$\exists x? \quad (m^2 - 1)x^2 - 2mx + m^2 + m + 4 \qquad \text{et} \qquad x = 2.$$

900. — Même exercice avec :

$$\exists x? \quad (2m + 1)x^2 + (m^2 - m - 3)x + m^2 + 3m + 20 = 0 \ \text{et} \ x = -2.$$

901. Exercice corrigé. — *On donne l'équation:*

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m+1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0.$$

1° *Étudier l'existence des racines.*

2° *Démontrer que les racines, quand elles existent, sont liées par une relation indépendante du paramètre* m.

SOLUTION ABRÉGÉE. 1° $\Delta' = m^2 - (m+1)(m-5) = 4m + 5.$

$$\textit{Existence} \iff m \geqslant -\frac{5}{4}.$$

2° $m \geqslant -\frac{5}{4}$ et $m \neq -1.$

$$\mathrm{S} = x' + x'' = \frac{2m}{m+1}, \qquad \mathrm{P} = x'x'' = \frac{m-5}{m+1}.$$

Donc, pour : $\quad m \geqslant -\frac{5}{4}, \quad m \neq -1,$

$$m(2 - \mathrm{S}) = \mathrm{S} : \quad \text{et} \quad m(1 - \mathrm{P}) = \mathrm{P} + 5.$$

D'où pour $\mathrm{S} \neq 2$ et $\mathrm{P} \neq 1$

$$m = \frac{\mathrm{S}}{2 - \mathrm{S}} = \frac{\mathrm{P} + 5}{1 - \mathrm{P}}.$$

Par suite :

$$\mathrm{S}(1 - \mathrm{P}) = (2 - \mathrm{S})(\mathrm{P} + 5),$$

ou :

$$3\mathrm{S} - \mathrm{P} = 5.$$

Étudier l'existence des racines pour les équations suivantes, et trouver. entre les racines, une relation indépendante du paramètre.

902. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m+2)x^2 - 2(m-3)x + m + 5 = 0.$

903. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m-3)x^2 - 2(m+2)x + m - 5 = 0.$

904. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m-3)x^2 - 2mx + m + 2 = 0.$

905. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m-4)x^2 - 2mx + m + 3 = 0.$

906. $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - 2mx + m^2 - m + 8 = 0.$ **Exercices.**

V. APPLICATION A LA RÉSOLUTION D'AUTRES ÉQUATIONS

145. Équations irrationnelles. — Les remarques faites à propos des équations irrationnelles dont la résolution conduit à résoudre une équation du premier degré (n° **118**) restent valables.

Soit par exemple l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x + \sqrt{x - 1} = 13. \tag{1}$$

Le domaine de validité $\mathcal{D}$ est caractérisé par $x \geqslant 1$. On peut écrire :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad \sqrt{x - 1} = 13 - x. \tag{1}$$

$\sqrt{x-1}$ étant un nombre positif ou nul, $13 - x$ doit l'être également. Nous ne pouvons admettre un nombre pour racine que s'il est inférieur ou égal à 13. En vertu de l'implication :

$$a = b \implies a^2 = b^2,$$

toute solution de (1) vérifie également :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x \quad (x - 1) = (13 - x)^2. \tag{2}$$

Remarquons que pour une solution de (2), si elle existe, $x - 1$ est nécessairement positif ou nul. La condition $x \geqslant 1$ est remplie. Il reste :

$$13 - x \geqslant 0 \quad \exists x? \quad x^2 - 27x + 170 = 0. \tag{3}$$

Sur R, l'équation a deux racines 10 et 17.

Le problème admet donc une seule solution, $x = 10$.

REMARQUE. — L'équation : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x - \sqrt{x-1} = 13 \qquad (1\ bis)$

peut être appelée la conjuguée de l'équation (1). On peut l'écrire :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad -\sqrt{x-1} = 13 - x \qquad (1\ bis)$$

En raisonnant comme ci-dessus, on obtient :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad (x-1) = (13-x)^2 \quad \text{et} \quad 13 - x \leqslant 0 \qquad (2\ bis)$$

Il en résulte que l'équation : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x^2 - 27x + 170 = 0 \qquad$ (E)

admet la racine 10, solution de (1), et la racine 17, solution de (1 *bis*).

En élevant au carré les deux membres de (1) [ou de (1 *bis*)], on forme une équation qui admet toutes les solutions de (1) [ou de (1 *bis*)] si elles existent, et peut-être d'autres. (1) et (E) n'ont pas les mêmes solutions : (E) est plus large que (1), on peut écrire que (1) *est contenue dans* (E).

146. Autre exemple. — Résoudre l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \sqrt{x} + \sqrt{2x - 14} = 11. \tag{1}$$

Le domaine de validité $\mathcal{D}$ est caractérisé par $x \geqslant 0$ et $x \geqslant 7$, donc $x \geqslant 7$.

Sur $\mathcal{D}$, les deux membres de (1) étant définis et positifs, nous obtenons en élevant les deux membres au carré :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad x + 2x - 14 + 2\sqrt{x}\sqrt{2x-14} = 121 \tag{2}$$

ou $\quad x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad 2\sqrt{x(2x-14)} = 3(45 - x). \qquad (2)$

Une nouvelle élévation au carré donne :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad 4x(2x - 14) = 9(45 - x)^2 \quad \text{et} \quad 45 - x \geqslant 0 \tag{3}$$

ou : $\quad x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad x^2 - 754x + 135^2 = 0 \quad \text{et} \quad 45 - x \geqslant 0, \qquad (3)$

ce qui impose, un second domaine $\mathcal{D}'$ caractérisé par $7 \leqslant x \leqslant 45$

Sur R l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x^2 - 754x + 135^2 = 0 \quad$ (E), admet des racines

$x' = 377 - \sqrt{377^2 - 135^2}$	$x'' = 377 + \sqrt{377^2 - 135^2}$
$x' = 377 - \sqrt{512 \times 242}$	$x'' = 377 + \sqrt{512 \times 242}$
$x' = 377 - 352$	$x'' = 377 + 352$
$x' = 25$	$x'' = 729$
$25 \in \mathcal{D}'$	$729 \notin \mathcal{D}'$

L'équation (1) admet la solution 25.

Remarque. — L'équation (E) contient (1) et une autre équation (1 *bis*) correspondant à la solution 729. Cherchons (1 *bis*).

Nous avions : $x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad 2\sqrt{x(2x-14)} = 3(45-x)$ (2)

L'équation : $x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad 2\sqrt{x(2x-14)} = 3(x-45)$ (2 *bis*)

fournirait, par élévation au carré, la même équation (E).

Reste à trouver de quelle équation analogue à (1) provient (2 *bis*).

On peut hésiter entre :

$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad \sqrt{x} - \sqrt{2x-14} = 11$ (1 *a*)

et : $x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \quad \sqrt{2x-14} - \sqrt{x} = 11$ (1 *b*).

Pour trancher, on remarquera que, la différence étant positive, il faut examiner si l'on a :

$x > 2x - 14$ ou : $2x - 14 > x$,

c'est-à-dire : $14 > x$ ou : $x > 14$

La réponse ne peut pas être trouvée à l'aide de $\mathfrak{D}$ seul. Il faut connaître la valeur 729. C'est le cas (1 *b*) qui correspond au (1 *bis*) cherché.

Exercices. *Résoudre les équations :*

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

907. $x + 2\sqrt{x} = 8$; $\quad x + \sqrt{x-1} = 21$.

908. $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{3x}$; $\quad \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2$.

909. $x + 2 = \sqrt{2x^2+x-6}$; $\quad \sqrt{a^2-x} + \sqrt{a^2+x} = 2a$.

910. $\dfrac{2x-3}{x+2} = \dfrac{x-1}{x-4}$; $\quad \dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

911. $\dfrac{x+1}{2x+3} = \dfrac{2x-1}{3x+1}$; $\quad \dfrac{1+2x}{2+x} + \dfrac{2+x}{1+x} = \dfrac{10}{3}$.

912. $\dfrac{x+1}{x} + \dfrac{x+1}{x-8} = 1$; $\quad \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{5}{2}$.

913. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{6}{x+6} = 0$.

914. $\dfrac{1}{3x^2-27} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x-3} = 1$.

Résoudre les systèmes $x \in \mathrm{R}\ y \in \mathrm{R} \quad \exists x? \ \exists y?$

915. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ On calculera d'abord le produit xy.

916. $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy + 2x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$

917. $\begin{cases} x + y = 15 \\ x^2 + y^2 = 153; \end{cases}$

918. $\begin{cases} x - y = 8 \\ x^2y^2 = 400. \end{cases}$ prendre pour inconnues x et $-y$.

919. $\begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ on discutera suivant les valeurs de a. **Exercices.**

PROBLÈMES

Discuter, suivant les valeurs de a, l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

$x \in R \quad \exists x?$

920. $5x^2 - 12x + a - 2 = 0.$

921. $5x^2 + 12x - a + 2 = 0.$

922. $ax^2 + (2a + 1)x + a - 3 = 0.$

923. $(a - 1)x^2 + 2x + (a - 1) = 0.$

924. $ax^2 - 6(a - 1)x + 9(a - 3) = 0.$

925. $(a - 5)x^2 - 2(a + 3)x + a - 2 = 0.$

926. $(a - 1)x^2 + 2(a - 1)x + a - 2 = 0.$

927. — x' et x'' étant les racines de l'équation :

$x \in R \quad \exists x? \qquad ax^2 + bx + c = 0,$

former l'équation qui a pour racines :

1° Kx' et Kx''; 2° $x' + k$ et $x'' + k$; 3° $\frac{x'}{x''}$ et $\frac{x''}{x'}$.

Que peut-on dire des discriminants de l'équation donnée et des trois équations obtenues?

928. — Dans l'équation :

$x \in R \quad \exists x? \qquad ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$

on pose : $x = y + h.$

Former l'équation en y obtenue en remplaçant x par cette valeur, puis choisir h pour que le coefficient de y soit nul. Résoudre alors l'équation en y et en déduire les racines de l'équation (1).

929. — L'équation : $\exists x? \quad ax^2 + bx + c = 0$ admettant pour racines x' et x'', former l'équation qui a pour racines :

1° $x' + 3x''$ et $3x' + x''$;
2° $x' + mx''$ et $mx' + x''$;
3° x'^2 et x''^2.

930. — Déterminer a pour que l'équation

$x \in R \quad \exists x? \qquad x^2 - 3ax + a + 1 = 0$

ait une racine double de l'autre. Résoudre alors l'équation.

931. — Déterminer a pour que l'équation :

$x \in R \quad \exists x? \qquad x^2 - 4x + a = 0.$

1° ait deux racines égales; 2° ait une racine triple de l'autre; 3° ait deux racines x' et x'' telles que

$2x' + x'' = 9.$

Dans chaque cas, résoudre l'équation.

932. — Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont égaux respectivement aux racines de l'équation :

$x \in R \quad \exists x? \qquad x^2 - 7ax + 9a^2 = 0$

a étant une longueur donnée.

1° Vérifier, sans les calculer, que cette équation a des racines.

2° Trouver la surface de ce triangle, son hypoténuse, la médiane relative à l'hypoténuse, et la hauteur.

Résoudre les systèmes suivants :

$x \in R \quad y \in R \quad \exists x? \quad \exists y?$

933. $\begin{cases} x + y = 19 \\ xy = 34. \end{cases}$

934. $\begin{cases} x - y = 31 \\ xy = 140. \end{cases}$

935. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 113. \end{cases}$

936. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 - y^2 + 8 = 0. \end{cases}$

937. $\begin{cases} x + y = 2xy \\ x - y = 5xy. \end{cases}$

938. $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2y^2 - x^2 = 1. \end{cases}$

939. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ x + y = 5. \end{cases}$

Résoudre les équations : $x \in R \quad \exists x?$

940. $x + 3 = \sqrt{2x^2 - x - 1}.$

941. $x - 3 = \sqrt{2x^2 + x + 1}.$

942. $x + \sqrt{x + 2} = 1.$

942. $4x - \sqrt{x - 3} = 26.$

944. $\sqrt{x} + \sqrt{2x + 1} = 5.$

945. $\sqrt{x} = \sqrt{2x + 1} - 1.$

946. $2x + \sqrt{x - 3} = 5.$

947. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{3x - 2} = 6.$

948. — Démontrer que les équations :

$x \in R \quad \exists x?$

$x^2 - (a^2 + b^2 - c^2)x + a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = 0$

$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$

ont chacune deux racines, en général distinctes.

949. — Les équations suivantes ont une racine que l'on peut trouver sans calcul. Trouver cette racine, et en déduire l'autre :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x \begin{cases} x(x-b) = a(a-b) \\ ax^2 - bx = a - b \\ (a-b)x^2 + (b-c)x + c - a = 0 \\ \dfrac{2x}{a} - \dfrac{a}{x} = \dfrac{2b}{a} - \dfrac{a}{b}. \end{cases}$$

950. 1° Former l'équation du second degré qui admet pour racines :

$\alpha = m - 13 + \sqrt{m-1}$ et $\beta = m - 13 - \sqrt{m-1}$.

2° En déduire la résolution de l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x + \sqrt{x-1} = 13.$

951. — Résoudre et discuter les équations :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad 3m - 2x = \sqrt{x^2 - m^2}$

$2(m - x) = \sqrt{3x - 2m}$

952. — Résoudre et discuter

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$

953. — Soit x_1 et x_2 les racines de l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - 6x + 1 = 0$

démontrer que, quel que soit l'entier n, $x_1^n + x_2^n$ est un nombre entier non divisible par 5.

954. — On suppose que l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 + px + 1 = 0$

admet les deux racines x_1 et x_2 et que l'équation :

$y \in \mathrm{R} \quad \exists y? \qquad y^2 + qy + 1 = 0$

admet les deux racines y_1 et y_2. Démontrer que $(x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 + y_2)(x_2 + y_2) = q^2 - p^2$.

955. — On considère l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad x^2 - (5\alpha - 1)x + 3\beta = 0 \quad (\mathrm{E})$

1° Conditions pour que α et β soient *les* racines de (E).

2° Conditions pour que chacun des nombres α et β vérifie (E).

956. — Résoudre l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^6 - 35x^3 + 216 = 0.$

957. — Existence et signe des racines de l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - max + a^2 = 0.$

On marque sur un axe les points A(a), A'($-a$), M'(x'), M''(x''). Montrer que la division AA'MM' est harmonique.

958. — Existence et signe des racines de l'équation

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad 5x^2 - 3mx + m - 1 = 0.$

Trouver entre x' et x'' une relation indépendante de m.

*

Déterminer le paramètre m *pour que les équations suivantes admettent deux racines liées par une relation donnée :*

959. $\exists\,?\ 4x^2 - 15x + 4m^3 = 0$ et $x' = x''^2$.

960. $\exists x?\ x^2 + 2(2m - 1)x - 3m^2 + 5 = 0$ et $x' = 2x''$.

961. $\exists x? \qquad x^2 - 12x + m = 0$ et $x'^2 - x''^2 = 36$.

962. $\exists x? \qquad x^2 - mx + 2m - 1 = 0$, et $\dfrac{x'}{x''} = \dfrac{8}{5}$.

963. Exercice corrigé. — Résoudre l'équation :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad (x^2 - 5x)^2 = x^2 - 5x + 42. \quad (1)$

Solution. *L'inconnue x figure par l'intermédiaire du groupement $x^2 - 5x$, expression algébrique que nous désignerons par la lettre y. Donc, s'il existe une solution à cette équation, il en existe une à l'équation :*

$y \in \mathrm{R} \quad \exists y? \qquad y^2 = y + 42 \quad (2)$

L'équation (2) *admet les solutions* -6 *et* $+7$.

Reste à examiner si le groupement $x^2 - 5x$ peut prendre, pour certaines valeurs de x, la valeur -6 ou la valeur 7. On obtient donc les deux équations :

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - 5x + 6 = 0. \quad (3)$

$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - 5x - 7 = 0. \quad (4)$

La première donne les solutions 2 *et* 3, *la seconde les solutions* $\dfrac{5 - \sqrt{53}}{2}$ *et* $\dfrac{5 + \sqrt{53}}{2}$.

Ces quatre nombres sont donc les solutions de l'équation (1).

On dit que l'on a pris y *comme inconnue auxiliaire.*

*

Résoudre, en utilisant une inconnue auxiliaire, les équations : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x?$

964. $(x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + x + 2)^2 - 9.$

965. $4\sqrt{x^2 - 5x + 6} = x^2 - 5x + 6.$

966. $\sqrt{x^2 - 3x + 4} - \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 1$ prendre $y^2 = x^2 - 3x + 4$.

967. $(x^2 - x + 3)^2 - 5a^2(x^2 - x + 3) + 4a^4 = 0.$

CHAPITRE XI

POLYNOME DU SECOND DEGRÉ

I. THÉORÈMES RELATIFS AUX DIVERSES FORMES DU POLYNOME DU SECOND DEGRÉ

147. Retour au polynome du second degré. — Dans le paragraphe **n° 129**, nous avons démontré certaines identités relatives au polynome du second degré :

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c; \qquad a \neq 0. \tag{A}$$

Le tableau de la page 205 résume cette étude.

Dans le paragraphe **n° 131** nous avons appliqué ces identités à la résolution de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad f(x) = 0, \tag{$\mathcal{A}$}$$

équation associée au polynome du second degré.

Nous allons reprendre maintenant quelques questions laissées en suspens.

Nous écrivions, par exemple, à propos du polynome $x^2 + 6x + 19$

$$x^2 + 6x + 19 \equiv x^2 + 6x + 9 + 10 \equiv (x+3)^2 + 10.$$

Toute décomposition est impossible *à partir de cette forme*, et l'on pressent l'impossibilité d'une décomposition quelle qu'elle soit.

C'est la question de l'impossibilité ou de l'unicité de la décomposition, quand elle existe, qu'il convient d'aborder maintenant.

148. Théorèmes relatifs aux transformations. — Nous savons que, pour $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$:

$$\forall x \qquad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}, \tag{B}$$

1er CAS. $4ac - b^2 > 0$ soit $\Delta < 0$. On pose $4ac - b^2 = 4\mathrm{K}^2$ et

$$\forall x \qquad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \mathrm{K}^2. \tag{C$_1$}$$

L'équation associée n'a pas de racines. Donc, inversement, nous en conclurons que le polynome $af(x)$ est indécomposable, quelle que soit la méthode suivie. En effet, si nous avions une décomposition en un produit de facteurs du premier degré :

$$\forall x \quad af(x) \equiv (\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta') \qquad \alpha\alpha' \neq 0,$$

il en résulterait l'existence de deux racines, $-\frac{\beta}{\alpha}$ et $-\frac{\beta'}{\alpha'}$ ce qui serait contradictoire avec le fait que $af(x)$, d'après (C_1), est au moins égal à K^2. Dans ce cas nous dirons, par extension, que le polynome $f(x)$ n'a pas de racines et que son discriminant est négatif.

- CONCLUSION. — **Si le discriminant d'un polynome $ax^2 + bx + c$ est négatif, le polynome $af(x)$ peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés, et il est indécomposable.**

EXEMPLE.

Pour $f(x) \equiv 2x^2 + x + 1$, on a $\Delta = 1 - 8 = -7$ et : $2.f(x) \equiv \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$.

REMARQUE. — Soit $\quad f(x) \equiv (x+1)^2 + (x-3)^2$.

D'après le raisonnement précédent, il est inutile de calculer :

$$f(x) \equiv 2x^2 - 4x + 10,$$
$$2f(x) \equiv 4x^2 - 8x + 20, \quad \text{etc...}$$

pour savoir que le polynome $f(x)$ n'a pas de racines et ne se décompose pas.

2e CAS. $\quad \Delta = b^2 - 4ac > 0$. Nous avons démontré l'identité :

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(ax + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}\right). \qquad (D_2)$$

L'équation associée admet pour racines, les solutions des équations :

$$\exists x ? \quad ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} = 0; \qquad \exists x ? \quad ax + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2} = 0.$$

solution x' $\qquad$ solution x''

D'après la théorie du polynome du premier degré, on peut donc écrire :

$$\forall x \quad ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} \equiv a(x - x'); \qquad \forall x \quad ax + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2} \equiv a(x - x'');$$

et :

$$\forall x \quad af(x) \equiv a(x - x')\,a(x - x'')$$
$$\forall x \quad af(x) \equiv a^2(x - x')(x - x''). \qquad (E_2)$$

Le polynome $af(x)$ est donc décomposable sous la forme (E_2). Inversement, cette décomposition est unique, car si l'on avait :

$$\forall x \quad af(x) \equiv \alpha^2(x - r')(x - r''),$$

l'équation associée admettrait les racines $x = r'$ et $x = r''$; or, pour $x = r'$, par exemple : $\qquad af(r') = a(r' - x')(r' - x''),$

produit qui ne peut pas être nul avec $r' \neq x'$ et $r' \neq x''$.

Il faut donc que $r' = x'$ (ou $r' = x''$), et l'on raisonne de même avec r''.

▪ CONCLUSION. — **Si le discriminant d'un polynome du second degré est positif, le polynome $af(x)$ peut se décomposer de façon unique en un produit de la forme**

$$af(x) = a^2(x - x')(x - x'').$$

Dans ce 2e cas nous disons par extension que x' et x'' sont les racines du polynome.

Exemples. 1. Le polynome $f(x) = x^2 - 7x + 12$
a pour racines $x' = 3$ et $x'' = 4$
Il peut s'écrire : $f(x) = (x - 3)(x - 4)$.
2. Le polynome : $f(x) = 12x^2 - 7x + 1$

a pour racines $x' = \frac{1}{4}$ et $x'' = \frac{1}{3}$. Il peut s'écrire :

$$f(x) = 12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (3x - 1)(4x - 1).$$

Remarque. — Soit $f(x) \equiv (3x + 1)(2x - 5)$.
D'après le raisonnement précédent, il est inutile de passer par la forme $ax^2 + bx + c$ pour obtenir la décomposition unique :

$$f(x) \equiv 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

3e Cas. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Nous avons démontré l'identité

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2. \qquad (C_3)$$

Le polynome $af(x)$ est le carré d'un polynome du premier degré.
L'équation associée admet deux racines égales, chacune d'elles vérifie

l'équation : $\exists x? \quad ax + \frac{b}{2} = 0.$

Soit x' la racine de cette équation. D'après la théorie de l'équation du premier degré, on a l'identité :

$$\forall x \quad ax + \frac{b}{2} = a(x - x'),$$

de sorte que l'on obtient : $af(x) \equiv a^2(x - x')^2$. $\qquad (E_3)$

On démontre comme précédemment l'unicité de cette décomposition.

▪ CONCLUSION. — **Si le discriminant du polynome $ax^2 + bx + c$ est nul, le polynome $af(x)$ peut se mettre, d'une façon unique, sous la forme : $af(x) \equiv a^2(x - x')^2$.**

Exemple. Le polynome : $f(x) \equiv 3x^2 + 24x + 48$,
a pour discriminant réduit : $12^2 - 3 \times 48 = 144 - 144 = 0$,
et l'on a : $3f(x) \equiv 9x^2 + 72x + 144 \equiv (3x + 12)^2$.

149. Applications. — On peut utiliser la décomposition du polynome : $ax^2 + bx + c$, pour simplifier les fractions rationnelles.

Soit, par exemple, la fraction : $F(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$;

les racines du dénominateur sont 2 et 3. Le domaine de définition de $F(x)$ est donc $R - \{2; 3\}$. Sur ce domaine on peut écrire :

$$x \in R - \{2; 3\}, \quad \forall x, \quad F(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2}.$$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS. — L'équation :

$$x \in R \quad \exists x? \qquad \frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+4}{x^2-6x+8}, \qquad (1)$$

peut s'écrire :

$$x \in R \quad \exists x? \qquad \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+4}{(x-2)(x-4)}. \qquad (1)$$

Son domaine de validité est $\mathcal{D} = R - \{2; 3; 4\}$.

Sur ce domaine, (1) est équivalente à :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad (x+3)(x-4) = (x+4)(x-3) \qquad (2)$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad x^2 - x - 12 = x^2 + x - 12 \qquad (2)$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad 2x = 0. \qquad (2)$$

Réponse : OUI; $x = 0$ car $0 \in \mathcal{D}$.

REMARQUE. — En choisissant comme dénominateur commun le produit des dénominateurs, on fait des calculs inutiles, comme le prouve la solution suivante de (1), *à ne pas imiter.*

Sur $\mathcal{D}$ on supprime les dénominateurs en écrivant :

$$x \in R - \{2;3;4\} \quad \exists x? \quad (x+3)(x^2-6x+8) = (x+4)(x^2-5x+6) \qquad (2\ bis)$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = x^3 - x^2 - 14x + 24 \qquad (2\ bis)$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad 2x^2 - 4x = 0 \qquad (2\ bis)$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad 2x(x-2) = 0. \qquad (2\ bis)$$

Réponse : OUI, $x = 0$.

AUTRE EXEMPLE. Résoudre l'équation :

$$x \in R \quad \exists x? \qquad \frac{x^2-4}{x-3} = \frac{x^2-4x+4}{2x-5} \qquad \mathcal{D} = R - \left\{\frac{5}{2}; 3\right\}$$ qui s'écrit :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad \frac{(x-2)(x+2)}{x-3} = \frac{(x-2)(x-2)}{2x-5} \qquad (1)$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad (x-2)\left[\frac{x+2}{x-3} - \frac{(x-2)}{2x-5}\right] = 0 \qquad (1)$$

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad (x-2)[(x+2)(2x-5) - (x-2)(x-3)], \qquad (2)$$

d'où facilement : $x = 2$, $\quad x = -2 - 2\sqrt{5}$ et $x = -2 + 2\sqrt{5}$.

Si l'on avait effectué maladroitement, on aurait obtenu

$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad (x^2 - 4)(2x - 5) - (x - 3)(x^2 - 4x + 4) \qquad$ (2 *bis*)

$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad x^3 + 2x^2 - 24x + 32 = 0, \qquad$ (2 *bis*)

équation du troisième degré, que nous n'avons pas appris à résoudre.

150. Étude d'expressions algébriques du second degré à plusieurs variables. — Pour étudier une telle expression, on fait choix d'une variable ordonnatrice et on considère l'expression comme un polynome du second degré par rapport à cette variable.

EXEMPLE 1. *L'expression*

$$A = 6x^2 - y^2 - 2z^2 + xy + 3yz + zx$$

est-elle décomposable?

Ordonnons par rapport à y, nous obtenons :

$$A = -y^2 + y(x + 3z) + 6x^2 - 2z^2 + zx.$$

Le discriminant est :

$$\Delta \equiv (x + 3z)^2 + 24x^2 - 8z^2 + 4zx = 25x^2 + 10zx + z^2 = (5x + z)^2.$$

Les racines sont :

$$y' = \frac{1}{2}(x + 3z + 5x + z) = 3x + 2z,$$

$$y'' = \frac{1}{2}(x + 3z - 5x - z) = -2x + z.$$

D'où la décomposition :

$$A \equiv -(y - y')(y - y'') \equiv (y' - y)(y - y''),$$

$$A \equiv (3x - y + 2z)(2x + y - z).$$

EXEMPLE 2. *Simplifier sur son domaine de définition la fraction rationnelle :*

$$F = \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - 5ab + 6b^2}$$

Décomposition du numérateur : $(a - b)(a - 2b)$.
Décomposition du dénominateur : $(a - 2b)(a - 3b)$.

Pour $a \neq 2b$ et $a \neq 3b$, F existe et :

$$F = \frac{(a - b)(a - 2b)}{(a - 2b)(a - 3b)} = \frac{a - b}{a - 3b}$$

Remarquons que pour $a = 2b$; F n'existe pas, tandis que la fraction simplifiée existe et prend la valeur -1.

Exercices. *Décomposer en produits de facteurs :*

968. $x^2 - 9x + 18.$

969. $-x^2 + 5x + 6.$

970. $x^2 - 7x - 18.$

971. $18x^2 + 7x - 1.$

972. $-3x^2 + 2x + 1.$

973. $-5x^2 + 6x - 1.$

974. $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1.$

975. $x^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)x - 1.$

Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

976. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 5x - 6}.$

977. $\dfrac{x^2 - a^2}{2x^2 + ax - 3a^2}.$

978. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - x - 1}.$

979. $\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 10x + 24}.$

980. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + (3 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2}}.$

981. $\dfrac{x - 1 - \sqrt{2}}{x^2 - 2x - 1}.$

982. $\dfrac{x^2 - (a + b)x + ab}{x^2 - (a + c)x + ac}.$

983. $\dfrac{x^2 - (a - 2b)x - 2ab}{x^2 - (a - 2c)x - 2ac}.$

984. $\dfrac{5x^2 + 7x + 2}{15x^2 + x - 2}.$

985. $\dfrac{8x^2 - 5x - 3}{8x^2 + 11x + 3}.$

986. $\dfrac{acx^2 + (bc + ad)x + bd}{acx^2 + (bc - ad)x - bd}.$

987. $\dfrac{mnx^2 + (n - 2m)x - 2}{mnx^2 + 2(n - m)x - 4}.$

988. $\dfrac{(a + b + c)x^2 - (a + b)x - c}{(p + q + r)x^2 - (p + q)x - r}.$

989. $\dfrac{x^3 - 8a^3}{x^2 - (2a + 1)x + 2a}.$

990. $\dfrac{x^3 + 27b^3}{x^2 + (a + 3b)x + 3ab}.$

Décomposer en une somme de carrés :

991. $x^2 + x + 1.$

992. $x^2 + 7x + 13.$

993. $a^2 + ab + b^2.$

994. $a^2 - ab + b^2.$

995. $a^2 + 3b^2 + c^2 - 2ab + bc.$

996. $x^2 + xy + y^2 - x - y + 1.$

Résoudre les équations $x \in \mathbf{R} \quad \exists x?$

997. $\dfrac{x - 3}{x^2 + 5x + 4} = \dfrac{x - 7}{x^2 + 6x + 5}.$

998. $\dfrac{x + \sqrt{2}}{x^2 + 2x - 1} = \dfrac{x - \sqrt{2}}{x^2 + x + \sqrt{2} - 2}.$

999. $\dfrac{1}{x^2 - 9} + \dfrac{2}{x - 3} + \dfrac{3}{x + 3} = 1.$

1000. $\dfrac{x - \sqrt{2}}{x^2 + x(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{6}} = \dfrac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 2x\sqrt{2} + 2}$

1001. $\dfrac{x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{x + 5}{x^2 - 7x + 6}.$

1002. — Résoudre l'équation :

$x \in \mathbf{R} \quad \exists x? \qquad \dfrac{3}{6x^2 - 11x + 3} + \dfrac{2}{15x^2 - 2x - 1} = \dfrac{7}{5x + 1}.$

Décomposer les dénominateurs et choisir le dénominateur commun le plus simple.
De quel degré serait l'équation si l'on prenait comme dénominateur commun le produit des dénominateurs?

Exercices.

II. SIGNE DU POLYNOME DU SECOND DEGRÉ

151. Un nouvel emploi de formes particulières. — Les formes particulières du polynome du second degré permettent de reconnaître le *signe* que prend ce polynome pour une valeur donnée, quelconque, de x, sans effectuer le calcul de la valeur prise par le polynome.

1er Cas : Le polynome n'a pas de racines. — On utilise l'identité (C_1) que nous rappelons. Si $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ et si $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif, alors, en posant $4ac - b^2 = 4K^2$, on obtient :

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2. \qquad (C_1)$$

L'expression $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ est positive ou nulle, K^2 est positif; le polynome $af(x)$ ne prend que des valeurs positives.

Le polynome $f(x)$ garde le signe de a, quel que soit x.

Exemples.

$f(x) \equiv x^2 + x + 4$ n'a pas de racines, $\quad a = 1 \quad \forall x \quad f(x) > 0$

$f(x) \equiv -2x^2 + x - 8$ n'a pas de racines, $a = -2 \quad \forall x \quad f(x) < 0.$

2e Cas. Le polynome a deux racines distinctes. — On utilise l'identité (E_2) que nous rappelons. Si $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$, et si $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, alors le polynome $f(x)$ admet deux racines :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et l'on obtient l'identité : $\forall x \quad af(x) \equiv a^2 (x - x')(x - x'').$ $\qquad (E_2)$

Convenons d'appeler x_1 la plus petite des racines et x_2 la plus grande, rappelons que pour $a > 0$ on a $x_1 = x'$ et $x_2 = x''$ tandis que pour $a < 0$ $x_1 = x''$ et $x_2 = x'$. La même identité s'écrit :

$$\forall x \quad af(x) \equiv a^2 (x - x_1)(x - x_2); \qquad x_1 < x_2. \qquad (E_2)$$

Dressons le tableau des signes de $(x - x_1)$ et de $(x - x_2)$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Nous obtenons :

x		x_1		x_2	
$sgn(x - x_1)$	$-$	0	$+$		$+$
$sgn(x - x_2)$	$-$		$-$	0	$+$
$sgn[(x - x_1)(x - x_2)]$	$+$	0	$-$	0	$+$

En conclusion :

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \iff x_1 < x < x_2$$
$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \iff x < x_1 \quad \text{ou} \quad x_2 < x.$$

L'ensemble des nombres x, tels que $x_1 < x < x_2$ est l'*intervalle* x_1, x_2 que nous notons $]x_1, x_2[$.

Le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est positif quand x est extérieur à l'intervalle $]x_1, x_2[$, négatif quand x est intérieur à l'intervalle $]x_1, x_2[$, nul pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$.

Par suite, le polynome $af(x) \equiv a^2 (x - x_1)(x - x_2)$ prend un signe donné par la même loi.

Enfin le polynome $f(x)$ prend le signe de a pour x extérieur à l'intervalle $]x_1, x_2[$; le signe de $(-a)$ pour x intérieur à cet intervalle. Pour $x = x_1$ et $x = x_2$, le polynome est nul.

Exemples. Le polynome $f(x) \equiv -6x^2 + x + 1$ a pour racines $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; et on a : $a = -6$.

Sans effectuer les calculs on peut affirmer que :

$$f\left(-\frac{14}{39}\right) < 0; \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0; \quad f\left(-\frac{5}{21}\right) > 0; \quad f\left(\frac{355}{706}\right) < 0.$$

3e Cas. Le polynome admet une racine double. — On utilise l'identité (E_3) que nous rappelons. Si $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ et si $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul, alors le polynome $f(x)$ admet deux racines égales, $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$, et l'on obtient l'identité :

$$\forall x \quad af(x) \equiv a^2 (x - x')^2,$$

le polynome $af(x)$ est donc toujours positif ou nul.

Nul pour $x = x'$, le polynome $f(x)$ garde, pour toute autre valeur de x le signe de a.

Exemple. $f(x) \equiv -3x^2 - 6x - 3 \quad a = -3 \quad \Delta = 0 \quad f(-1) = 0$

$$f(x) = -3(x + 1)^2.$$
$$x \in \mathrm{R} - \{-1\} \ \forall x \quad f(x) < 0.$$

RÉCAPITULATION

Soit le polynome :

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0.$$

1° Si $b^2 - 4ac < 0$, $af(x_0)$ est positif quel que soit x_0.

2° Si $b^2 - 4ac = 0$, $af(x_0)$ est positif pour toute valeur de x_0 autre que $x_0 = -\frac{b}{2a}$, auquel cas $f(x_0) = 0$.

3° Si $b^2 - 4ac > 0$, $f(x)$ a deux racines distinctes x_1 et x_2, $x_1 < x_2$.

Alors : $af(x_0)$ est négatif si x_0 est compris entre les racines

$$x_1 < x_0 < x_2 \implies af(x_0) < 0.$$

$af(x_0)$ est positif si x_0 n'est pas compris entre les racines

$$x_0 < x_1 \implies af(x_0) > 0; \quad x_0 > x_2 \implies af(x_0) > 0.$$

Soulignons le fait que $af(x_0)$ est négatif dans le seul cas où $b^2 - 4ac > 0$, et $x_1 < x_0 < x_2$. Détachons l'implication mutuelle suivante, très utile en pratique:

$$\exists x_0 \quad af(x_0) < 0 \iff \exists x_1,\ \exists x_2,\ x_1 < x_2 \quad f(x_1) = 0 \quad f(x_2) = 0 \quad \text{et} \quad x_1 < x_0 < x_2.$$

- **L'existence d'un nombre x_0 rendant négatif le produit $af(x_0)$ implique qu'il existe deux racines, et que ces racines comprennent ce nombre.**

EXEMPLES.

1. $f(x) = x^2 - 12x - 17;\quad a = 1\quad f(0) = -17 \implies x_1 < 0 < x_2$

on retrouve le résultat connu concernant le cas où a et c sont de signes contraires.

2. $f(x) = x^2 - 12x + 7;\quad a = 1\quad f(1) = -4 \implies x_1 < 1 < x_2.$

3. $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) - \gamma^2, \gamma \neq 0;\quad a = 1\quad f(\alpha) = f(\beta) = -\gamma^2 \implies$
$x_1 < \alpha < x_2$ et $x_1 < \beta < x_2.$

EXERCICE D'APPLICATION.

Démontrer que l'équation : $x \in \mathrm{R}\ \exists x? \quad x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0$, *admet deux racines x' et x'' qui comprennent le nombre π. En déduire la place du nombre $\frac{9\sqrt{3}}{50}$ par rapport à ces racines.*

L'équation est associée au polynome $f(x) = x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1$. Formons $f(\pi)$:

$$f(\pi) = \pi^2 - 2\pi\sqrt{3} + 1.$$

Ce n'est pas la valeur exacte de $f(\pi)$ qui nous intéresse, mais son signe, qui est le même que celui de $\frac{f(\pi)}{\pi}$, plus simple à calculer :

$$\frac{f(\pi)}{\pi} = \pi + \frac{1}{\pi} - 2\sqrt{3}$$

$\pi \simeq 3{,}1416$ par excès, $\frac{1}{\pi} \simeq 0{,}3184$ par excès, $2\sqrt{3} \simeq 3{,}4640$ par défaut d'où :

$$\frac{f(\pi)}{\pi} < 3{,}1416 + 0{,}3184 - 3{,}4640 = 3{,}4600 - 3{,}4640 < 0.$$

$f(\pi)$ étant négatif, π est compris entre les racines dont l'existence est en outre assurée.

Formons $f\left(\frac{9\sqrt{3}}{50}\right) = \frac{81 \times 3}{50^2} - \frac{2 \times 9 \times 3}{50} + 1;$

ce nombre a le signe de : $243 - 54 \times 50 + 50^2 = 2\,743 - 2700 > 0.$

Le nombre $\frac{9\sqrt{3}}{50}$ est situé à l'extérieur de l'intervalle des racines. Est-il inférieur à la plus petite ou supérieur à la plus grande?

Pour le savoir il suffit de comparer ce nombre à π. Or ce nombre est inférieur à $\frac{18}{50}$ et : $\frac{18}{50} < 1 < \pi.$

$\frac{9\sqrt{3}}{50}$ est plus petit que la plus petite racine : $\frac{9\sqrt{3}}{50} < x_1 < \pi < x_2.$

152. Une utilisation de la demi-somme. — Dans l'exercice précédent nous avons utilisé le nombre π dont nous savions qu'il était compris entre les deux racines de l'équation.

Si les calculs et raisonnements, entrepris pour résoudre un problème de cette nature, n'ont pas fait apparaître un nombre compris entre les racines, il est facile d'en former un : leur demi-somme.

En effet $\exists x_1 \quad \exists x_2 \quad x_1 < x_2 \implies x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2.$

Dans le cas précédent nous aurions comparé $\frac{x_1 + x_2}{2} = \sqrt{3}$ au nombre $\frac{9\sqrt{3}}{50}$, et obtenu la même conclusion : $\frac{9\sqrt{3}}{50} < x_1$.

Exemple. $f(x) \equiv x^2 - 5x + 3{,}17;\qquad \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{2},\qquad \Delta = 12.32 > 0;$

$f(4{,}6) > 0,\quad$ donc, puisque : $\frac{5}{2} < 4{,}6 \qquad x_2 < 4{,}6.$

Exercices. 1003. — Montrer que les polynomes :

$x^2 + x + 5;\qquad x^2 + 3x + 12;$
$x^2 + ax + a^2;\qquad x^2 - 3Rx + 3R^2.$

sont positifs quel que soit x. (a et R non nuls)

1004. — Classer, par rapport aux racines de l'équation :

$$x^2 - 7x + 5 = 0$$

les nombres : $\quad -1;\quad +1;\quad 2;\quad 5;\quad 7.$

1005. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$x^2 - mx + 2m - 3 = 0,$$

a-t-elle deux racines comprenant entre elles le nombre $+1$?

1006. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$x^2 - 2mx + m - 3 = 0,$$

a-t-elle deux racines inférieures à $+1$?

1007. — Vérifier l'identité :

$\forall x \quad x^4 + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$

En conclure que les deux facteurs gardent des signes constants. Le démontrer directement.

1008. — Déterminer le paramètre a de telle sorte que le polynome :

$$(a-1)x^2 - 2ax + a + 3$$

garde un signe constant quel que soit x.

1009. — Même question pour le polynome :

$$(a-1)x^2 - 2ax + a - 3.$$

1010. — Montrer, sans développer, que le polynome :

$$(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1)$$

a deux racines.

1011. — Démontrer que le polynome :

$$(a^2 + a'^2)x^2 + 2(ab + a'b')x + b^2 + b'^2$$

est toujours supérieur ou égal à zéro.

Le mettre ensuite sous la forme d'une somme de deux carrés. **Exercices.**

III. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

153. Inéquations entières et rationnelles à une inconnue. — D'après les théorèmes généraux concernant les inéquations, une inéquation entière et rationnelle du second degré admet R comme domaine de validité et peut toujours se ramener à la forme :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax^2 + bx + c > 0. \qquad \text{(S)}$$

Comme nous savons étudier le signe du polynome $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour toute valeur de x, nous savons donc résoudre le problème (S).

Exemples. 1. Résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 + x + 1 > 0. \qquad (1)$$

Pour $f(x) = x^2 + x + 1$ on a $b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$ et $a = 1$

donc : $\forall x \quad x^2 + x + 1 > 0.$

Remarque. — Le même calcul montre que :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad -x^2 - x - 1 > 0 \qquad (1\ bis)$$

n'admet aucune solution.

2. Résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - 7x - 1 > 0$$

Pour $f(x) = x^2 - 7x - 1$, $a = 1$, $x' = \dfrac{7 - \sqrt{53}}{2}$, $x'' = \dfrac{7 + \sqrt{53}}{2}$.

Les solutions sont données par : $x < \dfrac{7 - \sqrt{53}}{2}$ ou $\dfrac{7 + \sqrt{53}}{2} < x$.

154. Inéquations rationnelles. — Traitons quelques exemples.

I. — *Résoudre l'inéquation :* $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad \dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{2x+3}{x-2}$. (S)

Domaine de validité : $\mathcal{D} = \mathrm{R} - \{1;\ 2\}$. (S) peut s'écrire :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \frac{x+1}{x-1} - \frac{2x+3}{x-2} < 0. \qquad \text{(S)}$$

Sur $\mathcal{D}$ on peut effectuer :

$$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad \frac{(x+1)(x-2) - (x-1)(2x+3)}{(x-1)(x-2)} < 0 \qquad \text{(S)}$$

ou : $$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x-2)} < 0 \qquad \text{(S)}$$

ou encore : $$x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x-2)} > 0 \qquad \text{(S)}$$

Cherchons le signe du numérateur et celui du dénominateur. Les racines du numérateur sont : $x' = -1 - \sqrt{2}$ et $x'' = -1 + \sqrt{2}$. Le dénominateur change de signe quand x traverse la valeur 1 ou la valeur 2. Classons ces quatre nombres par grandeur croissante et dressons le tableau des signes :

x		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		1		2	
$sgn\,(x^2+2x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$
$sgn\,(x-1)(x-2)$	$+$		$+$		$+$	‖	$-$	‖	$+$
$sgn\,\dfrac{x^2+2x-1}{(x-1)(x-2)}$	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$

L'inéquation est donc vérifiée sur les trois domaines :

α) $x < -1-\sqrt{2}$; β) $-1+\sqrt{2} < x < 1$; γ) $2 < x$.

II. — *Résoudre les inéquations :* $x \in R \quad \exists x? \quad \dfrac{1}{x-1} < x < \dfrac{1}{x}$ (S).

Domaine de validité : $\mathfrak{D} = R - \{0; 1\}$.

Première inéquation :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad x - \frac{1}{x-1} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2-x-1}{x-1} > 0 \qquad (1)$$

Deuxième inéquation :

$$x \in \mathfrak{D} \quad \exists x? \qquad \frac{1}{x} - x > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1-x^2}{x} > 0. \qquad (2)$$

On dresse les deux tableaux :

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$sgn\,(x^2-x-1)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$sgn\,(x-1)$	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$sgn\left(\dfrac{x^2-x-1}{x-1}\right)$	$-$	0	$+$	‖	$-$		$+$

x		-1		0		1	
$sgn\,(1-x^2)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$-$
$sgn\,x$	$-$		$-$	‖	$+$	‖	$+$
$sgn\left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$

Les solutions du problème (S) sont données par l'intersection du domaine des solutions de (1) et du domaine des solutions de (2). Procédons graphiquement :

barré au titre de (1) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $+1$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

barré au titre de (2) -1 0 $+1$ x

Il reste $0 < x < 1$.

155. Inéquations irrationnelles. — Les inéquations irrationnelles qui conduisent à des inéquations du second degré donnent lieu aux remarques que nous avons exposées à propos des inéquations du premier degré.

Voici quelques exemples.

I. — *Résoudre l'inéquation :* $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad \sqrt{x+3} > x. \qquad (1)$

Domaine de validité $\mathcal{D}$: $x \geqslant -3$. Ce domaine contient l'ensemble $-3 \leqslant x < 0$ sur lequel (1) est vérifiée car le radical désigne une quantité positive ou nulle.

Pour $x \geqslant 0$ élevons les deux nombres positifs au carré :

$$x \geqslant 0 \quad \exists x? \qquad x+3 > x^2 \qquad (1\ bis)$$

soit :

$$x \geqslant 0 \quad \exists x? \qquad -x^2+x+3 > 0. \qquad (1\ bis)$$

Les racines du polynome sont $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Les solutions de (1 *bis*) sont donc $0 \leqslant x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

La réunion des deux ensembles de solutions est donc $-3 \leqslant x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

II. — *Résoudre l'inéquation :*

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad 2x + \sqrt{x^2-5x+4} < 1. \qquad (2)$$

La quantité sous radical doit être positive ou nulle, c'est un polynome dont les racines sont 1 et 4. Le coefficient de x^2 étant $+1$ le domaine de validité $\mathcal{D}$ est l'ensemble des valeurs extérieures à l'intervalle $]1, 4[$.

On peut écrire : $x \in \mathcal{D} \quad \exists x? \quad \sqrt{x^2-5x+4} < 1-2x \qquad (2\ bis)$

Si $1-2x \leqslant 0$ (2 *bis*) ne peut être vérifiée : enlevons donc à $\mathcal{D}$ l'ensemble caractérisé par $x \geqslant \frac{1}{2}$. Il reste un domaine $\mathcal{E}$ sur lequel les deux membres de (2 *bis*) sont définis et positifs; ce domaine $\mathcal{E}$ est caractérisé par $x < \frac{1}{2}$.

En élevant les deux membres au carré on obtient :

$$x \in \mathcal{E} \quad \exists x? \qquad x^2-5x+4 < 1-4x+4x^2 \qquad (2\ ter)$$

soit : $x \in \mathcal{E} \quad \exists x? \qquad -3x^2-x+3<0 \quad \text{ou} \quad 3x^2+x-3>0. \qquad (2\ ter)$

Les racines sont :

$$x' = \frac{-1-\sqrt{37}}{6} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-1+\sqrt{37}}{6}.$$

Reste à placer $\frac{1}{2}$ par rapport à ces racines.

Si $f(x) = 3x^2 + x - 3$, $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 3 < 0 \implies x' < \frac{1}{2} < x''$.

Il reste donc la seule condition : $x < \frac{-1-\sqrt{37}}{6}$.

Exercices. *Résoudre les inéquations* $x \in \mathbf{R}$ $\exists x$?

1012. $x^2 - 5x > 3$.

1013. $x^2 - 5x > -3$.

1014. $x^2 - 3x < 5$.

1015. $x^2 - 3x < -5$.

1016. $-12x^2 + 3x + 1 < 0$.

1017. $x^2 - 100x + 42 > 0$.

1018. $-5x^2 - 10x + 7 < 0$.

1019. $-4x^2 - 7x + 3 > 0$.

1020. $x - 2 > \frac{1}{x+2}$.

1021. $\frac{x-3}{2x-2} < 1$.

1022. $(2x+5)(x+a) < 0$.

1023. $(ax+1)(ax+2) < 0$.

1024. $(x^2-1)(x^2-4) < 0$.

1025. $(x^2-1)(x^2-6x+5) < 0$.

1026. $\frac{x-1}{x-2} > \frac{x+1}{x+3}$.

1027. $\frac{x+3}{x-1} > \frac{2x-5}{x+3}$.

1028. $5 < x^2 - 14x + 50 < 26$.

1029. $5 < x^2 - 8x + 20 < 48$.

1030. $-1 < \frac{x-3}{x+1} < 1$; $\quad -2 < \frac{x-1}{x+3} < +2$.

1031. $(x+1)^2 > (x-3)^2$.

1032. $x + 2 < \sqrt{x+3}$.

1033. $x - 4 > \sqrt{x^2+2x}$.

1034. $2x + \sqrt{x^2-1} > 1$.

1035. $2x - \sqrt{x^2-1} > 1$.

1036. $2x - 3\sqrt{x} + 4 > 0$.

1037. $2x - 3\sqrt{x} + 1 < 0$.

1038. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} > 2$.

1039. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} < 3$.

1040. $\frac{x-3}{2x-1} < \frac{x+1}{x-2}$.

1041. $-1 < \frac{x-5}{2x+3} < 2$.

1042. $\sqrt{2x-5} < \sqrt{1-5x}$.

1043. $\sqrt{2x+5} > 2x$.

1044. $2x - \sqrt{x^2-3x-4} < 1$.

1045. $x + 1 < \sqrt{x+4}$.

1046. $2x - \sqrt{x-1} < 0$.

1047. $x - 3 > \sqrt{x^2-2x}$.

1048. $4\sqrt{x-2} < \sqrt{2x^2+x-1}$.

IV. PROBLÈMES RÉSOLUS

156. Problème 1. — *Soit l'équation paramétrique :*

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad (m - 1)x^2 + mx + m - 4 = 0. \qquad (1)$$

Peut-on choisir m de telle sorte que (1) admette deux racines comprenant entre elles le nombre 1?

Rappelons l'équivalence logique :

$$af(x_0) < 0 \iff \exists x' \quad \exists x'' \quad x' < x_0 < x'' \quad f(x') = f(x'') = 0.$$

Ici $\qquad a = m - 1, \qquad x_0 = 1, \qquad f(1) = 3\,m - 5.$

La condition conduit à l'inéquation :

$$\exists m? \quad (m - 1)(3\,m - 5) < 0.$$

Réponse : $\qquad 1 < m < \dfrac{5}{3}.$

157. Problème 2. — *Soit le polynome :*

$$f(x) = mx^2 + 2\,(2\,m + 1)x + 5\,m + 1.$$

Peut-on choisir m de telle sorte que ce polynome reste positif quel que soit x?

Rappelons l'implication mutuelle :

$$b^2 - 4\,ac < 0 \iff \forall x \quad \mathrm{sgn}\,f(x) = \mathrm{sgn}(a).$$

Ici $\dfrac{1}{4}(b^2 - 4\,ac) = (2\,m + 1)^2 - m(5\,m + 1) = -m^2 + 3\,m + 1$

et : $\qquad a = m.$

Le problème (2) s'écrit donc :

$$\exists m? \quad m > 0 \quad \text{et} \quad -m^2 + 3\,m + 1 < 0.$$

Il s'agit d'inéquations simultanées. Résolvons :

$$\exists m? \quad m^2 - 3\,m - 1 > 0.$$

Ce polynome a pour racines $\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$, m devant être extérieur à leur intervalle.

Compte tenu de $m > 0$, il reste :

$$m > \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Exercices. 1049. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$mx^2 + 4x + 9 - 5m = 0$$

a-t-elle deux racines inférieures à 5?

1050. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$(m + 1)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

a-t-elle deux racines supérieures à -10?

1051. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$8mx^2 - 6mx + m - 1 = 0$$

a-t-elle deux racines comprises entre -1 et $+1$?

1052. — Dans l'équation :

$$6\sin^2 x - 8\sin x + 1 = 0,$$

on prendra pour inconnue $\sin x$.

Montrer que cette équation n'a qu'une racine qui puisse être le sinus d'un angle aigu, c'est-à-dire un nombre compris entre 0 et 1. Calculer cette racine.

1053. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$4\sin^2 x - 2\sin x + m = 0$$

peut-elle donner deux valeurs acceptables pour le sinus d'un angle aigu? Quand ces deux valeurs sont égales, quel est l'angle aigu correspondant?

1054. — Pour quelles valeurs de m le polynome :

$$(m - 1)x^2 - 2mx + m - 3$$

est-il négatif quel que soit x?
Peut-il être positif quel que soit x?

1055. — Position de 2 par rapport aux racines du polynome :

$$mx^2 - 2(m + 1)x + m - 1.$$

1056. — Position des nombres 0, 1 et 2 par rapport aux racines du polynome :

$$x(x - 1) + (x - 1)(x - 2) + m(x - 2)x.$$

Exercices.

PROBLÈMES

1057. — Ranger les nombres : -1, $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, 99, 100, par rapport aux racines de l'équation :

$$x^2 - 100x + 1 = 0.$$

Qu'en concluez-vous pour les racines de cette équation?

1058. — Démontrer que l'équation

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} - 1 = 0$$

a des racines quels que soient a et b.

Si $a > b$, classer les nombres a et b par rapport aux racines.

1059. — Pour quelles valeurs de m le polynome :

$$mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

est-il négatif quel que soit x?

1060. — Pour quelles valeurs positives de x a-t-on :

$$x^2 - 5x > A$$

A étant un nombre positif donné?

Quelle est la plus petite valeur entière et positive de x telle que :

$$x^2 - 5x > 1\,000\,000?$$

Quelle est la plus grande valeur entière et négative de x qui vérifie la même inéquation?

1061. — Déterminer un polynome du second degré qui prenne les valeurs :

0 pour $x = 4$; 28 pour $x = 5$; 42 pour $x = -2$.

Pour quelles valeurs de x ce polynome est-il négatif?

Pour quelles valeurs de x est-il supérieur à 10?

Résoudre les inéquations :

1062. $(1 + a)x^2 - 3\,ax - 1 > 0$;

$bx^2 - (1 + ab)x + a > 0$.

1063. $a^2x^2 - (1 + a^2)x + 1 > 0$;

$x^2 - b^2x + a^2(b^2 - a^2) < 0$.

Discuter l'existence et le signe des racines des équations :

1064. $x^2 + 4\,ax + 2\,a^2 + 3\,a - 1 = 0$.

1065. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = a$.

1066. $\dfrac{x - 3}{x^2 - x + 1} = a$.

1067. — Pour quelles valeurs de m, l'équation:

$$mx^2 + (2\,m - 1)x + 3\,m + 4 = 0$$

a-t-elle une racine inférieure à 1 et une racine supérieure à 2?

1068. — Pour quelles valeurs de m, l'équation:

$$4\,x^2 - 2\,mx + m - 3 = 0$$

a-t-elle deux racines supérieures à 2?

1069. — Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$(m - 1)x^2 - 2\,mx + m - 3 = 0$$

a-t-elle deux racines comprises entre -1 et $+1$?

1070. — On donne l'équation :

$$x^2 - 4\,mx + m + 3 = 0.$$

Démontrer qu'il existe, entre les racines de cette équation, une relation indépendante de m.

Que devient cette relation si les racines sont égales? En déduire la valeur des racines doubles de l'équation, et vérifier.

1071. — Établir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ait une seule racine comprise entre deux nombres donnés, α et β, est :

$$f(\alpha)\,f(\beta) < 0.$$

Application : Pour quelles valeurs de m l'équation :

$$x^2 - mx + m - 3 = 0$$

a-t-elle une seule racine comprise entre 0 et 1?

Classer alors les racines et les nombres 0 et 1.

1072. — Déterminer a pour que le polynome :

$$x^2 - 5\,x + 6 + a\,(x^2 + 1)$$

ait deux racines égales. Calculer alors ces racines.

1073. — On donne le polynome :

$$f(x) = x^2 - 5\,x + 7.$$

Le décomposer en une somme de deux carrés.

Quelle valeur faut-il donner à x pour que ce trinome prenne la plus petite valeur possible?

Soit x_0 cette valeur. Démontrer que pour les valeurs :

$$x_1 = x_0 + h \qquad \text{et} \qquad x_2 = x_0 - h,$$

le polynome $f(x)$ prend des valeurs égales.

1074. — Soit l'équation :

$$f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + (2\,m^2 - 2\,m + 5)\,x + m^2 - m - 2 = 0.$$

1° Démontrer qu'elle a des racines quel que soit m, en formant $f(-1)$ et $f(+1)$.

2° Choisir m pour que ces racines soient positives.

3° Si l'on résout l'équation, on obtient des valeurs rationnelles en m.

4° Décomposer le polynome $f(x)$ en un produit de deux facteurs dont chacun est du 1er degré par rapport à chacune des lettres m et x.

1075. — On considère l'équation :

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

dont les racines, si elles existent, sont x' et x''.

1° Former l'équation du second degré qui admet pour racines x'^2 et x''^2.

2° Établir les relations qui doivent exister entre p et q pour que l'équation obtenue admette deux racines égales. Les résultats de ce calcul peuvent-ils être prévus?

3° p et q étant les coordonnées d'un point dans un plan, rapportées à deux axes rectangulaires, quel est l'ensemble des points du plan qui vérifient les relations établies au 2°?

4° Former l'équation qui admet pour racines x'^3 et x''^3. Vérifier que son discriminant est positif si celui de l'équation (1) est lui-même positif.

1076. — Soit le polynome :
$(a + xa')^2 + (b + xb')^2 + \dots + (k + xk')^2$.

1° Étudier son signe.

2° Qu'en déduire pour son discriminant?

3° Démontrer l'inégalité :
$\forall a \ \forall a' \dots (aa' + bb' + \dots + kk')^2 - (a^2 + b^2 + \dots + k^2)(a'^2 + b'^2 + \dots + k'^2) \leqslant 0.$

4° Cas particulier où
$a' = b' = \dots = k' = 1.$

5° Montrer que le carré de la moyenne arithmétique de n nombres est au plus égale à la moyenne arithmétique de leurs carrés.

Simplifier les fractions rationnelles :

1077. $\dfrac{2x - 3}{2x^2 - 13x + 15}$; $\dfrac{5x^2 + 14x - 3}{10x^2 - 17x + 3}$.

1078. $\dfrac{20x^2 - 13x + 2}{15x^2 - x - 2}$; $\dfrac{2x - 7 - \sqrt{3}}{2x^2 - 14x + 23}$.

1079. $\dfrac{x^2 - (a + 2b)x + 2ab}{x^2 - (2b + c)x + 2bc}$.

Résoudre les équations $x \in \mathrm{R} \ \exists x?$

1080. $$\frac{1}{x^2 - 9x + 8} + \frac{1}{2x^2 - 19x + 24} = \frac{2}{9 - 6x}.$$

1081. $$\frac{1}{x^2 - (2a+1)x + 2a} + \frac{1}{x^2 - (2b+1)x + 1b} = \frac{1}{x^2 - 2(a + b)x + 4ab}.$$

1082. $x^3 + 27 = x^2 + (a + 3)x + 3a.$

1083. $x^3 - 8a^3 = x^2 - (2a - 3)x - 6a.$

Déterminer le paramètre m *pour que les polynomes suivants admettent deux racines* x_1, x_2, $(x_1 < x_2)$, *vérifiant une condition donnée :*

1084. $f(x) \equiv (m - 1)x^2 - mx + m - 3$
et $x_1 < 3 < x_2.$

1085. $f(x) \equiv (m + 1)x^2 - (m - 1)x + m$
et $x_1 < x_2 < 2.$

1086. $f(x) \equiv (m + 3)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$
et $-1 < x_1 < x_2 < 1.$

*

1087. — **Problème corrigé.** — Résoudre le système des deux équations simultanées :

$x \in \mathrm{R} \ \exists x? \quad x^2 - 12x + 20 < 0 \quad (1)$

$10x^2 - 121x + 298 > 0 \quad (2)$

Solution. — (1) *exige* $2 < x < 10.$

Les racines du polyname (2) *ne sont pas simples. On évite leur calcul à priori, en classant* 2 *et* 10 *par rapport à ces racines, que nous appellerons* x_1 *et* x_2.

$$f(x) = 10x^2 - 121x + 298$$
$$f(2) = 40 + 298 - 242 > 0$$
$$f(10) = 1\,000 + 298 - 1210 > 0$$

de plus $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{121}{20} = 6 + \dfrac{1}{20}$

donc l'ordre est le suivant : $2 < x_1 < x_2 < 10$
et il faut $x < x_1$ *ou* $x > x_2$.

Les solutions sont donc :
$2 < x < x_1$ *et* $x_2 < x < 10.$

*

1088. — On appelle moyenne arithmétique m, moyenne géométrique g, moyenne harmonique h de deux nombres positifs x et y les nombres définis par les relations :

$$m = \frac{x + y}{2}; \quad g = \sqrt{xy}; \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1° Démontrer que : $m \geqslant g \geqslant h$
et que : $m - g \geqslant g - h.$

2° Calculer x et y connaissant :
$m - g = 1{,}5$ et $g - h = 1{,}44.$

3° Démontrer (en supposant $x \geqslant y$) que : $m - x$ est la moyenne géométrique de m et $m - h$; et que $x - y$ est la moyenne harmonique de x et $x - h$.

1089. — Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On pose $x = \alpha + y$. Ordonner par rapport à y le polynome $f(\alpha + y) = g(y)$. Dans le cas où : $af(\alpha) < 0$, que peut-on conclure pour le polynome $g(y)$? Retrouver ainsi le résultat énoncé n° 151.

CHAPITRE XII

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

I. DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

158. Une équation à deux inconnues. — Une équation du premier degré à deux inconnues x et y sur R est un problème du type :

$$x \in \mathrm{R} \quad y \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \quad \exists\, y? \quad ax + by + c = 0 \qquad \text{(E)}$$

où a, b et c représentent des nombres connus, ou des expressions qui dépendent de paramètres connus.

Une solution de l'équation (E) est **un couple** (x_0, y_0) **tel que, si l'on remplace simultanément** x **par** x_0 **et** y **par** y_0, la valeur numérique $ax_0 + by_0 + c$ du **premier membre soit nulle.**

On désigne par $\mathrm{R} \times \mathrm{R}$ l'ensemble **des couples rangés de nombres** réels. Nous écrirons donc (E) sous la forme :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists\,(x, y)? \quad ax + by + c = 0. \qquad \text{(E)}$$

Exemple. L'équation :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \qquad \exists\,(x, y)? \qquad 3x + 4y - 12 = 0 \qquad (1)$$

admet, entre autres, la solution $x = 4$, $y = 0$, soit : $(x, y) = (4, 0)$.

Elle n'admet pas la solution (0, 4).

Elle admet la solution (0, 3), la solution (8, — 3), etc.

Dans (E) a **et** b **ne sauraient être simultanément nuls** : sinon il n'y aurait plus d'équation.

Si $a \neq 0$ et $b = 0$. On obtient

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \qquad \exists\,(x, y)? \quad ax + c = 0. \qquad \text{(E)}$$

La réponse est donc déterminée **pour x mais non pour y. On obtient une infinité** de solutions : $x = -\frac{c}{a}$, $y = \lambda$ **arbitraire,**

Soit $$(x, y) = \left(-\frac{c}{a}, \lambda\right), \ \lambda \text{ arbitraire.}$$

Si $a = 0$, $b \neq 0$. La réponse est $(x, y) = \left(\mu, -\frac{c}{b}\right)$, μ **arbitraire.**

On peut examiner le problème **singulier** obtenu pour $a = b = 0$.

$$\exists\,(x, y)? \qquad 0.x + 0.y + c = 0.$$

La réponse ne dépend pas d'un choix de x et y.

Si $c \neq 0$, il y a **impossibilité.**

Si $c = 0$, tout couple (x, y) convient : il y a **indétermination** sur x et sur y.

Cas général. — **Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$, donnons à y une valeur numérique quelconque λ. Le problème devient dans ces conditions :**

$$x \in \mathrm{R} \quad y = \lambda \qquad \exists\, x? \qquad ax + \lambda b + c = 0. \qquad (\mathrm{E}')$$

La réponse est : $$x = -\frac{\lambda b + c}{a}.$$

A toute valeur numérique λ donnée à y correspond une valeur numérique donnée à x. Le problème (E) admet donc au moins une première catégorie infinie de solutions : $x = -\frac{\lambda b + c}{a}$, $\quad y = \lambda \quad$ **(λ arbitraire).**

Existe-t-il des solutions qui échappent à ces formules?
Soit (x_0, y_0) une solution de (E). On a :

$$ax_0 + by_0 + c = 0. \qquad (2)$$

Soit d'autre part x_1 la solution pour x quand on donne à λ la valeur y_0.
On a aussi : $$ax_1 + by_0 + c = 0. \qquad (3)$$

D'où, par soustraction membre à membre de (2) et de (3) :

$$a\,(x_0 - x_1) = 0.$$

Comme a n'est pas nul on a $x_0 - x_1 = 0$, ou $x_0 = x_1$. On a bien trouvé la solution envisagée.

- THÉORÈME. — **L'équation :**
  $(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists\,(x, y)? \quad ax + by + c = 0 \quad a \neq 0 \quad b \neq 0$
  admet une infinité de solutions données par les formules :

$$x = -\frac{\lambda b + c}{a}; \qquad y = \lambda.$$

Remarque. — **On pourrait aussi bien commencer par donner à x une valeur μ, on obtiendrait toutes les solutions par l'intermédiaire d'une autre formule.**

EXEMPLE. *Résoudre l'équation paramétrique :*

$$(x, y) \in (\mathrm{R} \times \mathrm{R}) \qquad \exists\, (x, y)? \quad (m - 1)x + 2\,my + m - 1 = 0.$$

Pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$ $\quad x = \mu; \quad y = \dfrac{(1 - m)(\mu + 1)}{2\,m}$ $\quad \mu$ arbitraire.

Pour $m = 1$ $\quad x = \mu; \quad y = 0$ $\quad \mu$ arbitraire.

Pour $m = 0$ $\quad x = -1; \quad y = \lambda$ $\quad \lambda$ arbitraire.

159. Cas particulier de l'équation homogène. — Lorsque le coefficient c est nul, l'équation :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}; \qquad \exists\, (x, y)? \quad ax + by = 0 \qquad \text{(H)}$$

est dite *homogène*.

On doit supposer que a et b ne sont pas simultanément nuls, sinon il n'y a plus d'équation. Soit par exemple $a \neq 0$. Les solutions sont toutes données par les formules : $\quad x = -\dfrac{b}{a}\lambda, \quad y = \lambda.$

Mais on peut donner des formules où x et y jouent des rôles plus symétriques.

λ étant arbitraire, soit t tel que $\lambda = at$. A toute valeur de λ correspond une valeur de t et réciproquement. Les formules deviennent :

$$x = -\,bt, \qquad y = at.$$

EXEMPLE. Pour $3\,x - 2\,y = 0$ on obtient :

$$x = 2\,t \qquad y = 3\,t.$$

160. Système de deux équations à deux inconnues. — Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est un problème du type :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists\, (x, y)? \quad \begin{cases} ax + by + c = 0 & \text{(E)} \\ a'x + b'y + c' = 0 & \text{(E')}. \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

L'ensemble des solutions de (S) est l'intersection de l'ensemble des solutions de (E) et de l'ensemble des solutions de (E').

UNE IMPLICATION FONDAMENTALE. — Faisons l'hypothèse que le couple (x_0, y_0) est solution de (S) :

$$\mathcal{H}: \quad \exists\, (x_0, y_0) \quad ax_0 + by_0 + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x_0 + b'y_0 + c' = 0.$$

Soit alors deux nombres K et K', quelconques, l'un ou l'autre (ou les deux) pouvant même être nul. On a la conclusion évidente :

$$\mathcal{C}: \quad \forall \mathrm{K}\, \forall \mathrm{K}' \quad \mathrm{K}\,(ax_0 + by_0 + c) + \mathrm{K}'\,(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0,$$

cette conclusion revient en effet à affirmer que $\mathrm{K} \times 0 + \mathrm{K}' \times 0 = 0$.

CONSÉQUENCES POUR (S). — Choisissons $\mathrm{K} = b'$ et $\mathrm{K}' = -\,b$, afin que y_0 disparaisse de la combinaison qui figure dans ($\mathcal{C}$). Il vient :

$$\exists (x_0, y_0) \;\; (x_0, y_0) \text{ vérifie (S)} \Longrightarrow b'(ax_0 + by_0 + c) - b\,(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0 \qquad (1)$$

ou, réductions faites :

$$\exists (x_0, y_0)\ (x_0, y_0) \text{ vérifie (S)} \implies (ab' - ba')\, x_0 + (cb' - bc') = 0. \quad (2)$$

Choisissons maintenant $K = -a'$ et $K' = a$, afin que x_0 disparaisse. Il vient :

$$\exists (x_0, y_0)\ (x_0, y_0) \text{ vérifie (S)} \implies -a'(ax_0 + by_0 + c) + a(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0. \quad (3)$$

ou, réductions faites :

$$\exists (x_0, y_0)\ (x_0, y_0) \text{ vérifie (S)} \implies (ab' - ba')\, y_0 + (ac' - ca') = 0. \quad (4)$$

CAS GÉNÉRAL POUR LA RÉSOLUTION DE (S). — Nous avons vu apparaître par deux fois le groupement : $D = ab' - ba'$.

Supposons $D \neq 0$.

La relation (2) implique $\quad x_0 = \dfrac{bc' - cb'}{ab' - ba'}.$

La relation (4) implique $\quad y_0 = \dfrac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists (x_0, y_0),\ (x_0, y_0) \text{ vérifie (S)} \\ \text{et } ab' - ba' \neq 0\end{array}} \implies \boxed{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \\ y_0 = \dfrac{ca' - ac'}{ab' - ba'}. \end{array}}$$

Reste à savoir si cette implication est mutuelle, et, pour cela, il suffirait de remplacer dans (S) x et y par les valeurs obtenues. Nous raisonnerons autrement :

Ces valeurs x_0 et y_0 vérifient (1) et (3), donc aussi (d'après l'implication fondamentale) les relations obtenues en ajoutant les premiers membres de (1) et de (3) après les avoir multipliés respectivement par des nombres l et l'.

En choisissant $l = a$ et $l' = b$ on obtient :

$$a\,[b'(ax_0 + by_0 + c) - b(a'x_0 + b'y_0 + c')] + b\,[-a'(ax_0 + by_0 + c) + a(a'x_0 + b'y_0 + c')] = 0$$

soit :
$$(ab' - ba')(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

Comme $ab' - ba'$ est différent de zéro, on obtient :

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

On vérifierait de même que l'on a :

$$a'x_0 + b'y_0 + c' = 0,$$

en choisissant $l = a'$ et $l' = b'$.

▪ **THÉORÈME. — Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, le système :**

$$(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \exists_!(x, y)?$$
$$ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a'x + b'y + c' = 0 \qquad (S)$$

admet la solution unique :

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Étude du cas particulier $ab' - ba' = 0$. — Revenons aux implications notées plus haut (2) et (4). Dans le cas où $ab' - ba' = 0$ on obtient :

$$\exists(x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \text{ vérifie (S)} \implies 0 \times x_0 + cb' - bc' = 0 \qquad (1)$$
$$\exists(x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \text{ vérifie (S)} \implies 0 \times y_0 + ac' - ca' = 0. \qquad (2)$$

Donc, si l'on n'a pas à la fois $cb' - bc' = 0$ et $ac' - ca' = 0$ l'hypothèse que (x_0, y_0) vérifie (S) conduit à une impossibilité. Cette hypothèse ne peut donc pas être faite. (S) n'a aucune solution.

▪ **Si $ab' - ba' = 0$ et si l'un au moins des nombres $bc' - cb'$, $ca' - ac'$ n'est pas nul, le système est impossible.**

Reste à examiner le cas où :

$$ab' - ba' = 0; \qquad bc' - cb' = 0; \qquad ca' - ac' = 0.$$

Ces relations sont manifestement vérifiées dans le cas extrêmement particulier où $a = a' = b = b' = 0$. Comme il n'y a plus à proprement parler de système dans ce cas très particulier, nous le traiterons en dernier.

A. — Supposons que l'un des quatre nombres a, a', b ou b' ne soit pas nul. Soit, par exemple, $a \neq 0$.

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{et} \quad a \neq 0 \implies b' = \frac{a'}{a}b$$

$$ac' - ca' = 0 \quad \text{et} \quad a \neq 0 \implies c' = \frac{a'}{a}c.$$

D'autre part : $b' = \frac{a'}{a}b$ et $c' = \frac{a'}{a}c \implies bc' - cb' = \frac{a'}{a}(bc - bc) = 0.$

Ainsi $b' = \frac{a'}{a}b$ et $c' = \frac{a'}{a}c$ épuisent complètement l'hypothèse.

Remarquant que $a' = \frac{a'}{a}a$, on peut écrire (S) sous la forme :

$$(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \exists x, y)? \quad \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E) \\ \frac{a'}{a}(ax + by + c) = 0 & (E'). \end{cases} \qquad (S)$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc contenu dans l'ensemble des solutions de (E'), et il y a coïncidence pour $a' \neq 0$. De toute façon, leur

intersection, ensemble des solutions de (S), se confond avec l'ensemble des solutions de (E). Les solutions sont donc données par :

$$x = -\frac{b\lambda + c}{a} \qquad \lambda \text{ arbitraire.} \qquad y = \lambda$$

Il y a pour (S) *indétermination du premier ordre* : la valeur à attribuer à *une* inconnue étant arbitraire, la valeur de la seconde se déduisant de la première.

B. — Dans le cas $a = b = a' = b' = 0$, le problème devient :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)? \quad \begin{cases} 0 \,.\, x + 0 \,.\, y + c = 0 \\ 0 \,.\, x + 0 \,.\, y + c' = 0. \end{cases}$$

La réponse ne dépend plus d'un choix de x et de y.

Si $c \neq 0$ ou $c' \neq 0$: le problème est *impossible*.
Si $c = 0$ et $c' = 0$: le problème est *indéterminé*. Il y a pour (S) *indétermination du second ordre* : tout couple (λ, μ) $\forall \lambda \, \forall \mu$ convient.

On peut rencontrer ces cas au cours de la discussion de systèmes paramétriques.

Remarque. — Dans le cas A nous avons supposé $a \neq 0$. Toute autre supposition conduit à des résultats analogues car, en échangeant les noms des inconnues (x en y et y en x) et l'ordre des équations, on peut toujours se ramener au cas où le premier coefficient de la première équation est *le* coefficient supposé non nul.

161. Conclusion théorique et conseils pratiques. — Le rôle de la quantité

$$\mathrm{D} = ab' - b'a$$

apparaît donc fondamental. On appelle D le *déterminant* du système et on le note $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$. Cette disposition évoque la place des coefficients dans les équations.

Au cours de la discussion nous avons vu les groupements :

$ac' - ca'$, que nous désignerons par A, et qui se noterait $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

$bc' - cb'$, que nous désignerons par B, et qui se noterait $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$.

Pour $\mathrm{D} \neq 0$, le système admet la solution donnée par les formules dites formules de Cramer[1].

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}; \qquad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}.$$

On trouvera dans le tableau suivant un résumé de la discussion.

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)? \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Notations : $\mathrm{D} = ab' - ba'$; $\mathrm{A} = ac' - ca'$; $\mathrm{B} = bc' - cb'$.

1. Cramer Gabriel, mathématicien suisse (1704-1752).

<table>
<tr><td>$D \neq 0$</td><td colspan="3">$\Longleftrightarrow$</td><td>Solution unique. Formules de Cramer.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$D = 0$</td><td colspan="3">A et B non nuls tous les deux $\Longrightarrow$</td><td>Impossibilité</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A = B = 0$</td><td colspan="2">a, a', b et b' non tous nuls $\Longrightarrow$</td><td>Une infinité de solutions (une inconnue arbitraire)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = a' = 0$
$b = b' = 0$</td><td>c et c' non tous deux nuls $\Longrightarrow$</td><td>Impossibilité</td></tr>
<tr><td>$c = c' = 0 \Longrightarrow$</td><td>Une infinité de solutions (x et y arbitraires).</td></tr>
</table>

Pratiquement, on commencera par former le déterminant D.

Si D est différent de zéro, toute méthode qui permet d'obtenir LA solution est acceptable, et d'autant meilleure que plus rapide.

Si $D = 0$, on examinera DIRECTEMENT le problème.

162. Méthode des multiplicateurs. — **Pour $D \neq 0$, dans les cas numériques surtout, la méthode des multiplicateurs, basée sur l'implication fondamentale du n° 160, donne rapidement la solution :**

Exemples. I.
$$\begin{cases} 3y + 2y = 4 \\ 5x - 6y = 1. \end{cases}$$

En multipliant les deux membres de la première équation par le multiplicateur 3 et les deux membres de la seconde par le multiplicateur 1, et en ajoutant membre à membre, on obtient une combinaison où y disparaît. On pourra disposer les calculs de la sorte :

$$\begin{array}{r|c|c} 3x + 2y = 4 & 3 & 5 \\ 5x - 6y = 1 & 1 & -3 \end{array}$$

$$14x \qquad = 13 \implies x = \frac{13}{14}$$

$$28y = 17 \implies y = \frac{17}{28}$$

y a été obtenu en utilisant les multiplicateurs 5 et -3.

II. La méthode s'applique aussi aux systèmes qui contiennent un ou plusieurs paramètres. Soit le système :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists\,(x, y)? \quad \begin{cases} mx + my = m \\ mx + y \;\; = 2\,m \end{cases}$$

$\mathrm{D} = m - m^2 = m(1 - m) \qquad \mathrm{D} \neq 0 \iff m \neq 0$ et $m \neq 1$:

En retranchant membre à membre on obtient :

$$\exists y? \quad (m-1)\,y = -m \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{m}{m-1} \quad \text{et} \quad x = \frac{2\,m-1}{m-1}$$

qui donnent LA solution.

Pour $m = 0$, la première équation disparaît, on obtient $x = \lambda$, $y = 0$.

Pour $m = 1$, le système devient :

$$\exists\,(x, y)? \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases} \text{ Il y a donc impossibilité.}$$

163. Méthode par substitution. — Soit un système de la forme :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists\,(x, y)? \qquad \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ y = \alpha x + \beta & (2) \end{cases} \qquad (\mathrm{T})$$

Toute solution de ce système : $x = x_0$, $y = y_0$, vérifie nécessairement les relations

$$\begin{cases} ax_0 + b(\alpha x_0 + \beta) + c = 0 & (3) \\ y_0 = \alpha x_0 + \beta. & (4) \end{cases}$$

Donc, dans le cas de $\mathrm{D} \neq 0$, on obtiendra x_0 en résolvant (3) et y_0 en portant dans (2) la valeur x_0.

On dit que l'on a substitué dans (1), à l'inconnue y, l'expression de y en fonction de x.

Exemple.
$$\begin{cases} 3\,x + 5\,y = 17 \\ y = 2\,x - 7 \end{cases}$$

$$\exists\, x? \qquad 3\,x + 5(2\,x - 7) = 17 \implies 13\,x = 52 \implies x = 4$$
$$x = 4 \text{ et } y = 2\,x - 7 \implies y = 1$$

Par une suite de conditions nécessaires, l'on obtient un seul couple ($x = 4$, $y = 1$), donc on ne peut se trouver que dans le cas $\mathrm{D} \neq 0$ et ce couple donne LA solution.

Pratiquement on appliquera la méthode par substitution aux systèmes qu'il est aisé de mettre sous la forme (T).

Exemple. Résoudre et discuter le système :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists\,(x, y)? \qquad \begin{cases} mx + y = 3 & (\mathrm{E}) \\ x + 3\,y = n & (\mathrm{E}') \end{cases} \qquad (\mathrm{S})$$

$$\mathrm{D} = 3\,m - 1; \qquad \mathrm{D} \neq 0 \iff m \neq \frac{1}{3}.$$

Soit donc 1° $m \neq \frac{1}{3}$. On peut procéder par *substitution* :

$$\forall x \quad \forall y \qquad x + 3\,y = n \iff x = n - 3\,y.$$

En substituant cette valeur dans (E) on obtient les conditions *nécessaires* successives :

$$m(n - 3y) + y = 3 \implies y = \frac{3 - mn}{1 - 3m} \implies x = \frac{n - 9}{1 - 3m}.$$

La théorie générale garantit qu'on a obtenu LA solution.

2° $m = \frac{1}{3}$. Le système devient :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)? \quad \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 3 \\ x + 3y = n \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 3y = n. \end{cases}$$

La réponse est immédiate $n \neq 9 \implies$ impossibilité
$n = 9 \implies x = 9 - 3\lambda,\ y = \lambda;$ λ arbitraire.

164. Équations homogènes. — Lorsque les coefficients c et c' sont nuls, le système du premier degré de deux équations à deux inconnues :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)? \quad \begin{cases} ax + by = 0 & \text{(E)} \\ a'x + b'y = 0 & \text{(E')} \end{cases}$$

est un système homogène, formé de deux équations homogènes.

La solution $x = 0$, $y = 0$ est en évidence.

Donc, si le déterminant du système, $ab' - ba'$, est différent de zéro, le système n'a qu'une solution, et c'est celle-là. On l'appelle la solution banale (ou triviale).

Si $ab' - ba' = 0$ le système n'est pas impossible puisque nous en tenons une solution. Il en a donc une infinité.

Supposons que a et b ne soient pas nuls tous les deux, alors les solutions de (E) sont, d'après le n° 159 :

$$x_0 = -bt, \qquad y_0 = at; \qquad t \text{ arbitraire.}$$

Or $\quad ab' - ba' = 0 \implies ab't - ba't = 0 \implies b'y_0 + a'x_0 = 0$

et ces solutions sont aussi celles de (E'), dans tous les cas.

■ THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que le système homogène admette des solutions autres que la solution banale est que son déterminant $ab' - ba'$ soit nul.**

EXEMPLE. *Déterminer m pour que le système :*

$$\begin{cases} (m - 1)x + (m + 3)y = 0 \\ 3mx + (m - 5)y = 0 \end{cases}$$

admette des solutions non triviales.

$$\mathrm{D} = (m - 1)(m - 5) - 3m(m + 3) = -2m^2 - 15m + 5.$$

D'où l'équation : $\quad \exists x? \ \ 2m^2 + 15m - 5 = 0$

et les solutions : $m' = \dfrac{-15 - \sqrt{265}}{4}, \qquad m'' = \dfrac{-15 + \sqrt{265}}{4}.$

Exercices. *Résoudre les systèmes :* $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \exists (x, y)?$

1090. $\begin{cases} 6x - 5y = 10 \\ 8x + 3y = 52. \end{cases}$

1091. $\begin{cases} 2x + 3 = 6y \\ 5y - 2 = 3x. \end{cases}$

1092. $\begin{cases} 4x + 7y = -3 \\ 7x + 4y = 36. \end{cases}$

1093. $\begin{cases} 15x - 25y = 55 \\ 48x - 6y = 324. \end{cases}$

1094. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-1} = 10 \\ \dfrac{x-3}{y+1} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

1095. $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{6} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3y-x}{4} = \dfrac{y}{6} - \dfrac{1}{12}. \end{cases}$

1096. $\begin{cases} (x-1)(y-2) = (x+1)(y-3) \\ (x-5)(y+4) = (x-4)(y-1). \end{cases}$

1097. $\begin{cases} (x-1)(y-2) - (x+1)(y-3) = 4 \\ (x+3)(y+1) - (x-3)(y-5) = 18. \end{cases}$

1098. $\begin{cases} (x-1)^2 - (y+1)^2 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$

1099. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{y-1} = 0 \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$

1100. $\begin{cases} 5x - y - (x - y - 4) = 4x + 5y - 21 \\ 6(x+4) - 5(x - y - 3) = 4x - 2y + 71. \end{cases}$

1101. $\begin{cases} 6x - 8y = 15 \\ 9x - 12y = 10. \end{cases}$

1102. $\begin{cases} 6x - 8y = 22 \\ 9x - 12y = 33. \end{cases}$

1103. $\begin{cases} 6x - y - 6(x - 9) = 50 \\ 4(x + 2y - 1) - (x - 3y + 2) = 164. \end{cases}$

1104. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3} + \dfrac{y+1}{y+3} = 2 \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

1105. $\begin{cases} \dfrac{x}{352} + \dfrac{y}{264} = \dfrac{1}{132} \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$

1106. $\begin{cases} 3(x - 2y + 1) - 5(x + y - 2) = x + y - 2 \\ 35x - 49y = 364. \end{cases}$

1107. $\begin{cases} 2(x - 3y + 1) = 4x - y - 205 \\ \dfrac{3}{4}x - 5\dfrac{y+1}{6} = x - \dfrac{3y}{5} - 13. \end{cases}$

Résoudre et discuter les systèmes : $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \exists (x, y)?$

1108. $\begin{cases} mx + 3y = 8 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

1109. $\begin{cases} 8x - 5y = 11 \\ 6x - ay = b. \end{cases}$

1110. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ (m-3)x + my = m - 1. \end{cases}$

1111. $\begin{cases} x + y = \dfrac{a+b}{ab} \\ (a+b)x - (a-b)y = \dfrac{a^2+b^2}{ab}. \end{cases}$

1112. $\begin{cases} x + ay = 9 \\ ax + y = b. \end{cases}$

1113. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a-b} \\ \dfrac{x}{a-b} - \dfrac{y}{a+b} = \dfrac{1}{a+b}. \end{cases}$

1114. $\begin{cases} mx + (m-1)y = 5 \\ (m-2)x + my = a. \end{cases}$

1115. $\begin{cases} p^2x + py + 1 = 0 \\ q^2x + qy + 1 = 0. \end{cases}$

1116. $\begin{cases} (a-3)x + (a+3)y = a \\ (b-4)x + (b+4)y = b. \end{cases}$

1117. $\begin{cases} p^3x + py + 1 = 0 \\ q^3x + qy + 1 = 0. \end{cases}$

1118. $\begin{cases} ax + by = c \\ a^2x + b^2y = c^2. \end{cases}$

1119. $\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = c. \end{cases}$

1120. $\begin{cases} ax + by = c \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$

Déterminer les paramètres de telle sorte que les systèmes suivants admettent des solutions autres que la solution $x = 0$, $y = 0$. (Discuter.)

1121. $\begin{cases} mx + (m - 1)y = 0 \\ 2x + 7y = 0. \end{cases}$ **1122.** $\begin{cases} (m - 1)x - 8y = 0 \\ x + my = 0. \end{cases}$

1123. $\begin{cases} mx + (m - 1)y = 0 \\ (m - 3)x + (m - 7)y = 0. \end{cases}$ **1124.** $\begin{cases} mx + 8y = 0 \\ mx - 9y = 0. \end{cases}$

Résoudre et, le cas échéant, discuter les systèmes : $\exists\,(x, y)$?

1125. $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 = 0 \\ bx - ay = 0. \end{cases}$ **1126.** $\begin{cases} ax + y = 2a \\ x + ay = 1 + a^2. \end{cases}$

1127. $\begin{cases} x + y = a + b \\ bx + ay = 2ab. \end{cases}$ **1128.** $\begin{cases} x + a^2y = b \\ x + y = ab^2. \end{cases}$

1129. $\begin{cases} y = ax + b \\ x = ay + b. \end{cases}$ **1130.** $\begin{cases} a^2 + ay + x = 0 \\ b^2 + by + x = 0. \end{cases}$

1131. $\begin{cases} \frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = \frac{1}{a - b} \\ \frac{x}{a + b} - \frac{y}{a - b} = \frac{1}{a + b}. \end{cases}$ **1132.** $\begin{cases} (1 - m)x + (m + 3)y = 3m + 1 \\ 2(1 - m)x + (m + 6)y = m + 2. \end{cases}$

Exercices.

II. CALCULS PARTICULIERS

165. Un système rationnel. — Soit à résoudre le système :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists\,(x, y)? \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{y}{y + 1} = 2 & \text{(E)} \\ 2x + 3y = -1. & \text{(E')} \end{cases} \quad \text{(S)}$$

Le domaine de validité $\mathcal{D}$ du système exclut pour x la valeur 1 et pour y la valeur -1.

Sur $\mathcal{D}$ on peut transformer (S) par des calculs algébriques.

Après suppression des dénominateurs de (E) il vient :

$$(x, y) \in \mathcal{D} \quad \exists\,(x, y)? \qquad \begin{cases} xy + x + xy - y = 2xy + 2x - 2y - 2 \\ 2x + 3y = -1. \end{cases} \quad (S_1)$$

ou, après réduction :

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0. \end{cases} \quad (S_1)$$

Les termes en xy disparaissent, de sorte que (S_1) est linéaire. On trouve facilement que (S_1) admet la solution $x = 1$, $y = -1$. Il en résulte que sur $\mathcal{D}$, (S) n'a pas de solution.

166. Emploi d'inconnues auxiliaires. — Soit à résoudre le système :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)? \qquad \begin{cases} \dfrac{4}{x-3} + \dfrac{5}{y+1} = 2 \\ \dfrac{5}{x-3} + \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{29}{20}. \end{cases} \qquad (\mathrm{S})$$

Le domaine de validité $\mathcal{D}$ du système exclut pour x la valeur 3 et pour y la valeur -1.

On voit que x et y ne figurent dans (S) que par l'intermédiaire des groupements $\dfrac{1}{x-3} = \mathrm{X}$ et $\dfrac{1}{y+1} = \mathrm{Y}$, définis sur $\mathcal{D}$.

Pour X et Y on a le problème :

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (\mathrm{X}, \mathrm{Y})? \qquad \begin{cases} 4\,\mathrm{X} + 5\,\mathrm{Y} = 2 \\ 100\,\mathrm{X} + 20\,\mathrm{Y} = 29 \end{cases}$$

qui admet la solution $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}\right)$.

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{4} \iff x - 3 = 4 \iff x = 7$$

$$\frac{1}{y+1} = \frac{1}{5} \iff y + 1 = 5 \iff y = 4.$$

Réponse : $(x, y) = (7, 4)$

ou : $x = 7, \quad y = 4.$

Exercices. *Résoudre, en choisissant une inconnue auxiliaire, les systèmes :*

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)?$$

1133. $\begin{cases} \dfrac{5}{3x} - \dfrac{2}{y} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{7}{4x} + \dfrac{3}{2y} = 1{,}1. \end{cases}$ **1134.** $\begin{cases} \dfrac{3}{y-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{y-1} + \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{29}{12}. \end{cases}$

Résoudre et discuter les systèmes :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)?$$

1135. $\begin{cases} m\sqrt{x+3} - 9\sqrt{y+1} = 2 \\ (m+1)\sqrt{x+3} + (m-3)\sqrt{y+1} = m. \end{cases}$

1136. $\begin{cases} -3\,mx^2 + (m-1)y^2 = 1 \\ (m-2)x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$ **1137.** $\begin{cases} a\sqrt{x} + \sqrt{y} = a^3 \\ \sqrt{x} + a\sqrt{y} = 1. \end{cases}$

1138. $\begin{cases} \dfrac{m-1}{x-5} + \dfrac{m-2}{y-4} = m \\ \dfrac{m-3}{x-5} + \dfrac{m-4}{y-4} = m + 1. \end{cases}$ **1139.** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+2} - \dfrac{x+1}{y-2} + \dfrac{12}{y^2-4} = 0. \\ \dfrac{y-3}{x-1} - \dfrac{y+3}{x+1} + \dfrac{20}{x^2-1} = 0 \end{cases}$

1140. $\begin{cases} |x + y - m| + 2|x - y| = |m - 1| \\ m|x + y - m| + (m-1)|x - y| = 0. \end{cases}$

1141. $\begin{cases} ax + b\sqrt{x} = ay + b\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = a + b. \end{cases}$

Exercices.

III. AUTRES SYSTÈMES DU PREMIER DEGRÉ

167. Un système de trois équations à deux inconnues. — Soit à résoudre le système paramétrique :

$$(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \exists (x, y)? \quad \begin{cases} mx + y = 4 & (1) \\ x - my = 1 & (2) \\ x + y = \dfrac{8}{1 + m^2} & (3) \end{cases} \quad (\mathrm{S})$$

Si (x_0, y_0) est solution de (S), (x_0, y_0) est solution du système (T) obtenu en ne gardant que les équations (1) et (2).

La solution de (T) est : $\quad x = \dfrac{4m + 1}{m^2 + 1} \qquad y = \dfrac{-m + 4}{m^2 + 1}.$

En portant ces valeurs dans (3) on saura si (S) admet ou non une solution. Comme le système contient un paramètre, on peut se demander s'il existe une (ou des) valeur du paramètre, qui rende les trois équations *compatibles*. On se pose le problème

$$m \in \mathrm{R} \quad \exists m? \qquad \frac{4m + 1}{m^2 + 1} + \frac{-m + 4}{m^2 + 1} = \frac{8}{m^2 + 1}. \qquad (\mathrm{C})$$

La *condition de compatibilité* est donc $m = 1$. Pour $m \neq 1$ (S) est impossible; pour $m = 1$ (S) admet la solution $x = \dfrac{5}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}$.

168. Cas de deux équations homogènes à trois inconnues. — Soit à résoudre le système :

$$x \in \mathrm{R} \quad y \in \mathrm{R} \quad z \in \mathrm{R} \quad \exists x? \ \exists y? \ \exists z? \quad \begin{cases} ax + by + cz = 0 & (\mathrm{E}) \\ a'x + b'y + c'z = 0. & (\mathrm{E}') \end{cases} \quad (\mathrm{S})$$

Une solution d'un tel système est un triplet rangé de nombres réels (x, y, z).

Si nous donnons à l'une des inconnues une valeur arbitraire, le problème se particularise en un système de deux équations à deux inconnues.

En donnant à z une valeur ν, on forme un système en x et y dont le déterminant est :

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

En donnant à y une valeur μ, on forme un système en x et z dont le déterminant est :

$$\mathrm{D}_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Enfin, si l'on donne à x une valeur λ, on forme un système en y et z dont le déterminant est :

$$\mathrm{D}_2 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Supposons que l'un des trois déterminants ne soit pas nul, par exemple $D \neq 0$, et résolvons le système obtenu en donnant à z la valeur ν.

On obtient d'après les formules de Cramer :

$$x = \frac{D_2}{D}\nu, \quad y = -\frac{D_1}{D}\nu, \quad z = \nu. \qquad (1)$$

Le système (S) admet donc au moins la catégorie infinie des solutions données par les formules (1).

Réciproquement, si (x_0, y_0, z_0) est une solution de (S), on démontrera que cette solution coïncide avec celle que donnent les formules (1) pour $\nu = z_0$. On s'inspirera de ce qui a été fait au n° 158 pour une équation à deux inconnues.

On a à la fois :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_0 = 0 \\ a'x_1 + b'y_1 + c'z_0 = 0 \end{cases}$$

En posant $\quad x_1 = \frac{D_2}{D} z_0 \quad$ et $\quad y_1 = -\frac{D_1}{D} z_0$

et puisque $D \neq 0$, on en déduit $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$.

Cas particulier. — Dans le cas où : $ab' - ba' = ac' - ca' = bc' - cb' = 0$ et où, cependant, l'une des équations, la première par exemple, ne disparaît pas, il existera un coefficient non nul sur les six. En changeant au besoin le nom des inconnues on pourra supposer $a \neq 0$. De $ab' - ba' = 0$ on tire $b' = b\frac{a'}{a}$, etc.

Le système devient $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a\frac{a'}{a}x + b\frac{a'}{a}y + c\frac{a'}{a}z = 0 \end{cases}$

et il se réduit à la première équation.

Remarque. — Les formules (1) se mettent sous une forme plus symétrique en utilisant un autre paramètre, ρ, lié au paramètre ν par la relation

$$\nu = \rho D.$$

A toute valeur de l'un correspond une valeur de l'autre. On obtient alors :

$$x = \rho D_2, \quad y = -\rho D_1, \quad z = \rho D. \qquad (2)$$

Les solutions sont des triplets rangés dont les trois éléments restent proportionnels à trois nombres fixes.

Exemple. $\qquad \exists\,(x, y, z) \quad \begin{cases} x - 2y + mz = 0 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$

$$D = m + 2, \qquad D_1 = -(m + 1), \qquad D_2 = 2 - m^2.$$

Ces déterminants ne sont pas nuls simultanément. L'un au moins des trois permet la résolution et l'on obtient toujours :

$$x = \rho\,(2 - m^2),\ y = \rho\,(m + 1),\ z = \rho\,(m + 2)\ \rho \text{ arbitraire.}$$

169. Systèmes de deux équations à trois inconnues. — Soit à résoudre un système de la forme :

$$\exists\,(x, y, z)? \quad \begin{cases} ax + by + cz = d & \text{(E)} \\ a'x + b'y + c'z = d'. & \text{(E')} \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

Comme nous l'avons fait au n° **168**, nous commençons par particulariser le système (S) en un système de deux équations à deux inconnues et, à cet effet, nous attribuons à l'une des inconnues une valeur arbitraire.

Les trois systèmes obtenus ont pour déterminants respectifs :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Si l'un des trois n'est pas nul, on résout le système particularisé. On démontre que les formules obtenues ne laissent échapper aucune solution.

Si les trois déterminants sont nuls, on examine le système directement pour discerner s'il y a impossibilité ou indétermination, et de quelle sorte.

EXEMPLES. I. $\exists\,(x, y, z) \quad \begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -28, \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14.$$

La nullité du premier empêche de donner à z une valeur arbitraire. En revanche il est loisible de donner à y une valeur arbitraire μ.

$$\exists\,(x, z) \quad \begin{array}{l|l} 2x + 5z = 1 + \mu & -3 \\ 6x + z = 2 + 3\mu & 1 \end{array}$$

$$-14z = -1 \implies z = \frac{1}{14} \implies x = \frac{9}{28} + \frac{1}{2}\mu.$$

Les solutions sont : $x = \frac{9}{28} + \frac{1}{2}\mu; \quad y = \mu; \quad z = \frac{1}{14}.$

On constate que z a une valeur déterminée.

II. $\exists\,(x, y, z)? \quad \begin{cases} x - 2y + mz = 1 \\ x + my - z = m \end{cases}$

$$D = m + 2; \quad D_1 = -m - 1; \quad D_2 = 2 - m^2.$$

Pour $m \neq -2$, on calculera x et y en fonction de $z = \nu$ par les formules de Cramer.

Pour $m = -2$, on obtient : $\exists\,(x, y, z)? \quad \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x - 2y - z = -2. \end{cases}$

En retranchant membre à membre, on obtient : $\begin{cases} z = -3 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

d'où les solutions : $x = 2\mu - 5; \quad y = \mu, \quad z = -3.$

III. — Soit à résoudre le système :

$$\exists\,(x, y, z)? \quad \begin{cases} x + 2y + z = m & \text{(E)} \\ 3x + 6y + 3z = 7 & \text{(E')} \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Le système particularisé ne peut être un système de Cramer. De l'étude des équations homogènes faites au n° **164**, nous pouvons déduire que les premiers membres des deux équations sont proportionnels. On voit d'ailleurs directement que le système peut s'écrire :

$$\exists\,(x, y, z)? \quad \begin{cases} x + 2y + z = m \\ x + 2y + z = \dfrac{7}{3}. \end{cases}$$

Pour $m \neq \frac{7}{3}$, impossibilité.

Pour $m = \frac{7}{3}$ indétermination. Les solutions sont données par les formules :

$$x = \lambda, \qquad y = \mu, \qquad z = -\lambda - 2\mu + \frac{7}{3}$$

(dont on pourra démontrer qu'elles ne laissent échapper en effet aucune solution).

170. Systèmes de trois équations à trois inconnues. — Soit à résoudre le système :

$$\exists\,(x, y, z)? \quad \begin{cases} x + y + 2z = 4 & (1) \\ 2x - y + 3z = 6 & (2) \\ x - 3y + 4z = 7. & (3) \end{cases}$$

Procédons par substitution en généralisant ce qui a été établi au n° **163.**

De (1) l'on tire $\boxed{x = -y - 2z + 4}$ (4)

que l'on porte dans (2) et (3), obtenant :

$$\begin{cases} -3y - z = -2 & (5) \\ -4y + 2z = 3 & (6) \end{cases}$$

De (5) l'on tire : $\boxed{z = -3y + 2}$ (7)

que l'on porte dans (6) : $10y = 1.$ (8)

En remontant, par (7), qu'il convient de ne pas perdre de vue et que nous avons encadrée à cet effet, on obtient : $z = \dfrac{17}{10}.$

Enfin par (4) on a : $x = \frac{1}{2}.$

Solution : $x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{10}, \quad z = \frac{17}{10}.$

Autre exemple. Soit à résoudre :

$$\exists (x, y, z)? \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 & (1) \\ 2x + 5y - z = 10 & (2) \\ 3x + 3y + 2z = 2. & (3) \end{cases}$$

On remarque qu'en ajoutant les deux premières membre à membre, on obtient :

$$3x + 3y + 2z = 19. \qquad (4)$$

En comparant à (3), on constate l'impossibilité du système.

Autre exemple. Soit à résoudre :

$$\exists (x, y, z)? \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 & (1) \\ 2x - 3y + z = -1 & (2) \\ 5x - 11y = -17 & (3) \end{cases}$$

Procédant par substitution, on tire de (2)

$$\boxed{z = -2x + 3y - 1} \qquad (4)$$

que l'on porte dans (1) et l'on obtient : $-5x + 11y = 17.$

On retrouve (3). Il y a donc indétermination. Les solutions sont :

$$x = \frac{-17 + 11\lambda}{5}, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{29 - 7\lambda}{5}.$$

171. Quelques cas particuliers. — 1° *Les inconnues sont proportionnelles à des nombres donnés.*

Ex. : $x \in \mathrm{R},\ y \in \mathrm{R},\ z \in \mathrm{R} \quad \exists (x, y, z)? \quad \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \\ 3x - 5y + 6z = 16 \end{cases}$ (S)

On prend pour inconnue auxiliaire la valeur commune des rapports :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = t \iff x = 3t,\ y = 5t,\ z = 4t.$$

En portant ces valeurs dans la dernière équation on obtient :

$$\exists t? \quad 9t - 25t + 24t = 16. \quad \text{Réponse : } t = 2.$$

D'où : $x = 6, \quad y = 10, \quad z = 8.$

2° *Il existe une symétrie entre les* ***équations.***

$$\exists\,(x, y, z)?\quad \begin{cases} x + y - z = c & (1) \\ y + z - x = a & (2) \\ x + z - y = b & (3) \end{cases} \quad (S)$$

On passe d'une équation à une autre par une loi que nous présentons sous une forme géométrique.

Imaginons 3 roues portant aux trois sommets d'un triangle équilatéral les numéros (1), (2) et (3); les lettres a, b, et c; les lettres x, y et z. (*Fig. 95*).

Si l'on fait tourner la première roue de $\frac{1}{3}$ de tour dans un certain sens (1) vient en l'ancien (2), (2) en l'ancien (3), (3) en l'ancien (1). La même opération produit des changements analogues sur les autres roues.

Cette opération que l'on appelle une *permutation circulaire*, change l'équation (1) en l'équation (2), l'équation (2) en l'équation(3), l'équation (3) en l'équation (1).

On aurait pu d'ailleurs tourner en sens inverse.

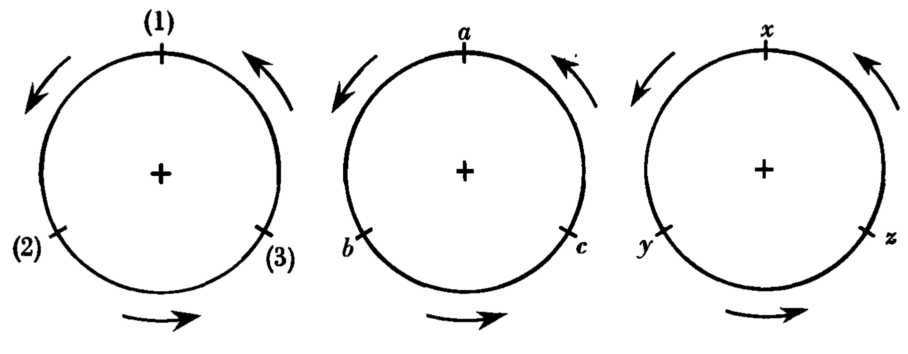


FIG. 95.

En additionnant membre à membre on obtient :

$$x + y + z = a + b + c \qquad (4)$$

d'où :

$$x + (y + z) = a + b + c \qquad (4\ bis)$$

et, en tenant compte de (2) :

$$x + (x + a) = a + b + c,$$

$$x = \frac{b + c}{2}$$

et, par permutation circulaire :

$$y = \frac{c + a}{2}$$

$$z = \frac{a + b}{2}.$$

Exercices. *Pour quelle valeur de m les systèmes suivants sont-ils compatibles?*

$\exists(x; y)?$ **1142.** $x + 3y = 7; \quad 4x - y = 5; \quad x + my = 4.$

1143. $2x + 3y = 5; \quad 7x - 2y = 5; \quad (m+3)x - my = 3.$

1144. — Quels sont les nombres entiers compris entre 10 et 20 qui vérifient l'équation : $3x - 5y = 0?$

1145. — Trouver les nombres entiers, compris entre 0 et 20, qui vérifient l'équation : $3x - 5y = 4.$ (1)

1146. — Trouver les nombres entiers, compris entre 20 et 60, qui vérifient le système :

$$\exists(x, y, z)? \quad \begin{cases} 3x - 5y + 4z = 0. \\ x + 3y - 5z = 0. \end{cases}$$

1147. — Pour quelle valeur de m le système :

$$\exists(x, y, z)? \quad \begin{matrix} x + 3y - 2z = 5. \\ 5x + 15y - 10z = m. \end{matrix}$$

est-il impossible? Quand ce système n'est pas impossible, à combien d'inconnues peut-on donner des valeurs arbitraires?

Résoudre les systèmes : $\exists(x, y, z)?$

1148. $\begin{cases} x + 5y - 3z = 36 \\ 2x + y + 4z = 39 \\ 5x - y - z = 40. \end{cases}$

1149. $\begin{cases} 8x - 3y - 2z = 107 \\ 5x + y - 3z = 52 \\ x - 4y + 2z = 32. \end{cases}$

1150. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{-6} \\ 4x + 3y - 2z = 245. \end{cases}$

1151. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{7} \\ 4x - y - z = 3. \end{cases}$

1152. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{z} = 17 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 7 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} + \dfrac{3}{z} = 1. \end{cases}$

1153. $\begin{cases} x - 2y = 13 \\ 5x - 3z = 74 \\ 7x + 3y - 2z = 159. \end{cases}$

1154. — Montrer que le système :
$\exists(x, y, z)? \quad 5x - 6y + z = 0; \quad 7x + y - 3z = 0; \quad 3x - 13y + 5z = 0$
admet des solutions proportionnelles à trois nombres entiers. Quelles sont les solutions comprises entre 100 et 500?

1155. — On donne l'expression algébrique :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Déterminer a, b et c pour que y prenne les valeurs :

$$+1, \quad +6, \quad -3,$$

quand on donne à x les valeurs :

$$-1, \quad +2, \quad +3.$$

1156. — On donne l'expression algébrique :

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Déterminer a, b, a', b' pour que y prenne les valeurs :

$$\frac{1}{2}, \quad 4, \quad 1,$$

quand on donne à x les valeurs :

$$1, \quad -1, \quad 2,$$

a, b, a', b' étant les nombres entiers les plus simples. **Exercices.**

PROBLÈMES

1157. — **Résoudre le système :**

$$\exists (x, y, z)? \quad \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ x + y + 3z = 9. \end{cases}$$

1158. — **Résoudre le système :**

$$\exists (x, y, z)? \quad \begin{cases} 8x + 4y + 2z + 1 = 0 \\ 27x + 9y + 3z + 1 = 0 \\ 125x + 25y + 5z + 1 = 0. \end{cases}$$

Résoudre et, le cas échéant, discuter les systèmes suivants : $\exists (x, y, z)$?

1159. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ 5x + 2y - 3z = 20 \\ 7x - y + z = 33. \end{cases}$

1160. $\begin{cases} bz - cy = m \\ cx - az = n \\ ay - bx = p. \end{cases}$

1161. $\begin{cases} xy = (x + y) \\ xz = 2(x + z) \\ yz = 3(y + z). \end{cases}$

1162. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{6}{y} + \frac{2}{z} = 6. \end{cases}$

1163. $\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = m. \end{cases}$

1164. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4 \\ 9x - 6y + 15z = 12 \\ 15x - 10y + 25z = 20. \end{cases}$

1165. $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 3x + y + 2z = c. \end{cases}$

1166. $\begin{cases} (y + z)(z + x) = 16 \\ (z + x)(x + y) = 32 \\ (x + y)(y + z) = 8. \end{cases}$

1167. $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \\ x + 2y + 3z = m. \end{cases}$

1168. $\begin{cases} 4x - 9y = 2. \\ 5x + 3y = 31. \end{cases}$

En déduire la résolution des systèmes :

$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = 2 \\ \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 31. \end{cases} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} 4\sqrt{x+3} - 9\sqrt{y+1} = 2. \\ 5\sqrt{x+3} + 3\sqrt{y+1} = 31. \end{cases}$$

Déterminer les cas d'impossibilité des systèmes : $\exists (x, y, z)$?

1169. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ mx + 4y + 9z = m. \end{cases}$

1170. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - mz = 0. \end{cases}$

1171. $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ mx + (m-1)y + (m-2)z = m. \end{cases}$

1172. $\begin{cases} 3x + 4y + mz = 1 \\ 4x + my + 3z = 2 \\ mx + 3y + 4z = 3. \end{cases}$

1173. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$

1174. — *Déterminer la condition de compatibilité du système :*

$$\exists (x_1, x_2, x_3, x_4)? \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = m_1 m_2 \\ x_1 + x_3 = m_1 m_3 \\ x_1 + x_4 = m_1 m_4 \\ x_2 + x_3 = m_2 m_3 \\ x_2 + x_4 = m_2 m_4 \\ x_3 + x_4 = m_3 m_4. \end{cases}$$

1175. — **Les coefficients a, b, c, a', b', c' d'un système :**

$$\exists (x, y)? \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ne sont connus que par des encadrements :

$2{,}3 < a < 2{,}4; \quad 3{,}5 < b < 3{,}6; \quad 8{,}2 < c < 8{,}3$
$1{,}6 < a' < 1{,}7; \quad 1{,}8 < b' < 1{,}9; \quad 7{,}1 < c' < 7{,}2.$

Encadrer les valeurs de x et y, (x, y) étant la solution du système.

Déterminer m pour que les systèmes suivants admettent d'autres solutions que la solution $(0, 0, 0)$:

1176. $\exists (x, y, z)? \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \\ mx + y + 2z = 0. \end{cases}$

1177. $\exists (x, y, z)? \quad \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ mx + 3y + 5z = 0 \\ x + 8y + 11z = 0. \end{cases}$

LIVRE V

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

■

CHAPITRE XIII

LE PLAN ET LA DROITE DANS L'ESPACE

I. POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS

172. Notions générales sur le plan. — Soit trois points A, B, C non alignés et distincts, soit M un point fixe de l'intervalle BC (segment BC privé de ses extrémités), P un point variable parcourant l'intervalle AB, Q un point variable parcourant l'intervalle AC.

Nous appelons *faisceau* des droites de sommet M l'ensemble des droites :

$$\begin{matrix} P \in AB \\ Q \in AC \end{matrix} \ \forall P,\ \forall Q : BC, MP, MA, MQ$$ (*Fig. 96*).

Le plan (ABC) est, par définition, l'ensemble des points des droites du faisceau de sommet M. On convient d'imposer à cet ensemble l'axiome suivant :

▶ AXIOME. — **Si deux points appartiennent à un plan, tout point de la droite définie par ces deux points appartient au plan.**

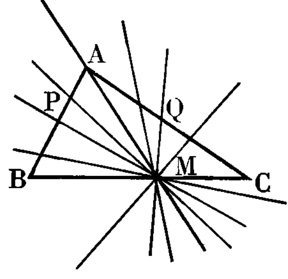


FIG. 96.

On démontre et nous admettrons que l'ensemble défini ne dépend pas de la position du point M sur BC, et par suite :

Trois points A, B, C non alignés définissent un plan et un seul.

173. Détermination du plan. — Il résulte de la définition qu'un plan est déterminé :

1. **par trois points distincts non alignés,**
2. **par une droite et un point non situé sur cette droite,**
3. **par deux droites concourantes.**

Nous désignerons un plan par une minuscule grecque entre parenthèses (α), (β), ..., (π); ou par une majuscule latine entre parenthèses : (P), (Q), (R) ...; ou encore par une notation rappelant la façon dont il est défini :

(ABC), plan défini par trois points;
(O, d), plan défini par le point O et la droite (d);
(d, d'), plan défini par les deux droites concourantes (d) et (d').

On convient, en géométrie dans l'espace, de figurer un plan par un parallélogramme (*Fig. 97*). Une lettre placée dans un coin permettra de désigner le plan. Il s'agit là d'une simple convention le plan étant illimité. Pour alléger une figure, on n'indique parfois que deux ou trois côtés du parallélogramme.

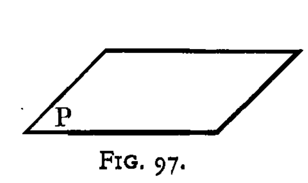


FIG. 97.

REMARQUE. — Soit une droite (d) et un point O non situé sur (d). Le point et la droite déterminent un plan (α) : dans ce plan (α), il résulte de l'axiome d'Euclide que le faisceau de sommet O, qui contient toutes les droites du plan passant par O, est formé :

1° de toutes les droites passant par O et rencontrant (d);
2° de la parallèle tracée par O à (d) dans le plan (d).

174. Demi-espaces limités par un plan. — Soit un plan (π), nous admettrons qu'il sépare l'espace en deux demi-espaces E_1 et E_2 tels que :

— si A et B appartiennent à E_1, tout point du segment AB appartient à E_1.

— si $A \in E_1$ et $B \in E_2$, il existe un point du segment AB et un seul qui appartient au plan (π).

175. Positions relatives de deux droites de l'espace. — Soit deux droites (a) et (b) et M un point quelconque de (b).

Si $M \in (a)$, les droites (a) et (b) sont :
— ou bien concourantes et alors elles déterminent un plan;
— ou bien confondues.

Si $M \notin (a)$, soit (α) le plan défini par la droite (a) et le point M. On a les différents cas suivants :

1. $(b) \in (\alpha)$. Les droites (a) et (b) sont dites coplanaires. Dans le plan (α) les deux droites peuvent être concourantes ou parallèles (*Fig. 98* et *99*).

2. $(b) \notin (\alpha)$. Le point M est alors le seul point de (b) appartenant à (α). Les droites (a) et (b) n'ont alors aucun point commun car, si elles en avaient

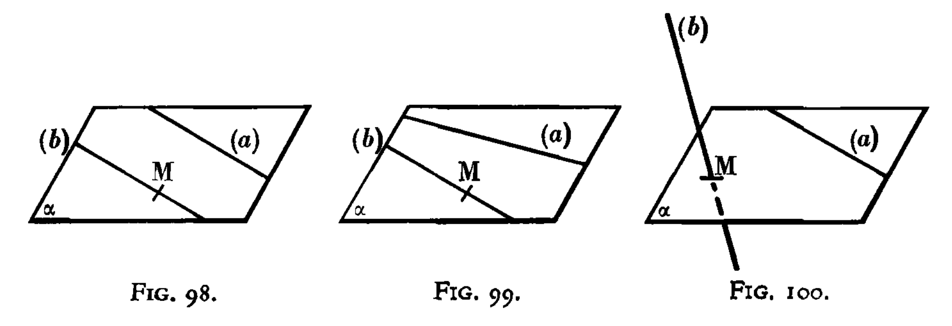


FIG. 98. FIG. 99. FIG. 100.

un, ce point appartiendrait à (b) et (α). Donc (b) serait contenue dans (α) (*Fig. 100*). Nous pouvons résumer :

- **Si deux droites de l'espace ont :**
  — deux points communs au moins : elles sont confondues;
  — un point commun et un seul : elles sont coplanaires et concourantes;
  — aucun point commun, si elles sont coplanaires elles sont par définition parallèles; si elles ne sont pas dans un même plan nous les dirons non-coplanaires.

176. Positions relatives d'une droite et d'un plan. — Soit une droite (d) et un plan (α). Si au moins deux points de (d) appartiennent à (α), nous savons que tout point de (d) appartient à (α). On dit que la droite (d) est contenue dans le plan (α) ou qu'elle appartient au plan.

Si un point A de (d) et un seul appartient à (α), la droite (d) est sécante au plan (α) ce qu'on exprime encore en disant :

— la droite (d) coupe le plan en A;
— le plan (α) coupe la droite (d) en A.

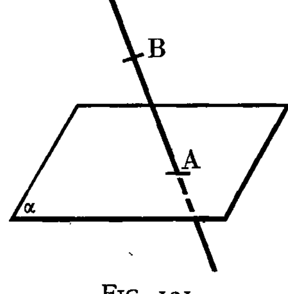


FIG. 101.

Le point A est dit :

— ou bien le point d'intersection de la droite et du plan;
— ou bien le point commun à la droite et au plan;
— ou bien la trace de la droite sur le plan.

Il existe de telles droites : soit en effet (α) quelconque et $A \in (\alpha)$, $B \notin (\alpha)$. La droite AB est sécante au plan (*Fig. 101*).

Montrons enfin qu'il existe des droites n'ayant aucun point commun avec un plan donné. Soit (*Fig. 102*) un plan (α), un point $A \notin (\alpha)$ et une droite $(b) \in (\alpha)$. Le point A et la droite (b) déterminent un plan (β). Traçons dans (β) la parallèle de A à (b), soit (a). Les plans (α) et (β) sont distincts $[A \in (\beta), A \notin (\alpha)]$. La droite (b) appartient aux deux plans (α), et (β). Ces deux plans n'ont pas de point commun en dehors de (b) sinon ils seraient confondus. Si (a) avait un point commun avec (α), ce point appartiendrait à (b) ce qui est contradictoire avec l'hypothèse : (a) et (b) sont parallèles. Il en résulte que (a) et (α) n'ont aucun point commun. Nous dirons que la droite (a) est parallèle au plan (α) ou que (α) est parallèle à (a). Résumons :

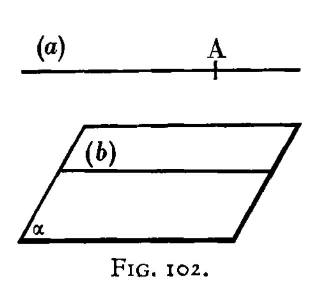


FIG. 102.

- **Si une droite et un plan ont :**
  — deux points communs : la droite est dans le plan;
  — un point commun : la droite coupe le plan;
  — aucun point commun : la droite est parallèle au plan.

177. Positions relatives de deux plans. Intersection de deux plans. — Soit (P) et (Q) ces deux plans.

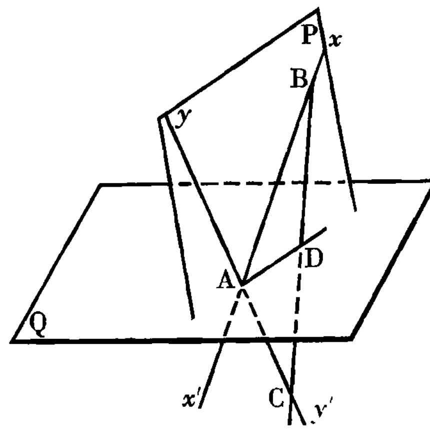


FIG. 103.

1° Si (P) et (Q) ont au moins trois points communs non alignés, ils sont confondus par définition.

2° Si (P) et (Q) ont deux points communs A et B, ils ont en commun la droite AB. Ils n'ont pas d'autre point commun en dehors de cette droite sinon ils seraient confondus.

Nous dirons qu'ils sont ***sécants*** ou concourants, la droite AB étant leur droite d'**intersection.**

3° Soit deux plans distincts (P) et (Q) qui ont, en commun, le point A (*Fig. 103*). Par A, traçons dans (P) une droite quelconque xAx'.

Si cette droite appartient à (Q), les deux plans ont une droite commune; sinon A partage la droite en deux demi-droites Ax et Ax' situées de part et d'autre de (Q). En opérant de même avec une autre droite yAy' de (P) — en supposant qu'elle n'appartienne pas à (Q) — on obtient encore deux demi-droites Ay et Ay' situées de part et d'autre de (Q). Supposons Ax et Ay dans le même demi-espace; Ax', Ay' dans l'autre.

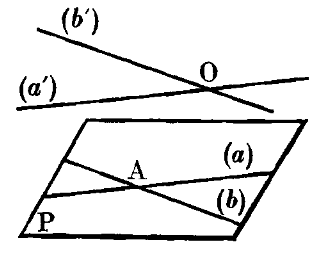


FIG. 104.

En joignant un point B de Ax à un point C de Ay', on obtient une droite BC appartenant à (P) et, comme B et C sont de part et d'autre de (Q), la droite BC perce (Q) en un point D distinct de A, sans quoi B, A, C seraient alignés.

Les plans (P) et (Q) ont en commun A et D; ils sont sécants.

4° Si (P) et (Q) n'ont aucun point commun, nous dirons par définition qu'ils sont **parallèles.** De tels plans existent, soit en effet un plan (P) et un point $O \notin (P)$, deux droites (a) et (b) dans (P) concourantes en A. Dans le plan (O, a), soit (a') parallèle à (a), (*Fig. 104*), dans le plan (O, b), soit (b') parallèle à (b).

Les deux droites (a') et (b') sont distinctes, car si elles étaient confondues les droites (a) et (b) parallèles à la même droite et ayant un point commun A, seraient confondues. Les droites (a') et (b') distinctes et concourantes déterminent un plan (Q).

Si (P) et (Q) avaient au moins un point commun, ils auraient au moins une droite commune (d). Cette droite (d) dans (Q) ne peut être parallèle à la fois à (a') et (b') (Axiome d'Euclide), donc (d) coupe par exemple (a') en I.

Mais : $\quad I \in (d) \implies I \in (P) \implies (a')$ sécante à (P).

Ceci est une contradiction puisque (n° 176) la droite (a') est parallèle à (P). Les plans (P) et (Q) n'ont donc aucun point commun.

- **Si deux plans (P) et (Q) ont :**
  - **— au moins trois points communs non alignés, ils sont confondus :**
  - **— deux, ou un point commun : ils sont sécants;**
  - **— aucun point commun : ils sont parallèles.**

Exercices. NOTA. — Dans tous les problèmes de constructions dans l'espace il n'est pas question, pour l'instant, de construire les résultats comme en géométrie plane. Nous supposerons que :
— un plan est déterminé comme il est dit au n° 173;
— l'on sait prendre l'intersection d'une droite et d'un plan ou de deux plans;
— l'on sait faire, dans un plan donné d'une façon quelconque, les constructions connues de la géométrie plane.
Cette convention se traduira par des tracés faits, en perspective cavalière sur les figures dessinées le plus clairement possible.

1178. — Démontrer qu'il existe une droite passant par un point donné et rencontrant deux droites données. Le problème peut-il être indéterminé? Étudier le cas où les deux droites données sont concourantes.

1179. — Trois droites données ne sont pas dans un même plan. Démontrer qu'il y a une infinité de droites qui les rencontrent et que deux droites répondant à la question ne sont pas dans un même plan.
Étudier le cas où deux des trois droites données sont concourantes ou parallèles et le cas où les trois droites sont concourantes.

1180. — On donne un cercle et deux droites non situées dans son plan. Peut-on construire des droites qui rencontrent le cercle et les deux droites?

1181. — Deux droites (D) et (Δ) dans un même plan se coupent en un point inaccessible O. Soit A un point non situé dans leur plan. Construire la droite AO.

1182. — On donne quatre points ABCD. Combien y a-t-il de plans passant par deux d'entre eux et le milieu du segment joignant les deux autres?

1183. — On donne deux points fixes A et B et une droite fixe (D) sur laquelle se déplace un point C. Déterminer quand C varie :
1° l'ensemble des médianes du triangle ABC;
2° l'ensemble des points de rencontre de ces médianes.

1184. — Étant donné deux droites (D) et (D′) non dans un même plan, deux points A et B sur (D), deux points A′ et B′ sur (D′), démontrer que les droites AA′ et BB′ ne sont pas dans un même plan.

1185. — Soit trois demi-droites Ox, Oy, Oz non coplanaires. On prend A et A′ sur Ox, B et B′ sur Oy, C et C′ sur Oz. On suppose que ces points sont choisis de façon que BC et B′C′ se coupent en I, CA et C′A′ en J, AB et A′B′ en K. Montrer que I, J, K sont alignés sur la droite d'intersection des plans ABC et A′B′C′. Faire une figure claire.

1186. — Soit trois droites concourantes en O, non coplanaires, (a), (b) et (c). Soit A un point fixe de (a), B un point fixe de (b). Un point C parcourt (c). Étudier l'intersection du plan ABC avec chacun des plans (a, b), (b, c) et (c, a). Faire une figure claire.

1187. — On donne 4 points distincts A, B, C, D. Étudier et classer les configurations qu'on peut obtenir. Faire les figures correspondantes.

1188. — On décide d'enlever un point à tout plan de l'espace. Les points enlevés forment un ensemble (L). L'ensemble (L) peut-il être une droite?

1189. — Étudier l'ensemble (E) des points tels que tout point de la droite qui joint deux points de l'ensemble appartient à l'ensemble. On démontrera que cet ensemble est constitué :

— soit par les points d'une droite,
— soit par les points d'un plan,
— soit par tout l'espace.

1190. — Quatre droites sont telles que deux quelconques d'entre elles se coupent. Que peut-on dire de ces droites?

1191. — Soit deux plans (P) et (Q) qui se coupent. Dans (P) on trace un cercle (C) sur lequel on marque deux points A et B. Dans (Q) on trace un cercle (C′) sur lequel on marque un point A′. Trouver un point B′ de (C′) tel que les droites AA′ et BB′ soient concourantes.

1192. — Soit deux droites (D) et (D′) quelconques de l'espace, un point A de (D) et un point A′ de (D′). Déterminer l'intersection du plan défini par (D) et A′ et du plan défini par (D′) et A.

1193. — Étant donné un quadrilatère gauche ABCD (quadrilatère dont les quatre côtés ne sont pas dans un même plan), on prend trois points M, N, P respectivement sur AB, BC et CD et l'on suppose que la droite MN coupe AC. Construire l'intersection Q de AD avec le plan MNP et démontrer que les droites MN, PQ et AC sont concourantes.

1194. — Deux cercles (C) et (C′) non situés dans un même plan ont en commun les points A et B. On considère sur (C) deux points M et N tels que MN coupe AB et sur (C′) deux points M′ et N′ tels que les droites MM′ et NN′ soient concourantes. Démontrer que les droites MN, M′N′ et AB sont concourantes.

1195. — On donne deux droites concourantes Ox et Oy, une droite (D) perce leur plan en A. Un point M décrit (D). Quel est l'ensemble des droites d'intersection des plans MOx et MOy?

1196. — On donne un quadrilatère plan ABCD et un point O hors de son plan. On joint OA, OB, OC, OD. Combien ces droites déterminent-elles de plans en les associant deux à deux? Déterminer les droites d'intersection de ces plans pris deux à deux. En quels points ces droites percent-elles le plan du quadrilatère? **Exercices.**

II. DROITES PARALLÈLES

178. Définition. Axiome d'Euclide. — Rappelons la définition suivante : **On dit que deux droites sont parallèles pour exprimer : 1° qu'elles sont dans un même plan; 2° que dans ce plan elles n'ont aucun point commun.**

Soit alors une droite (d) et un point O non situé sur (d). Le point O et la droite (d) déterminent un plan (P) et un seul. Dans ce plan il résulte de l'axiome d'Euclide qu'il existe une droite (d'), et une seule, passant par O et parallèle à (d).

Nous constatons ainsi que cette conséquence de l'axiome d'Euclide est valable pour le parallélisme des droites de l'espace, soit :

▶ **Par tout point non situé sur une droite, il passe une droite parallèle à cette droite et une seule.**

Notons que, par conséquent, on peut *définir un plan par deux droites parallèles.*

179. Théorème fondamental I. — Soit (D) et (D′) deux droites parallèles, (Q) leur plan, et (P) un plan qui coupe (D) en A (*Fig. 105*).

1° *Ce plan* (P) *est distinct de* (Q) puisque la droite (D) du plan (Q) n'est pas dans (P).

2° *Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite* (Δ) puisqu'ils ont en commun le point A. La droite (Δ) passe par A.

3° *La droite* (Δ) *rencontre (D′)* en A′ puisque, dans le plan (Q), la droite (Δ), rencontrant (D), rencontre aussi toute parallèle à (D). Le point A′ est commun à la droite (D′) et au plan (P).

4° A′ *est le seul point commun à (D′) et (P)*, puisque (P) et (Q) n'ont pas de points communs en dehors de (Δ). Le plan (P) coupe donc (D′) en A′. Nous énoncerons :

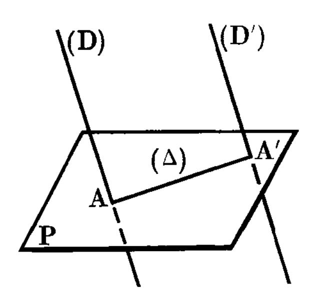


FIG. 105.

▪ THÉORÈME. — **Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.**

180. Application. — Soit (D) et (D′) deux droites distinctes parallèles à la droite (Δ) (*Fig. 106*).

1° *(D) et (D′) n'ont pas de point commun*, sans quoi, de ce point, on pourrait mener deux parallèles à (Δ). Cela ne suffit pas pour conclure que (D) et (D′) sont parallèles, il faut encore démontrer qu'elles sont dans un même plan.

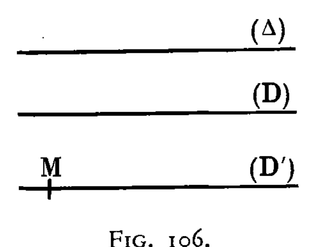


FIG. 106.

2° *(D) et (D′) sont dans un même plan.* En effet, considérons le plan (P) déterminé par (D) et un point M de (D′). Si ce plan ne contenait pas (D′), il la couperait en M; il couperait aussi sa parallèle (Δ); coupant (Δ), il couperait sa parallèle (D), ce qui est contraire à l'hypothèse puisque (P) contient (D). L'ensemble de ces deux résultats permet d'énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.**

Exercices. 1197. — Étudier les positions relatives de trois droites de l'espace. Faire les figures.

1198. — Soit (*a*), (*b*), (*c*) trois droites parallèles et distinctes; A un point fixe de (*a*), B un point fixe de (*b*) et C un point variable de (*c*). Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles ABC?
Même question avec B, C variables; avec A, B, C variables.

1199. — Soit trois droites parallèles (D_1), (D_2), $D_3)$. Soit A et A′ deux points de (D_1), B et B′ deux points de (D_2), C et C′ deux points de (D_3). Les droites AB et A′B′ se coupent en M, BC et B′C′ en N, CA et C′A′ en P. Étudier la disposition des points M, N, P.

1200. — Construire une droite rencontrant deux droites parallèles données et deux droites quelconques.

1201. — Soit un quadrilatère gauche ABCD et M, N, P, Q les milieux respectifs de AB, BC, CD, DA. Étudier le quadrilatère MNPQ. Que peut-on dire des segments qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrilatère ABCD?

Exercices.

III. DROITES ET PLANS PARALLÈLES

181. Définition.

☆ **On dit qu'un plan (π) est parallèle à une droite (d) pour exprimer que ce plan et cette droite n'ont aucun point commun. On dit aussi bien que la droite (d) est parallèle au plan (π).**

Soit (D) et (D') parallèles, un plan passant par (D) est le plan (D, D'). Soit (π) un plan quelconque passant par (D) et distinct de (D, D'). Si le plan (π) coupait (D'), il couperait sa parallèle (D), ce qui contredit l'hypothèse; donc (π) n'ayant aucun point commun avec (D') lui est parallèle.

▪ THÉORÈME I. — **Si deux droites sont parallèles, tout plan passant par l'une et ne contenant pas l'autre est parallèle à cette dernière.**

Soit alors deux droites (a) et (b) non coplanaires (*Fig. 107*). Soit O un point de (a) et (b') la parallèle à (b) et passant par O. Parmi tous les plans qui passent par (a) distinguons d'abord le plan défini par (a) et (b'), il est parallèle à (b). Tout autre plan passant par (a) coupe (b') donc coupe (b) en un point M.

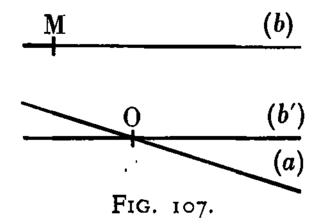


FIG. 107.

Le faisceau de plans d'arête (a) est l'ensemble des plans qui passent par (a); il comprend :

1° tous les plans (a, M), M étant un point quelconque de (b);

2° le plan passant par (a) et parallèle à (b).

Nous avons vu (nº 176) que, un plan étant donné, toute droite parallèle à une droite du plan et non située dans le plan est parallèle au plan. Nous devons chercher si les parallèles ainsi obtenues sont les seules.

182. Théorème fondamental II.

— Soit (*Fig. 108*) une droite (d) parallèle au plan (π). Soit O un point quelconque de (π); ce point n'est pas sur (d) donc détermine le plan (O, d).

Les plans (π) et (O, d) sont distincts [$(d) \in (O, d)$; $(d) \notin (\pi)$], ils ont en commun le point O, ils sont sécants suivant une droite (d'). Les droites (d) et (d') ne peuvent avoir de point commun car un tel point appartiendrait à (d) et (π) ce qui est impossible.

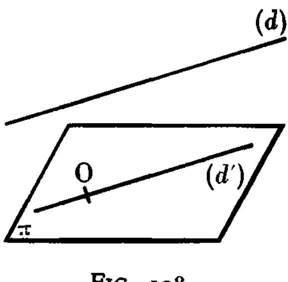


FIG. 108.

▪ THÉORÈME II. — **Si une droite (d) est parallèle à un plan (π), tout plan passant par (d) qui coupe (π) le coupe suivant une parallèle à (d).**

Il en résulte que si une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle à une infinité de droites du plan.

183. Conséquences. — 1. Dans la démonstration du théorème fondamental, la droite (d') passant par O, est la seule parallèle à (d) passant par O, donc :

- **Si une droite est parallèle à un plan, la parallèle à cette droite tracée par un point du plan est contenue dans le plan.**

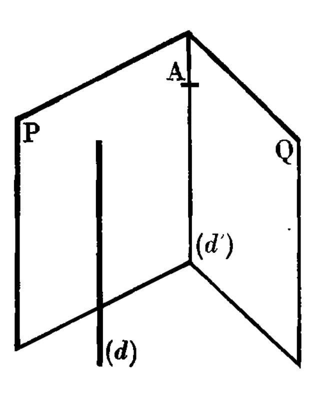


FIG. 109.

2. Soit deux plans distincts (P) et (Q) ayant un point commun A (*Fig. 109*) et tous les deux parallèles à la même droite (d). Traçons (d') passant par A et parallèle à (d); d'après la conséquence 1 qui précède, (d') est dans (P) et dans (Q); donc :

- **Si deux plans sécants sont parallèles à une droite, leur intersection est parallèle à cette droite.**

3. Soit une droite (d) et un point A non situé sur (d), si un plan passe par A et est parallèle à (d) il contient la droite (d') tracée par A parallèle à (d) (conséquence 1) (*Fig. 110*).

Réciproquement (théorème d'existence n° 176) tout plan passant par (d') et ne contenant pas (d) est parallèle par (d).

- **L'ensemble des plans passant par un point A et parallèles à une droite (d) est le faisceau dont l'arête (d') passe par A et est parallèle à (d), moins le plan (d, d').**

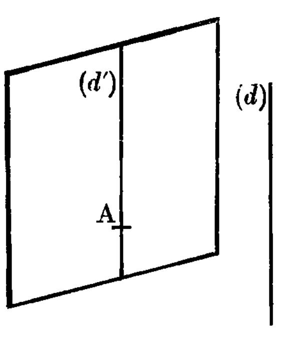


FIG. 110.

4. Soit une droite (d) et une droite (δ); s'il existe un plan passant par (d) parallèle à (δ), ce plan contient la parallèle (δ') à (δ) et passant par un point A quelconque de (d) (*Fig. 111*).

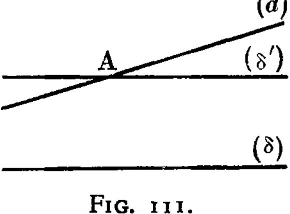


FIG. 111.

Ce plan est déterminé si (d) et (δ') ne sont pas confondues, c'est-à-dire si (d) et (δ) ne sont pas parallèles; ce plan répond à la question s'il ne contient pas (δ) c'est-à-dire si (d) et (δ) sont non coplanaires.

- **Si deux droites sont non coplanaires, il existe un plan, passant par chacune d'elles, parallèle à l'autre.**

5. Soit deux droites (d) et (d') non parallèles et un point A. S'il existe un plan passant par A, parallèle à (d) et à (d'), ce plan contient :

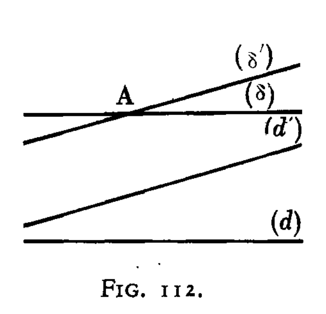


FIG. 112.

(δ) parallèle à (d) passant par A (*Fig. 112*);
(δ') parallèle à (d') passant par A.

Il est déterminé puisque (d) et (d') n'étant pas parallèles, (δ) et (δ') sont distinctes; il répond à la question s'il ne contient ni (d) ni (d').

▪ **Il existe en général un plan passant par un point parallèle à deux droites données non parallèles.**

Exercices. 1202. — Quel est l'ensemble des droites rencontrant une droite donnée et parallèles à une droite donnée distincte de la première?

1203. — Construire par un point une droite parallèle à deux plans.

1204. — 1° Démontrer que, par un point, on peut mener une infinité de plans qui coupent deux plans donnés suivant deux droites parallèles. 2° Par un point, peut-on mener un plan qui coupe trois plans donnés suivant trois droites parallèles?

1205. — Déterminer par une droite, un plan qui coupe deux plans donnés suivant deux droites parallèles.

1206. — Démontrer que, si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est, en général, parallèle à l'autre. Cas d'exception.

1207. — Par un point donné A tracer une droite parallèle à un plan (P) et rencontrant une droite (D) qui perce le plan (P).

1208. — On considère trois droites parallèles (D_1), (D_2), (D_3) et un point O. Quelle particularité présentent les plans définis respectivement par O et par chacune des droites (D_1), (D_2), (D_3)?

1209. — Dans un plan (P) on trace deux droites parallèles (d) et (d'). Quelle particularité présente l'intersection de deux plans passant l'un par (d), l'autre par (d')? **Exercices.**

IV. PLANS PARALLÈLES

184. Définition.

☆ **On dit que deux plans (P) et (Q) sont parallèles pour exprimer qu'ils n'ont aucun point commun.**

Nous avons vu (n° 117, 4) qu'il existe de tels plans et nous avons démontré que si deux plans sont tels que l'un contient deux droites concourantes parallèles à l'autre, ces deux plans sont parallèles.

Soit deux plans parallèles (P) et (Q). Si (d) est une droite quelconque de (P), (d) n'a aucun point commun avec (Q), sans quoi (P) et (Q) ne seraient pas parallèles. Nous énoncerons :

185. Théorème III.

▪ **Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.**

L'ensemble du théorème d'existence et du théorème III nous montre que le parallélisme de deux plans est caractérisé par le fait que l'un contient *deux* droites concourantes parallèles à l'autre.

186. Conséquences. — 1. Soit un plan (α) et un point O non situé dans (α) (*Fig. 113*). Traçons dans (α) deux droites concourantes (*a*) et (*b*) et par O les parallèles (*a'*) et (*b'*) à ces deux droites. On détermine ainsi un plan (α') (nº 177) parallèle à (α).

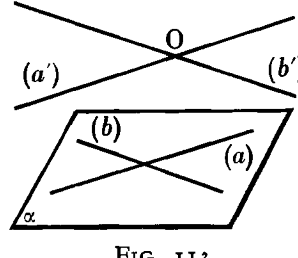


FIG. 113.

Si un second plan (α″) passant par O est parallèle à (α) il en résulte :

la droite (*a*) appartient à (α) donc est parallèle à (α″) (Théorème III);

le plan (α″) parallèle à (*a*), contient (*a'*) parallèle à (*a*) passant par O (nº 183, 1).

De même (α″) contient (*b'*) et par suite (α″) et (α') sont confondus.

▪ THÉORÈME IV. — **Par un point extérieur à un plan, on peut construire un plan et un seul parallèle à ce plan.**

Ce théorème important joue pour les plans de l'espace, le même rôle que l'axiome d'Euclide pour les droites d'un plan. L'axiome d'Euclide intervient d'ailleurs dans sa démonstration. Il en résulte les conséquences suivantes.

2. Soit (α) parallèle à (β) et (α') distinct de (α) parallèle à (β). Les plans (α) et (α') n'ont aucun point commun, sans quoi on aurait deux plans parallèles à (β) et passant par ce point.

▪ THÉORÈME. — **Deux plans distincts parallèles à un troisième sont parallèles.**

3. Soit deux plans parallèles (α) et (α') et un plan (β) sécant à (α). Si (β) distinct de (α') était parallèle à (α'), il existerait par un point commun à (α) et (β) deux plans parallèles à (α') : contradiction avec IV, donc :

▪ THÉORÈME. — **Si deux plans sont parallèles tout plan qui coupe l'un coupe l'autre.**

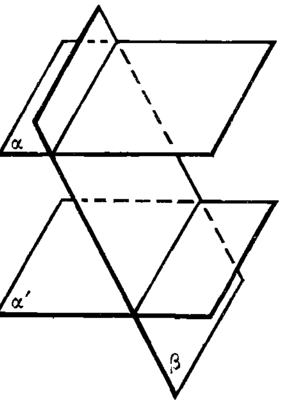


FIG. 114.

Les droites d'intersection sont parallèles : elles sont dans (β) et elles n'ont pas de point commun (*Fig. 114*).

4. Soit (*a*) et (*b*) deux droites non coplanaires; cherchons s'il existe deux plans parallèles l'un (α) passant par (*a*), l'autre (β) passant par (*b*).

(*b*) dans (β) est parallèle à (α), donc (α) doit contenir (*b'*) parallèle à (*b*) passant par le point A de (*a*). Les droites (*a*) et (*b'*) étant distinctes le plan (α) est déterminé par (*a*) et (*b'*). De même (β) est déterminé par (*b*) et la parallèle (*a'*) à (*a*) par un point B de (*b*). D'après le théorème d'existence, les plans (α) et (β) ainsi déterminés sont parallèles.

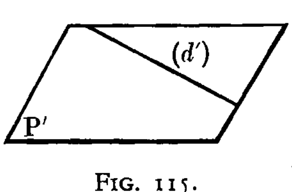


FIG. 115.

■ THÉORÈME. — **Par deux droites non coplanaires on peut faire passer deux plans parallèles.**

On pourra donc pour rendre une figure plus claire représenter deux droites non coplanaires en les traçant dans deux plans parallèles (*Fig. 115*).

187. Ensemble des droites passant par un point et parallèles à un plan. — Soit (π) le plan, O le point non situé dans (π); soit (π') le plan passant par O et parallèle à (π).

1° Toute droite de (π') passant par O est parallèle à (π) d'après *III*.

2° Toute droite passant par O et parallèle à (π) est dans (π'), sinon elle déterminerait avec une droite de (π') passant par O un plan distinct de (π') et parallèle à (π), ce qui est en contradiction avec IV.

■ **L'ensemble des droites passant par un point O et parallèles à un plan (π) est le faisceau de sommet O, déterminant le plan (π') parallèle à (π) et passant par O.**

CONSÉQUENCE. — Soit (π) et (π') deux plans parallèles, si une droite (*d*) coupe (π') en O, cette droite n'appartient pas à l'ensemble des droites passant par O parallèles à (π) donc (*d*) coupe (π).

■ **Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un, coupe l'autre.**

Exercices. 1210. — Construire une droite parallèle à une droite donnée et rencontrant deux droites données. Le problème est-il toujours possible? Peut-il être indéterminé?

1211. — Démontrer qu'il existe une infinité de droites parallèles à un plan donné et qui rencontrent deux droites données quelconques.

1212. — Étudier toutes les dispositions que peuvent présenter trois plans.

1213. — Que peut-on conclure de chacune des hypothèses suivantes : 1° Deux plans sont tels que tout plan qui coupe l'un coupe l'autre; 2° Deux droites sont telles que tout plan qui coupe l'une coupe l'autre; 3° Deux plans sont tels que toute droite qui coupe l'un coupe l'autre?

1214. — Construire une droite passant par un point donné, parallèle à un plan donné et rencontrant un cercle donné dans un plan quelconque.

1215. — Deux tiges de fer AC et BC sont fixées sur un mur en A et B, le point C étant en avant du mur. Un point lumineux S les éclaire. A quel ensemble doit appartenir S pour que les ombres de CA et CB sur le mur soient parallèles?

Exercices.

PROBLÈMES

1216. — Étudier l'ensemble formé par quatre plans. Faire une classification des cas rencontrés. Donner dans chaque cas, le nombre de régions déterminées dans l'espace.

1217. — Construire une droite passant par un point, parallèle à un plan donné, et rencontrant une droite donnée. Discuter.

1218. — On donne un plan (P) et un point O hors du plan. Soit (D) et (D′) deux droites quelconques. A quelle condition les traces sur (P) des deux plans définis par O et (D) et par O et (D′) seront-elles parallèles? Peuvent-elles être confondues?

1219. — Construire une droite parallèle à deux plans donnés et rencontrant deux droites données.

1220. — On donne deux droites (D) et (D′) non situées dans un même plan et un plan (P) qui les coupe respectivement en A et A′. Construire un segment de droite de longueur donnée l, parallèle au plan (P), et dont les extrémités sont sur (D) et sur (D′).

1221. — Démontrer que les plans qui passent par un point fixe et qui coupent deux plans fixes suivant deux droites parallèles passent par une droite fixe.

1222. — On considère un carré ABCD et un point O extérieur à son plan. On joint OA, OB, OC, OD, qui coupent en A′, B′, C′, D′ un plan parallèle au plan du carré. Étudier le quadrilatère A′ B′ C′ D′.

1223. — Étant donné deux droites concourantes OX et OY qui coupent deux plans parallèles (P) et (P′) respectivement en A et A′ pour OX, en B et B′ pour OY. Démontrer que, C étant un point fixe de (P), l'intersection des plans AA′C et BB′C passe par le point fixe O.

1224. — Déterminer deux plans passant respectivement par deux droites données de manière que leur intersection soit parallèle à une droite donnée.

1225. — On donne quatre droites situées dans un plan et un point S non situé dans leur plan. On considère les quatre plans définis par S et chacune des droites. Comment faut-il choisir un plan (P) pour qu'il coupe les quatre plans obtenus suivant les côtés d'un parallélogramme?

1226. 1° Ensemble des milieux des segments parallèles à une droite donnée et limités à un plan et à une parallèle au plan.

2° Ensemble des milieux des segments dont les extrémités décrivent deux plans parallèles.

1227. — Soit un triangle ABC et un point O hors de son plan. On mène par A, par B, par C des droites (D), (D′), (D″) parallèles non situées dans le plan du triangle. Chacune de ces droites définit avec le point O, un plan. Les trois plans obtenus coupent le plan du triangle suivant trois droites. Étudier la disposition de ces droites.

Même question si les droites AD, BD′, CD″, au lieu d'être parallèles, sont concourantes en un point S pris hors du plan du triangle et distinct de O.

1228. — On donne deux plans sécants (P) et (Q) et une droite (D). Par un point M variable sur (D), on construit les plans respectivement parallèles à (P) et (Q). Étudier l'ensemble de leurs droites d'intersection quand M décrit (D).

1229. — Soit deux triangles ABC et MNP dont les plans sont parallèles. Construire l'intersection des plans ABM et CNP.

CHAPITRE XIV

ORTHOGONALITÉ

I. ANGLE DE DEUX DROITES. DROITES ORTHOGONALES

188. Angle de deux droites. — Soit deux droites distinctes de l'espace (a) et (b), et les droites (a') et (b') respectivement parallèles à (a) et (b) et passant par un point O quelconque.

Si (a') et (b') sont confondues, (a) et (b) sont parallèles; nous dirons que l'angle des droites (a) et (b) est nul.

Si (a') et (b') sont distinctes, elles déterminent un plan dans lequel l'angle (aigu ou droit) des droites (a') et (b') est, par définition, l'angle des deux droites de l'espace.

Soit O_1 un point qui n'est situé ni sur (a') ni sur (b') (*Fig. 116*). Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu défini par (a') et (b'). Soit (a'_1) parallèle à (a') et soit O_1x_1 la demi-droite portée par a'_1 située dans le demi-plan d'arête OO_1 contenant Ox; définissons de même O_1y_1.

Fig. 116.

Appelons A et B deux points distincts de O et pris respectivement sur Ox et Oy puis de même A_1 et B_1 sur O_1x_1 et O_1y, tels que :

$$OA = O_1A_1; \qquad OB = O_1B_1.$$

On a :

$$\left.\begin{array}{l} OA = O_1A_1 \\ OA \parallel O_1A_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} OAA_1O_1 \\ \text{parallélogramme} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} AA_1 = OO_1. \\ AA_1 \parallel OO_1. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} OB = O_1B_1 \\ OB \parallel O_1B_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} OBB_1O_1 \\ \text{parallélogramme} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} BB_1 = OO_1. \\ BB_1 \parallel OO_1. \end{array}$$

Il en résulte :

$$\begin{matrix} AA_1 = BB_1 \\ AA_1 // BB_1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} AA_1B_1B \\ \text{parallélogramme} \end{matrix} \Longrightarrow AB = A_1B_1.$$

Les triangles OAB et $O_1A_1B_1$ ayant leurs trois côtés égaux sont égaux, et :

$$\widehat{xOy} = \widehat{x_1O_1y_1}.$$

Si O_1 est par exemple sur (a'), (a'_1) et (a') sont confondues; les propriétés des droites parallèles dans le plan donnent le même résultat :

L'angle de deux droites est indépendant du choix du point O.

Nous en déduisons que l'angle de deux droites ne change pas si on remplace l'une des droites, ou les deux, par des droites parallèles.

En particulier si $\widehat{xOy} = 1$ D, nous dirons que les droites (a) et (b) sont **perpendiculaires.**

On emploie aussi, au lieu du mot **perpendiculaires,** le mot **rectangulaires** ou le mot **orthogonales**[1]. Nous ne ferons aucune différence entre ces trois expressions; dans le cas où nous voudrons préciser que les droites considérées ont un point commun nous le dirons expressément.

Il résulte immédiatement de la notion d'angle de deux droites que :

Si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

189. Problème. — *Ensemble* (E) *des droites passant par un point et orthogonales à une droite donnée.*

Soit O le point donné, (a) la droite donnée, (a') la parallèle à (a), passant par O. Les droites (a) et (a') sont confondues si (a) passe par O).

Existence de droites de l'ensemble. — Soit (α) un plan passant par (a') et, dans ce plan, soit (d) la perpendiculaire en O à (a') (*Fig. 117*). Par définition les droites (a) et (d) sont orthogonales.

Dans tout plan passant par (a') il existe une droite de l'ensemble.

Il en résulte qu'on peut déterminer en particulier deux droites (d) et (d'), distinctes, passant par O, et orthogonales à (a). Ces deux droites (d) et (d') déterminent un plan (P). Ce plan (P) ne contient pas (a'), puisque dans (P) il n'existe pas de droite perpendiculaire à la fois à (d) et à (d').

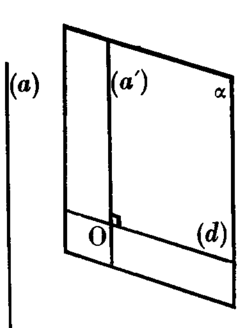


Fig. 117.

Étude des droites (c) du plan, passant par O. — Soit (c) une droite quelconque du plan (P) et passant par O (*Fig. 118*). Sur (d) prenons A et B distincts tels que OA = OB; sur (d') les points A′ et B′ distincts tels que OA′ = OB′. Les diagonales du quadrilatère AB′BA′ se coupant en leur milieu ce quadrilatère est un parallélogramme.

1. Des mots grecs *orthos* signifiant droit et *gonia*, angle.

La droite (c) passant par O, distincte de (d) et (d'), est intérieure à l'un des angles définis par (d) et (d') et coupe donc un des segments AB′ ou AA′.

Supposons que (c) coupe AB′ en M et par suite A′B en M′.

Les triangles OMA et OM′B ont :

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}, \text{ demi-diagonale du parallélogramme;}$$
$$\widehat{\mathrm{MOA}} = \widehat{\mathrm{M'OB}}, \text{ opposés par le sommet;}$$
$$\widehat{\mathrm{MAO}} = \widehat{\mathrm{M'BO}}, \text{ alternes internes } (\mathrm{AB'} /\!/ \mathrm{BA'}).$$

Ils sont égaux et par suite : $\mathrm{AM} = \mathrm{BM'}$; $\mathrm{OM} = \mathrm{OM'}$.

Soit S un point quelconque de (a'), distinct de O; on a :

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{SO} \text{ perpendiculaire à } (d)\\ \mathrm{OA} = \mathrm{OB}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{SA} = \mathrm{SB}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{SO} \text{ perpendiculaire à } (d')\\ \mathrm{OA'} = \mathrm{OB'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{SA'} = \mathrm{SB'}.$$

Les triangles SAB′ et SBA′ ont :

$$\mathrm{SA} = \mathrm{SB}$$
$$\mathrm{SA'} = \mathrm{SB'}$$
$$\mathrm{AB'} = \mathrm{BA'} \text{ (parallélogramme).}$$

Ils sont égaux et : $\widehat{\mathrm{SAM}} = \widehat{\mathrm{SBM'}}$.

Les triangles SAM et SBM′ ont :

$$\mathrm{SA} = \mathrm{SB}$$
$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM'}$$
$$\widehat{\mathrm{SAM}} = \widehat{\mathrm{SBM'}}.$$

Ils sont égaux et $\mathrm{SM} = \mathrm{SM'}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{SM} = \mathrm{SM'}\\ \mathrm{OM} = \mathrm{OM'}\end{array}\right. \Longrightarrow \mathrm{SO} \perp \mathrm{MM'}.$$

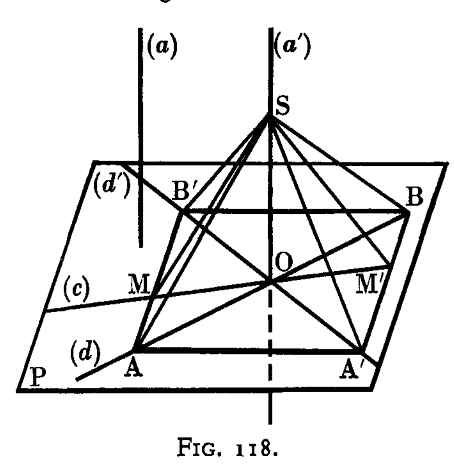


FIG. 118.

- **Toute droite (c) passant par O, dans le plan (P), est une droite de l'ensemble (E).**

RÉCIPROQUE. — Soit une droite (c') passant par O orthogonale à (a'). Cette droite (c') détermine avec (a') un plan (Q). Ce plan (Q), distinct de (P), puisqu'il contient $(a') \notin (P)$ et ayant en commun avec (P) le point O coupe (P) suivant une droite (c) qui appartient à (E). Les droites (c) et (c') coplanaires et perpendiculaires en O à (a') sont confondues.

- **Toute droite de l'ensemble (E) est dans le plan (P).**
- **L'ensemble des droites passant par un point O et orthogonales à une droite est un faisceau plan de sommet O.**

Exercices. **1230.** — Soit deux droites (a) et (b). Construire une droite (d), orthogonale à (a), passant par un point donné et rencontrant la droite (b).

1231. — Construire une droite passant par un point A donné, parallèle à un plan (π) et perpendiculaire à une droite donnée (d). **Exercices.**

II. DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

190. Définition. — Reprenons le résultat du nº **189**. Soit une droite (a) et (P) le plan passant par un point O et contenant l'ensemble des droites passant par O et orthogonales à (a).

Soit (d) une droite quelconque du plan (P); la parallèle (d') à (d) passant par O est dans (P), elle est orthogonale à (a), donc les droites (a) et (d) sont orthogonales.

Le plan (P) est donc tel que la droite (a) est orthogonale à toutes les droites de ce plan; nous dirons, *par définition*, que (a) est perpendiculaire au plan (P).

☆ DÉFINITION. — **On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan, pour exprimer qu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan. On dit aussi bien que le plan est perpendiculaire à la droite. On dit encore que la droite est normale au plan.**

Si on donne la droite (a) l'existence d'un plan perpendiculaire résulte du nº **189**, mais si on donne le plan (P), l'existence d'une droite qui lui est perpendiculaire n'est pas évidente. Elle va résulter du théorème suivant.

191. Théorème fondamental. — Soit un plan (P) et deux droites (d) et (d') non parallèles de ce plan. Supposons qu'une droite (a) soit orthogonale à (d) et orthogonale à (d'); donc :

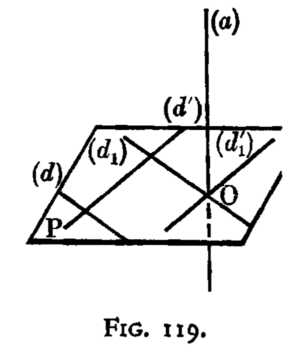


FIG. 119.

Hypothèse	$(d) \in (P)$, $(d') \in (P)$ } (d) et (d') distinctes et non parallèles. $(a) \perp (d)$ $(a) \perp (d')$.

La droite (a) n'est pas dans le plan (P) ni parallèle à ce plan (P), sinon la droite (a') tracée par un point de (P) et parallèle à (a) serait, dans ce plan, perpendiculaire à la fois à (d) et à (d'), ce qui est impossible. Il en résulte que la droite (a) perce le plan (P) en un point O.

Soit (d_1) et (d'_1) les parallèles à (d) et (d') tracées par O. (*Fig. 119*). Puisque (a) est perpendiculaire à (d_1) et (d'_1), le plan (P) contient l'ensemble (E) des droites passant par O, orthogonales à (a). Le plan (P) est perpendiculaire à (a).

■ THÉORÈME. — **Si une droite est orthogonale à deux droites concourantes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.**

192. Conséquences. 1. PLAN PASSANT PAR UN POINT ET PERPENDICULAIRE A UNE DROITE. — L'ensemble des droites passant par O et orthogonales à (a), détermine un plan (P) perpendiculaire à (a). Ce plan est unique, sans quoi il existerait au moins une droite non située dans (P) qui serait orthogonale à (a). Donc :

▪ THÉORÈME. — **Il existe un plan et un seul, passant par an point donné et perpendiculaire à une droite donnée.**

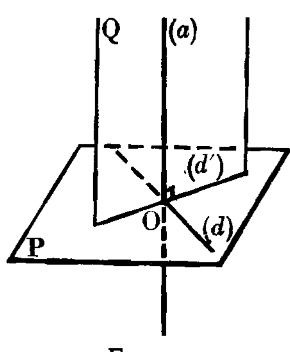
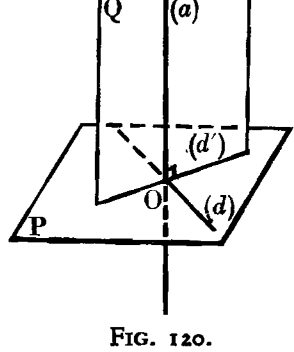



FIG. 120.

2. DROITE PASSANT PAR UN POINT ET PERPENDICULAIRE A UN PLAN. — Soit O le point donné et (P) le plan donné.

1er *Cas. Le point O est dans le plan P.* Soit (d) une droite quelconque de (P) et passant par O. La droite cherchée doit être orthogonale à (d).

Elle se trouve donc dans le plan (Q) perpendiculaire en O à (d). Le plan (Q) coupe le plan (P) suivant (d'). Si dans (Q) on trace (a) perpendiculaire en O à (d') on a :

$$\begin{matrix}(a) \perp (d) \\ (a) \perp (d')\end{matrix} \implies (a) \perp (P) \quad (\textit{Fig. 120}).$$

Cette perpendiculaire est unique, car toute perpendiculaire en O à (P) est perpendiculaire à (d), et appartient à (Q); de plus elle est perpendiculaire en O à (d') et, dans le plan (Q), on ne peut tracer par O qu'une seule perpendiculaire à (d').

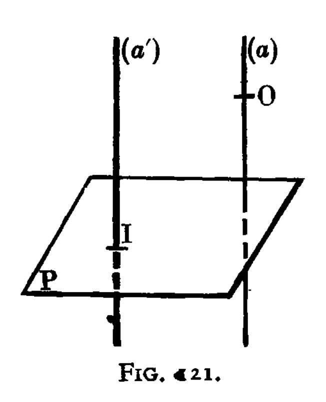


FIG. 121.

2e *Cas. Le point O n'est pas dans (P).* Construisons la perpendiculaire (a') au plan (P) en un point I de ce plan (*Fig. 121*).

La droite (a') est orthogonale à toutes les droites du plan (P), donc sa parallèle (a) tracée par O également. La droite (a) convient.

Elle est unique car, si une droite passant par O est perpendiculaire à (P) la parallèle à cette droite et passant par I est aussi perpendiculaire à (P); elle coïncide donc avec (a'). Or de O, on ne peut mener qu'une parallèle à (a').

Nous pouvons conclure :

▪ THÉORÈME. — **Il existe une droite et une seule passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.**

Si le point O est dans le plan (P) nous dirons la perpendiculaire en O au plan (P).

Si O n'est pas dans (P), on trace de O la perpendiculaire sur le plan (P). Si H est la trace de cette perpendiculaire sur (P), nous dirons que H est le pied de la perpendiculaire, ou la projection orthogonale de O sur (P).

Nous emploierons le signe $\perp$ pour les droites et pour les plans.

☆ DÉFINITION. — **La distance d'an point à an plan est la longueur du segment dont une extrémité est le point et l'autre extrémité la projection orthogonale du point sur le plan.**

193. Propriétés des droites et plans perpendiculaires.

1. Soit deux plans parallèles (P) et (P′) et une droite (a) perpendiculaire à (P). La droite (a) est orthogonale à deux droites (c) et (d) concourantes de (P). Le plan (P′) parallèle à (P) contient (c') et (d') respectivement parallèles à (c) et (d). La droite (a) est alors orthogonale à (c') et (d'), donc à (P′).

▪ THÉORÈME. — **Si deux plans sont parallèles, toute perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.**

2. Soit (P) et (P′) deux plans perpendiculaires à une même droite (a). S'ils sont distincts, ils n'ont pas de point commun, sinon de ce point on aurait deux plans perpendiculaires à une même droite.

▪ THÉORÈME. — **Deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles.**

3. Soit une droite (a) perpendiculaire à un plan (P) et une droite (a') parallèle à (a). La droite (a) est perpendiculaire à deux droites (c) et (d) concourantes de (P), donc sa parallèle (a') est aussi perpendiculaire à (c) et (d) donc à (P).

▪ THÉORÈME. — **Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.**

4. Soit (a) et (a') deux droites distinctes perpendiculaires à un plan (P).
(a_1) et (a_1') les parallèles à ces droites passant par O quelconque.
(a_1) parallèle à (a) est perpendiculaire à (P).
(a_1') parallèle à (a') est perpendiculaire à (P).
Donc puisque la perpendiculaire est unique (a_1) et (a_1') sont confondues et (a) et (a') sont parallèles.

▪ THÉORÈME. — **Deux droites distinctes perpendiculaires à un même plan sont parallèles.**

5. Soit (d) et (d') deux droites orthogonales. Soit (P) le plan perpendiculaire à (d') passant par un point O de (d). Puisque (d) est perpendiculaire à (d'), la droite (d) est dans le plan (P) (*Fig. 122*).

Réciproquement, si un plan (P) passant par (d) est perpendiculaire à (d'), les droites (d) et (d') sont orthogonales.

▪ THÉORÈME. — **Si deux droites sont orthogonales on peut faire passer par l'une un plan perpendiculaire à l'autre.**
Si deux droites sont telles qu'il passe par l'une un plan perpendiculaire à l'autre, elles sont orthogonales.

La propriété énoncée caractérise les droites orthogonales.

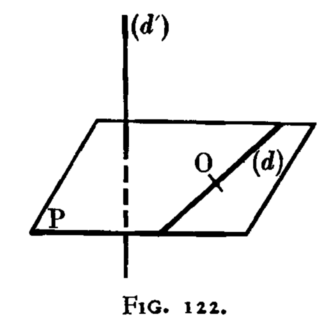


FIG. 122.

194. Conclusion. — Toutes les droites parallèles à une même droite ont en commun une propriété : leur **direction.** Nous pourrons parler maintenant de la direction perpendiculaire à un plan.

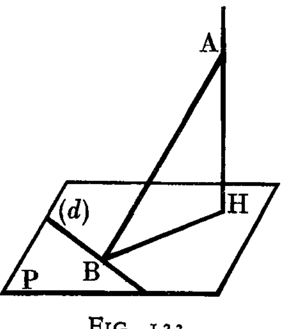


FIG. 123.

De même nous parlerons de la direction de plan perpendiculaire à une droite.

195. Théorème des trois perpendiculaires. — Soit un plan (P) et un point A non situé dans (P), soit H la projection orthogonale de A sur (P) et B la projection orthogonale de A sur une droite (d) du plan (P) et ne passant pas par H (*Fig. 123*).

(d) est perpendiculaire à AH puisque AH est perpendiculaire à toutes les droites du plan (P).

(d) est perpendiculaire à AB par hypothèse.

Donc (d) est perpendiculaire au plan ABH et en particulier à BH.

Remarque. — Si B est par hypothèse la projection de H sur (d) on a de même :

$$\left.\begin{matrix}(d) \perp \mathrm{BH} \\ (d) \perp \mathrm{AH}\end{matrix}\right. \Longrightarrow (d) \perp (\mathrm{ABH}) \Longrightarrow (d) \perp \mathrm{AB}.$$

On peut résumer l'ensemble par l'équivalence suivante connue sous le nom de théorème des trois perpendiculaires :

$$\begin{matrix}\mathbf{AH} \perp \mathbf{(P)} \\ (d) \in \mathbf{(P)} \\ \mathbf{AB} \perp (d) \iff \mathbf{HB} \perp (d).\end{matrix}$$

Exercices. 1232. — Énoncer et démontrer l'implication suivante, où (a) et (b) sont des droites et (π) un plan :

$$\left.\begin{matrix}(a) \perp (\pi) \\ (b) \perp a)\end{matrix}\right. \Longrightarrow (b) \,//\, (\pi).$$

1233. — Tracer dans un plan, par un point de ce plan une droite perpendiculaire à une droite donnée quelconque.

1234. — Construire une droite qui rencontre deux droites données (δ) et (δ') et qui est orthogonale à deux autres droites données (d) et (d').

1235. — Soit (d) une droite d'un plan (P) et un point A extérieur au plan. Soit B la projection orthogonale de A sur (d). De B on trace dans (P) la perpendiculaire (δ) à (d). Démontrer que la projection orthogonale de A sur (P) se trouve sur (δ).

1236. — Soit deux droites (d) et (d'). Par un point O on trace les plans (P) et (P′) respectivement perpendiculaires à (d) et (d'). Ces deux plans sont-ils sécants? Lorsqu'ils le sont que peut-on dire de leur droite d'intersection?

1237. — Soit dans un plan un angle droit $\widehat{xOy}$ et la perpendiculaire Oz à ce plan. Sur Ox, Oy, Oz on prend les points respectifs A, B, C. Démontrer que la projection orthogonale du point O sur le plan ABC est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercices.

III. ANGLES DIÈDRES

196. Définitions. — Soit un plan (P) et une droite (a) dans ce plan. **La droite** (a) définit dans (P) deux demi-plans (π) et (π_1).

☆ **On appelle dièdre plat (π, a, π_1) l'ensemble des demi-plans (π), (π_1) et de tous les demi-plans d'arête (a) situés dans l'un des demi-espaces limités par (P).**

Le plan (P) et la droite (a) définissent deux dièdres plats.

☆ DÉFINITION. — **On appelle dièdre (π, a, π') l'intersection de deux dièdres plats (π, a, π_1) et (π', a, π'_1)** (*Fig. 124*).

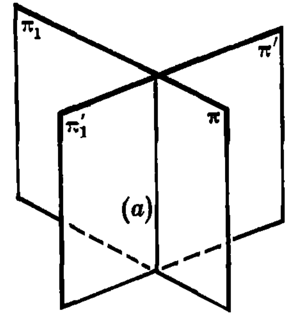


FIG. 124.

La droite (a) est **l'arête** du dièdre. Les demi-plans (π) et (π') les **faces** du dièdre. Deux demi-plans (π) et (π') de même arête (a) définissent un dièdre, comme l'ensemble des demi-plans d'arête (a) situés à la fois dans le demi-espace limité par le plan portant (π) et contenant (π'), et dans le demi-espace limité par le plan portant (π') et contenant (π).

Par analogie avec les angles, le dièdre que nous venons de définir est un **dièdre saillant.** Le dièdre adjoint **rentrant** étant défini par les demi-plans (π) et (π') et par tous les demi-plans d'arête (a) qui n'appartiennent pas à (π, a, π'). On notera un dièdre rentrant : $(\pi, \overset{\frown}{a}, \pi')$.

Un point est dit **intérieur** au dièdre (π, a, π') s'il n'est pas sur les faces et si le demi-plan défini par (a) et ce point appartient au dièdre. Il est **extérieur** si le demi-plan appartient au dièdre rentrant adjoint.

197. Section droite d'un dièdre. — Soit un dièdre (π, a, π'), et O un point de son arête, Ox et Ox' les demi-droites perpendiculaires à (a) situées respectivement dans (π) et (π') (*Fig. 125*).

☆ DÉFINITION. — **L'angle $\widehat{xOx'}$ est la section droite du dièdre (π, a, π').**

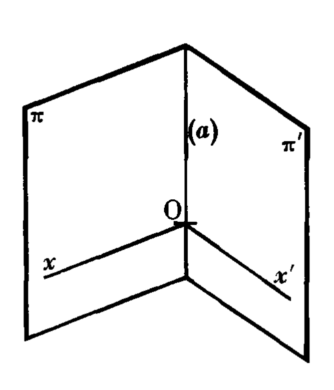


FIG. 125.

L'angle que nous venons de définir est indépendant du choix du point O sur (a). Soit en effet $\widehat{x_1O_1x'_1}$ l'angle construit à partir d'un point O_1 de (a). Le raisonnement du n° 188 donne :

$$\widehat{xOx'} = \widehat{x_1O_1x'_1}.$$

Au dièdre rentrant $(\pi, \overset{\frown}{a}, \pi')$ correspond l'angle rentrant $x\overset{\frown}{O}x'$; à un dièdre plat l'angle plat.

198. Comparaison de deux dièdres. — Soit (π, a, π') et (π_1, a_1, π'_1) deux dièdres; $\widehat{xOx'}$ et $\widehat{x_1O_1x'_1}$ leurs sections droites.

☆ DÉFINITIONS. — I. **On dit que deux dièdres sont égaux pour exprimer que leurs sections droites sont égales.**

II. On dit que le dièdre (π, a, π') est plus grand que le dièdre (π_1, a_1, π'_1) pour exprimer que : $\widehat{xOx'} > \widehat{x_1O_1x'_1}$; il est plus petit si $\widehat{xOx'} < \widehat{x_1O_1x'_1}$.

D'où les équivalences :

$$(\pi, a, \pi') = (\pi_1, a_1, \pi'_1) \iff \widehat{xOx'} = \widehat{x_1O_1x'_1}.$$

$$(\pi, a, \pi') > (\pi_1, a_1, \pi'_1) \iff \widehat{xOx'} > \widehat{x_1O_1x'_1}.$$

Il résulte de cette définition que l'égalité et l'inégalité des dièdres ont les propriétés de l'égalité et de l'inégalité des angles. Par exemple :

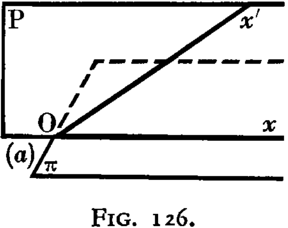


FIG. 126.

▪ **Deux dièdres égaux à un troisième sont égaux.**

Soit un demi-plan (π) d'arête (a) et (E) un des demi-espaces limités par le support de (π). Dans (E) le demi-plan (P) perpendiculaire en O à (a) (*Fig. 126*) coupe (π) suivant Ox. Il existe dans (P) une demi-droite Ox' et une seule telle que $\widehat{xOx'}$ soit égal à un angle donné. Si (π') est le demi-plan d'arête (a) contenant Ox', le dièdre (π, a, π') est égal au dièdre donné, dont la section droite est égale à xOx'.

199. Dièdres adjacents. — Soit un demi-plan (π) d'arête (a). Dans un des demi-espaces limités par le support de (π), construisons le demi-plan (π') tel que le dièdre (π', a, π) soit égal à un dièdre donné; de même, dans l'autre demi-espace un demi-plan (π'') tel que (π, a, π'') soit égal à un autre dièdre donné nous dirons que nous avons mis les deux dièdres donnés dans la position d'adjacents.

☆ DÉFINITION. — **Deux dièdres sont adjacents lorsqu'ils ont même arête, et une face commune de part et d'autre de laquelle ils sont situés.**

Si (π', a, π) et (π, a, π'') sont adjacents (*Fig. 127*), il résulte de la définition que leurs sections droites sont des angles adjacents.

200. Somme de deux dièdres. — Construisons deux dièdres adjacents (π', a, π) et (π, a, π'') respectivement égaux aux deux dièdres donnés. Le dièdre (saillant ou rentrant) dont l'arête est (a), les faces (π') et (π''), et qui contient (π) est par définition la somme des deux dièdres donnés.

Si (π) est intérieur au dièdre saillant (π', a, π'') :

$$(\pi', a, \pi'') = (\pi', a, \pi) + (\pi, a, \pi'').$$

Si π est extérieur au dièdre saillant (π', a, π'') :

$$(\widetilde{\pi', a, \pi''}) = (\pi', a, \pi) + (\pi, a, \pi'').$$

Il en résulte que si Ox', Ox, Ox'' sont des demi-droites d'origine O sur (a), situées dans (π'), (π) et (π'') et perpendiculaires à (a) on a :

$$\widehat{x'Ox''} = \widehat{x'Ox} + \widehat{xOx''},$$

ou :

$$\widehat{x'Ox''} = \widehat{x'Ox} + \widehat{xOx''}.$$

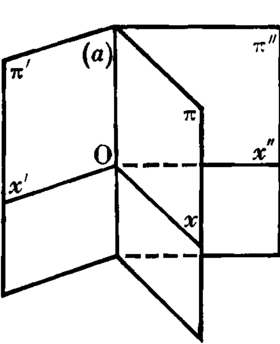


FIG. 127.

- **La somme de deux dièdres a pour section droite la somme des sections droites des deux dièdres.**
- **L'addition de deux dièdres est une opération commutative.**

Les sections droites jouent pour les dièdres le même rôle que les angles au centre pour les arcs d'un même cercle (n° 76). Nous énoncerons donc maintenant les résultats essentiels sans entrer dans le détail des justifications.

201. Rapport de deux dièdres. Mesure d'un dièdre.

- **Le rapport de deux dièdres est le rapport de leurs sections droites.**

L'unité de dièdre est le **dièdre droit,** noté 1D dont la section droite est un angle droit. La mesure d'un dièdre est le rapport de ce dièdre à l'unité. Les sous-multiples du dièdre droit sont les mêmes qu'en géométrie plane, pour les angles et les arcs.

- **La mesure d'un dièdre est la même que celle de sa section droite.**

202. Bissecteur d'un dièdre. — Soit un dièdre (π, a, π') et $\widehat{xOx'}$ une section droite. Soit Oy la bissectrice de $\widehat{xOx'}$, et (π_1) le demi-plan d'arête (a) contenant Oy. On a :

$$(\pi, a, \pi_1) = (\pi_1, a, \pi') \text{ (Fig. 128).}$$

(π_1) est le bissecteur du dièdre.

☆ DÉFINITION. — **Le bissecteur d'un dièdre est le demi-plan, intérieur au dièdre qui a même arête que le dièdre et qui partage ce dièdre en deux dièdres égaux.**

On remarquera que cette définition est valable pour un dièdre rentrant.

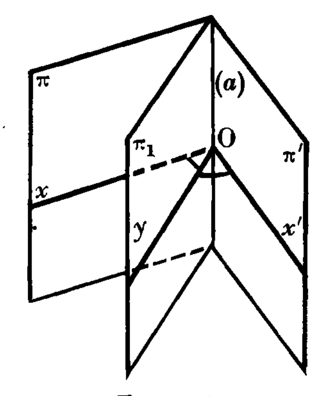


FIG. 128.

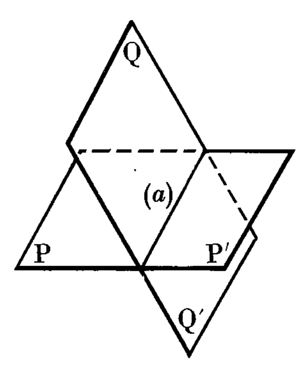


FIG. 129.

203. Dièdres opposés par l'arête. — Soit deux plans sécants (P) et (Q), ils déterminent quatre dièdres (*Fig. 129*).

(P, *a*, Q) et (P′, *a*, Q′) sont opposés par l'arête, leurs sections droites sont des angles opposés par le sommet. Il en résulte :

■ **Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux.**

204. Définitions. — Dans la *figure 129*, les dièdres (P, *a*, Q) et (Q, *a*, P′) sont adjacents, leur somme est 2D, ils sont dits adjacents supplémentaires.

Notons pour terminer :

1. Un dièdre est **aigu**, s'il est plus petit qu'un dièdre droit.
2. Un dièdre saillant est **obtus**, s'il est plus grand qu'un dièdre droit.
3. Deux dièdres sont **complémentaires** si leur somme est un dièdre droit.
4. Deux dièdres sont **supplémentaires** si leur somme est un dièdre plat.

Exercices. **1238.** — Que peut-on dire des bissecteurs :

1° de deux dièdres opposés par l'arête?

2° de deux dièdres adjacents supplémentaires?

1239. — D'un point de l'espace, on trace les perpendiculaires sur les faces d'un dièdre. Comparer les angles ainsi formés à la section droite du dièdre.

1240. — Une droite perpendiculaire au bissecteur d'un dièdre perce les faces du dièdre en A et B et le bissecteur en C. Étudier la disposition des points A, B, C.

1241. — Quel est l'ensemble des milieux des segments parallèles à une droite fixe et dont les extrémités décrivent deux plans sécants?

1242. — Soit O*z* la bissectrice de la section droite $\widehat{xOy}$ d'un dièdre. Par un point fixe M de O*z* on trace une perpendiculaire à O*z*. Elle perce les faces du dièdre en A et B.

1° Démontrer que MA = MB et OA = OB.

2° Quels sont les ensembles constitués par les points A et B?

1243. — Soit deux plans parallèles (π) et (π') et un plan (P) qui coupe (π). En reprenant les définitions de la géométrie plane, peut-on parler de dièdres co-internes, correspondants, alternes-internes? Démontrer que deux dièdres alternes-internes sont égaux. Étudier les réciproques.

Exercices.

IV. PLANS PERPENDICULAIRES

205. Définition. — On dit que deux plans sécants sont perpendiculaires pour exprimer que l'un des dièdres qu'ils forment est droit.

Si deux plans sont perpendiculaires, les quatre dièdres qu'ils déterminent sont droits. Nous noterons l'orthogonalité : (P) $\perp$ (Q).

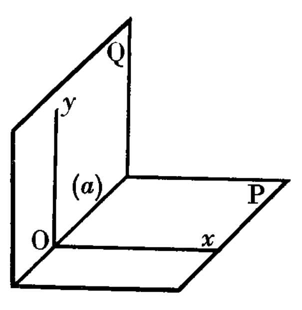


FIG. 130.

206. Propriété caractéristique. — Soit (P) et (Q) deux plans perpendiculaires, $\widehat{xOy}$ une section droite de l'un des dièdres qu'ils forment, (a) l'arête du dièdre. On a : (*Fig. 130*).

Oy perpendiculaire à (a), par définition de la section droite.

Oy perpendiculaire à Ox, par hypothèse.

Donc Oy est perpendiculaire au plan (P).

De même Ox est perpendiculaire à (Q).

▪ THÉORÈME. — **Si deux plans sont perpendiculaires, chacun d'eux contient au moins une droite perpendiculaire à l'autre.**

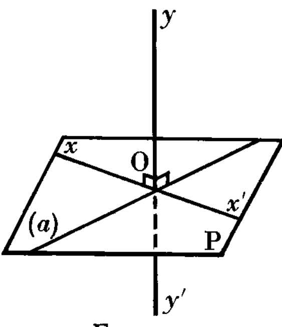


FIG. 131.

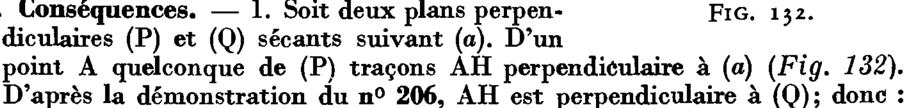
Réciproquement, soit un plan (P) et une droite y'Oy perpendiculaire en O à (P). Un plan (Q) passant par y'Oy coupe (P) suivant une droite (a) passant par O. La section droite des dièdres formés par (P) et (Q) est déterminée par y'Oy perpendiculaire à (a) et x'Ox, dans (P), perpendiculaire à (a) (*Fig. 131*). Or $\widehat{y'Oy}$ perpendiculaire à (P) est perpendiculaire à x'Ox. La section droite est un angle droit.

Les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

▪ THÉORÈME. — **Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan passant par cette droite est perpendiculaire au premier plan.**

L'orthogonalité de deux plans est caractérisée par le fait que l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

FIG. 132.



207. Conséquences. — 1. Soit deux plans perpendiculaires (P) et (Q) sécants suivant (a). D'un point A quelconque de (P) traçons AH perpendiculaire à (a) (*Fig. 132*). D'après la démonstration du n° **206**, AH est perpendiculaire à (Q); donc :

▪ THÉORÈME. — **Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée par un point de l'un, perpendiculaire à l'autre, est contenue dans le premier.**

2. Soit (Q) et (R) deux plans perpendiculaires au plan (P), (*a*) et (*b*) leurs droites d'intersection respectives avec (P). Les deux plans (Q) et (R) contiennent chacun une droite perpendiculaire à (P), soit (*c*) pour (Q), (*d*) pour (R); (*c*) et (*d*) ont même direction comme perpendiculaires à un même plan (*Fig. 133*).

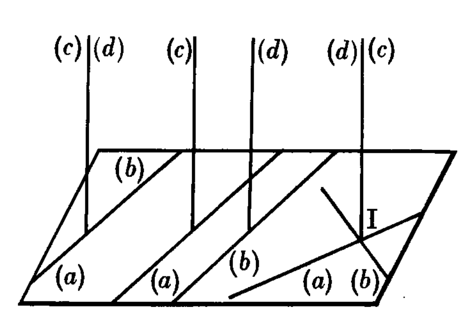


FIG. 133.

— Si (*a*) et (*b*) sont confondues, on peut prendre (*c*) et (*d*) confondues; les plans (Q) et (R) sont confondus.

— Si (*a*) et (*b*) sont parallèles, chacun des plans (Q) et (R) contient deux droites parallèles à l'autre, ils sont parallèles.

— Si (*a*) et (*b*) sont sécantes en I, on peut prendre (*c*) et (*d*) confondues avec la perpendiculaire en I à (P).

▪ THÉORÈME. — **Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un troisième, leur droite d'intersection est perpendiculaire à ce troisième plan.**

208. Problèmes de construction. — 1. *Par un point* A *construire un plan perpendiculaire à un plan* (P) *donné*. Un tel plan s'il existe contient la perpendiculaire AH au plan (P). Réciproquement tout plan passant par AH est perpendiculaire à (P). Tous les plans passant par AH sont des solutions.

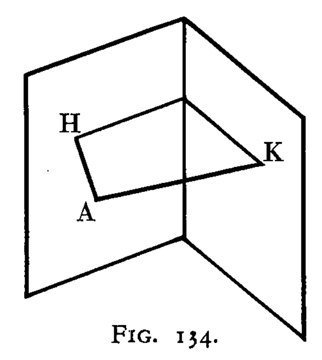
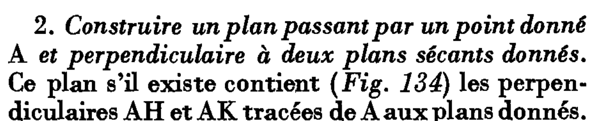
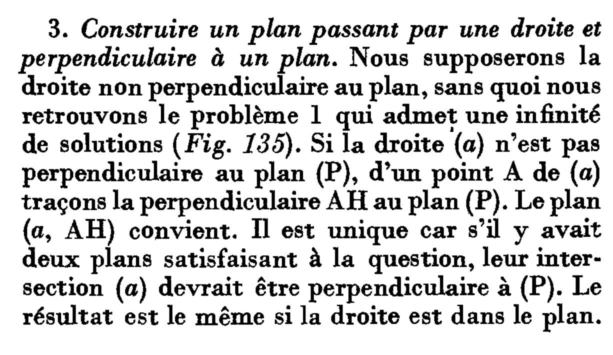


FIG. 134.


2. *Construire un plan passant par un point donné* A *et perpendiculaire à deux plans sécants donnés.* Ce plan s'il existe contient (*Fig. 134*) les perpendiculaires AH et AK tracées de A aux plans donnés.

Les droites AH et AK sont distinctes et déterminent un plan qui convient.


3. *Construire un plan passant par une droite et perpendiculaire à un plan.* Nous supposerons la droite non perpendiculaire au plan, sans quoi nous retrouvons le problème 1 qui admet une infinité de solutions (*Fig. 135*). Si la droite (*a*) n'est pas perpendiculaire au plan (P), d'un point A de (*a*) traçons la perpendiculaire AH au plan (P). Le plan (*a*, AH) convient. Il est unique car s'il y avait deux plans satisfaisant à la question, leur intersection (*a*) devrait être perpendiculaire à (P). Le résultat est le même si la droite est dans le plan.

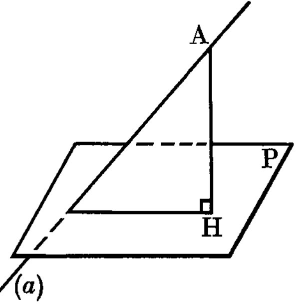


FIG. 135.

▪ THÉORÈME. — **Par une droite non perpendiculaire à un plan, il passe un plan et un seul, perpendiculaire à ce plan.**

209. Résumé. — Nous rassemblons dans les tableaux suivants l'essentiel des résultats rencontrés dans les chapitres précédents concernant l'étude des droites et des plans dans l'espace.

Par un point on peut tracer :	
Une droite	*parallèle* à une droite donnée
Une droite	*perpendiculaire* à un plan donné
Une infinité de droites	*parallèles* à un plan donné : Elles engendrent le plan passant par le point et parallèle au plan donné.
Une infinité de droites	*perpendiculaires* à une droite donnée Elles engendrent le plan passant par le point et perpendiculaire à la droite donnée.
Un plan	*parallèle* à un plan donné
Un plan	*perpendiculaire* à une droite donnée.
Une infinité de plans	*parallèles* à une droite donnée Ils ont en commun la droite tracée par le point et parallèle à la droite donnée.
Une infinité de plans	*perpendiculaires* à un plan donné Ils ont en commun la droite tracée par le point et perpendiculaire au plan donné.
Un plan	*perpendiculaire* à deux plans donnés non parallèles.

Par une droite on peut tracer :	
Un plan	*parallèle* à une autre droite non parallèle à la première
Un plan	*perpendiculaire* à un plan donné non perpendiculaire à la droite.

Par une droite on ne peut pas tracer :	
Un plan	*parallèle* à un plan donné sauf si la droite est parallèle au plan
Un plan	*perpendiculaire* à une droite donnée sauf si les deux droites sont orthogonales.

Par deux droites on peut tracer :	
Deux plans	*parallèles* si les droites ne sont pas concourantes.

Exercices. **1244.** — (P) et (Q) étant deux plans perpendiculaires et (D) une droite perpendiculaire à (P), que peut-on dire de (D) et de (Q)?

1245. — Deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des intersections de ces plans par un troisième plan (R) perpendiculaire à (P)?

1246. — On donne un point A, un plan (P) et une droite (D). Construire un plan passant par A, parallèle à (D) et perpendiculaire à (P).

1247. — Deux plans (P) et (Q) perpendiculaires à un même troisième (R) sont-ils nécessairement parallèles? Que peut-on dire de (P) et de (Q) s'ils contiennent deux droites parallèles?

1248. — On donne trois points A, B, C et un plan (P). Déterminer un plan (Q) passant par A et par B un plan (R) tels que (Q) et (R) soient perpendiculaires au plan (P) et que leur intersection passe par C.

1249. — 1° On considère un dièdre droit et une de ses sections droites xOy. Étudier l'angle formé par les droites d'intersection des faces du dièdre avec un plan quelconque passant par Ox.
2° En déduire que les plans qui passent par un peint de l'arête d'un dièdre droit et qui le coupent suivant un angle droit constituent deux groupes de plans passant par l'une ou l'autre de deux droites fixes. Y a-t-il un plan commun aux deux groupes?

1250. — On considère dans un plan un cercle de diamètre AB. Sur la perpendiculaire en un point A de ce cercle à son plan, on prend un point S. Le point M étant quelconque sur le cercle, démontrer que les plans SMA et SMB sont perpendiculaires. **Exercices.**

PROBLÈMES

1251. — On donne un plan (P), une droite (D) perpendiculaire à (P) et une droite (D') quelconque. Un plan variable (Q) passe par (D). On mène par (D') le plan (Q') perpendiculaire à (Q). Ensemble des points communs aux plans (P), (Q), (Q').

1252. — 1° Par deux droites orthogonales, on peut tracer deux plans variables perpendiculaires entre eux.

2° Démontrer que si l'un de ces plans varie, l'autre est fixe.

1253. — On se propose de construire une droite (L) répondant à une ou plusieurs des conditions suivantes :

1° passer par un point donné O;
2° couper une droite donnée (D);
3° être parallèle à une droite donnée (d);
4° être orthogonale à une droite donnée (Δ);
5° être dans un plan donné (P);
6° être parallèle à un plan donné (p);
7° être perpendiculaire à un plan donné (Q).

On s'assurera d'abord que certaines de ces conditions sont équivalentes. Puis, on prendra isolément chacune des conditions indépendantes qui resteront, et on en combinera deux de toutes les façons possibles, puis trois. C'est seulement quand le nombre de solutions est illimité qu'il y a lieu d'augmenter le nombre de conditions imposées à la droite (L).

1254. — On donne un triangle isocèle ABC (AB = AC) dont on connaît l'angle $A = 120°$ et la hauteur $AA' = a$. Calculer à quelle distance de A on doit prendre un point M sur la perpendiculaire en A au plan du triangle pour que l'angle BMC soit droit.

1255. Soit un carré ABCD. On élève aux extrémités A et C de la diagonale AC deux perpendiculaires au plan du carré et d'un même côté de ce plan sur lesquelles on porte des longueurs égales :

$$AA' = CC' = AB.$$

On joint CA'. Soit I le point du segment A'C situé aux $\frac{2}{3}$ de ce segment à partir de A'. Démontrer que le plan perpendiculaire en I à A'C passe par C', B et D.

CHAPITRE XV

APPLICATIONS DIVERSES

I. COMPARAISON DE LA PERPENDICULAIRE ET DES OBLIQUES

210. Perpendiculaire et obliques. — Soit un plan (P) et un point O non situé dans ce plan, H le pied de la perpendiculaire de O sur (P), M un point de (P) distinct de H. Le triangle OMH, rectangle en H donne (*Fig. 136*) :

$$OH < OM.$$

La mesure de OH est la distance du point O au plan. Nous pouvons énoncer :

▪ THÉORÈME. — **La distance d'un point à un plan est la plus courte distance de ce point à un point du plan.**

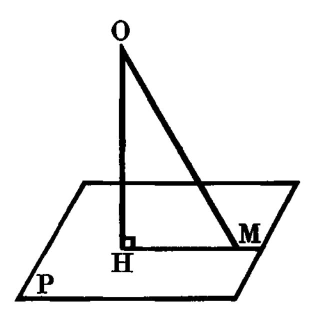


FIG. 136.

211. Comparaison de deux obliques. — Soit OM et OM′ deux obliques, H la projection orthogonale de O sur (P). Sur la demi-droite d'origine H contenant M prenons M_1 tel que $HM_1 = HM'$; les deux triangles rectangles OHM_1 et OHM' ayant : OH commun.

$HM_1 = HM'$; sont égaux et :

$$OM_1 = OM' \ (Fig.\ 137).$$

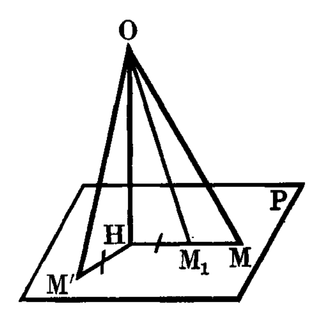


FIG. 137.

Dans le plan OHM, on a (nº 56) :

$$\begin{aligned} &M_1 \text{ entre H et M} &\Longleftrightarrow\quad & OM_1 < OM.\\ &M_1 \text{ en M} &\Longleftrightarrow\quad & OM_1 = OM.\\ &M \text{ entre H et } M_1 &\Longleftrightarrow\quad & OM_1 > OM. \end{aligned}$$

On généralise donc à l'espace les propriétés démontrées en géométrie plane, que nous résumons par :

$$\boxed{HM \leqslant HM' \Longleftrightarrow OM \leqslant OM'.}$$

Exercices. 1256. — Soit un plan (P), un point O non situé dans (P), et une longueur l. Quel est l'ensemble des points M du plan (P) tels que $OM = l$? Le problème est-il toujours possible?

1257. — Soit un plan (P), un point A de l'espace, H sa projection orthogonale sur (P), (a) une droite du plan (P) et (π) le demi-plan de (P) contenant H. Soit K le pied de la perpendiculaire de A sur (a). Sur toute demi-droite Kx de (π) on prend M tel que KM = KH. Comparer les triangles AKH et AKM. En déduire la comparaison des angles $\widehat{AKH}$ et $\widehat{AKM}$.

Exercices.

II. PROJECTIONS

212. Projection sur un plan parallèlement à une droite.

☆ DÉFINITION. — **Étant donné un plan (P) appelé plan de projection et une droite (d) non parallèle à (P), à tout point M de l'espace on fait correspondre le point M′ du plan (P) tel que MM′ est parallèle à (d).**

Le point M′ est la **projection** du point M sur le plan (P) parallèlement à (d); si le point M est dans le plan (P) le point M′ est confondu avec le point M.

La droite MM′ est la *projetante* du point M.

Si la droite (d) est perpendiculaire à (P), la projection est dite **orthogonale.**

Tout point M de l'espace a une projection M′, mais inversement tout point M′ du plan (P) peut être considéré comme la projection d'un point quelconque de la droite (d') passant par M′ et parallèle à (d).

L'ensemble constitué par les projections des différents points d'un ensemble est la projection de cet ensemble.

213. Projection d'une droite. — Soit (a) une droite de l'espace parallèle à (d), les projetantes des différents points de (a) sont confondues avec (a), la projection de (a) se réduit au point d'intersection A de (a) avec (P) (*Fig. 138*).

Si (a) **non parallèle à** (d), les projetantes des différents points de (a) déterminent le plan, passant par (a) et parallèle à (d). Ce plan coupe (P) suivant une droite (a').

M étant un point de (a), la parallèle tracée de M à (d) coupe (a') en M′ (*Fig. 139*). Tout point de (a) se projette sur (a').

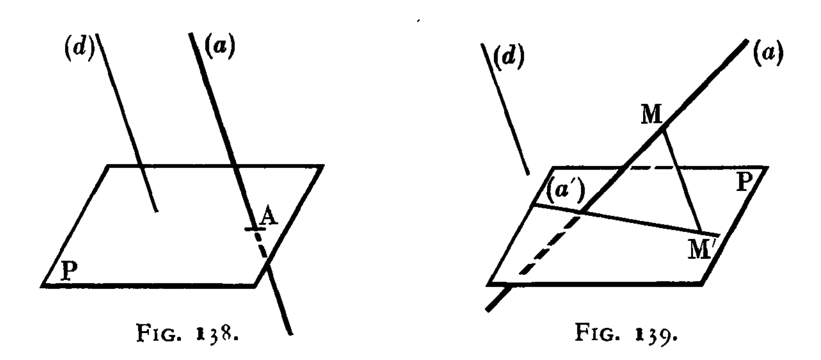


FIG. 138. FIG. 139.

Réciproquement M′ étant un point quelconque de (a'), la parallèle tracée de M′ à (d) coupe (a) en M. Tout point de (a') est la projection d'un point de (a).

▪ THÉORÈME. — **La projection d'une droite non parallèle aux projetantes est une droite. La projection d'une droite parallèle aux projetantes est le point d'intersection de cette droite avec le plan de projection.**

CONSÉQUENCES. 1. La projection de la demi-droite Ox parallèle à (d) est le point O′, projection du point O (*Fig. 140*). La projection de la demi-droite Ox, non parallèle à (d), est une demi-droite O′x', le point O′ étant la projection de O (*Fig. 141*).

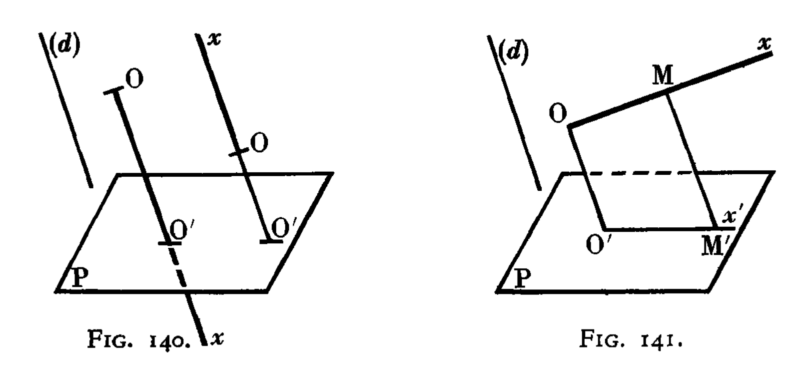


FIG. 140. FIG. 141.

2. Soit trois points A, B, C alignés; leurs projections A′, B′, C′ sont alignées (ou confondues), puisque les droites AA′, BB′, CC′ sont parallèles (ou confondues). On a :

$$\text{B entre A et C} \Longleftrightarrow \text{B}' \text{ entre A}' \text{ et C}'.$$

Et par suite : **La projection du segment AB est le segment A'B'.**

3. **Soit un angle $\widehat{xOy}$. Si son plan** est parallèle aux projetantes, la projection **de l'angle se réduit à une droite** ou une demi-droite. Ce cas englobe celui **où un des côtés de l'angle est parallèle à** (*d*) (*Fig. 142*).

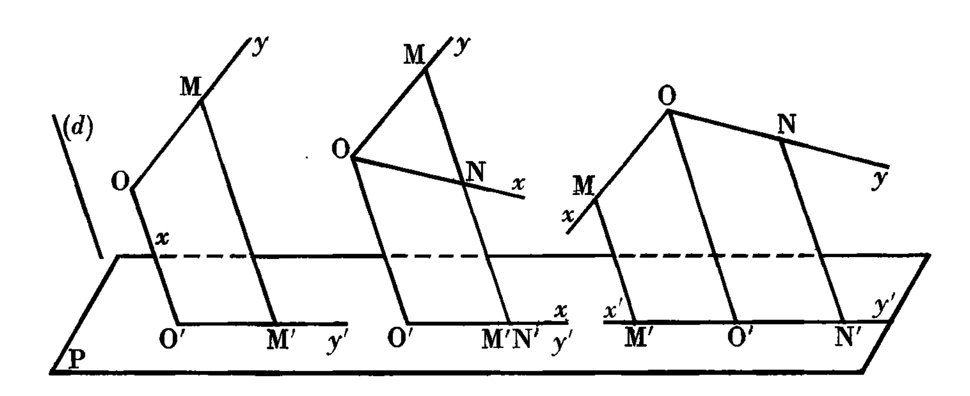


FIG. 142.

Si le plan de $\widehat{xOy}$ n'est pas **parallèle aux projetantes. Soit A $\in$ O*x*, B $\in$ O*y*** et O*z*, **intérieure à $\widehat{xOy}$,** qui coupe AB **en C entre A et B** (*Fig. 143*). **Il résulte** de ce qui précède (Conséquence 2) que C' est entre A' et B', **donc que O'*z*' est intérieure à** $\widehat{x'O'y'}$.

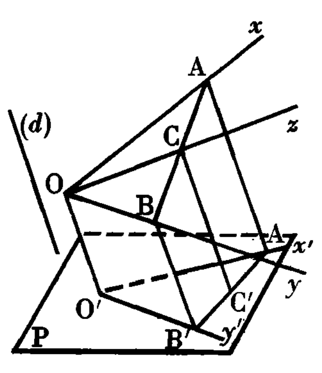


FIG. 143.

La projection de l'angle $\widehat{xOy}$ est l'angle $\widehat{x'O'y'}$. (Le seul cas d'exception étant celui où un des côtés de l'angle est parallèle aux projetantes).

214. Projections de deux droites parallèles. — Soit deux droites parallèles (*a*) et (*b*). Si elles **sont** parallèles à (*d*) leurs projections sont deux points.

Si (*a*) et (*b*) **ne sont** pas parallèles à (*d*), **soit** (π) et (π') les plans parallèles à (*d*) et passant respectivement par (*a*) et (*b*). Ces deux plans sont en **général** parallèles. Leurs intersections avec (P) sont deux droites parallèles (*Fig. 144*). **Il y a** exception si les plans (π) et (π') sont confondus (*Fig. 145*) les projections de (*a*) et (*b*) sont alors confondues.

- **Deux droites parallèles non parallèles aux projetantes se projettent suivant deux droites parallèles (ou exceptionnellement confondues).**

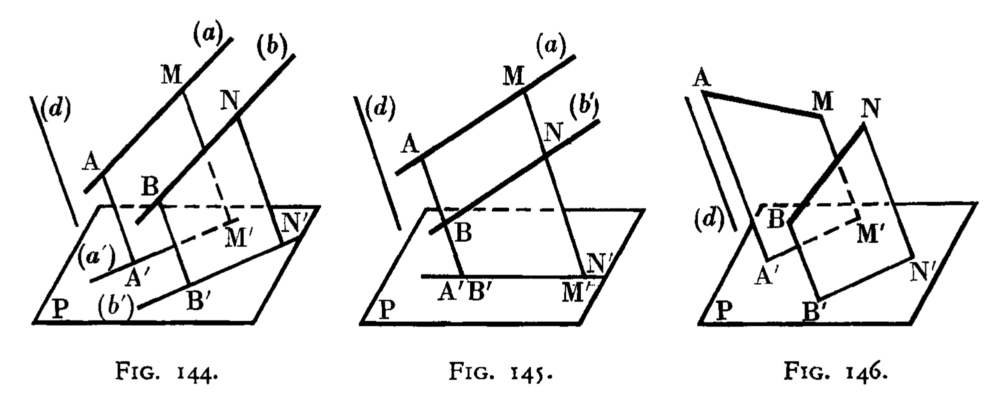


FIG. 144. FIG. 145. FIG. 146.

REMARQUE. — La réciproque de cette propriété n'est pas vraie. Si les projections de deux droites sont parallèles cela prouve seulement que les plans projetants sont parallèles. Dans ces plans on peut choisir deux droites non parallèles (*Fig. 146*).

CONSÉQUENCE. — Soit un parallélogramme ABCD et sa projection A'B'C'D'. Si le plan de ABCD n'est pas parallèle aux projetantes :

$$\begin{matrix} AB \,//\, CD & \Longrightarrow & A'B' \,//\, C'D' \\ AD \,//\, BC & \Longrightarrow & A'B' \,//\, B'D' \end{matrix} \Longrightarrow A'B'C'D' \text{ parallélogramme.}$$

La projection d'un parallélogramme est un parallélogramme.

Réciproquement. Soit le quadrilatère *plan* ABCD qui se projette suivant un parallélogramme A'B'C'D'. Les plans ABB'A' et CDD'C' sont parallèles; leurs intersections par le plan ABCD sont parallèles, donc AB et CD sont parallèles. Il en est de même de AD et BC. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

215. Projections sur deux plans parallèles, parallèlement à une même droite. — Soit d'abord une droite (a) que nous projetons sur les deux plans (P) et (P_1) parallèlement à (d), en laissant de côté le cas où (a) est parallèle à (d). Le plan projetant (a) est coupé par les plans (P) et (P_1) suivant les droites parallèles (a') et (a'_1).

- **Les projections d'une droite sur deux plans parallèles sont deux droites parallèles.**

Soit maintenant un segment AB qui se projette en A'B' sur (P) et $A'_1B'_1$ sur (P_1).

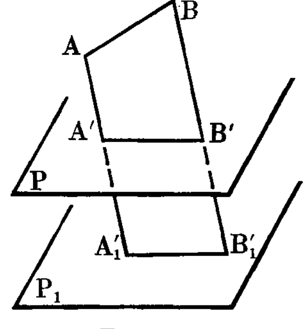


FIG. 147.

Le quadrilatère plan $A'B'B'_1A'_1$ a ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme donc $A'B' = A'_1B'_1$ (*Fig. 147*).

- **Les projections d'un segment sur deux plans parallèles sont des segments égaux.**

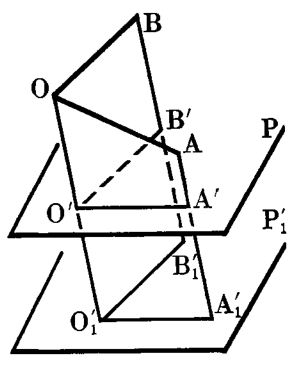


FIG. 148.

Soit un angle $\widehat{AOB}$, et $\widehat{A'O'B'}$ et $\widehat{A'_1O'_1B'_1}$ ses projections sur (P) et (P_1) (*Fig. 148*). Les triangles A'O'B' et $A'_1O'_1B'_1$ ont leurs côtés respectivement égaux comme projections égales du même segment. Ils sont égaux et : $\widehat{A'O'B'} = \widehat{A'_1O'_1B'_1}$.

▪ **Les projections d'un angle sur deux plans parallèles sont des angles égaux.**

216. Projection orthogonale d'un angle. — Soit un angle $\widehat{xOy}$ et sa projection orthogonale $\widehat{x'O'y'}$ sur un plan (P). En général les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$ sont inégaux. Par exemple si le plan de $\widehat{xOy}$ est perpendiculaire à (P), l'angle $\widehat{x'O'y'}$ est nul ou plat, quel que soit $\widehat{xOy}$ (*Fig. 149*). Puisque $\widehat{x'O'y'}$ est une section droite du dièdre [x, OO', y] nous

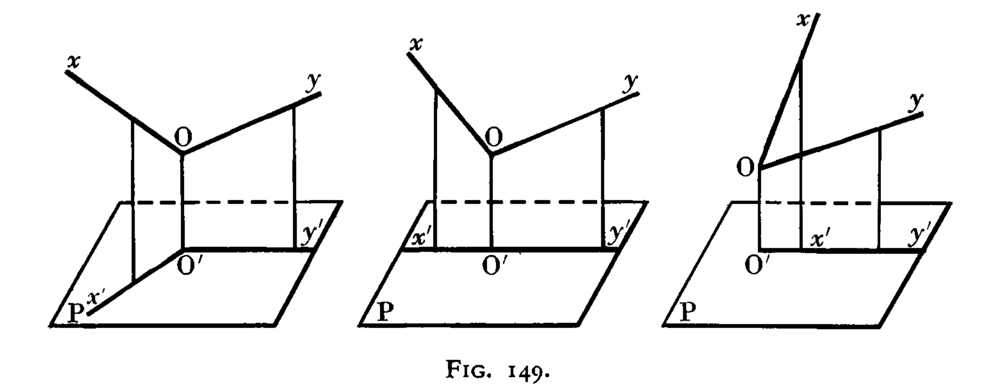


FIG. 149.

serons sûrs de l'égalité si $\widehat{xOy}$ est une autre section droite, ce qui exige que le plan de $\widehat{xOy}$ soit parallèle au plan (P).

▪ **Un angle quelconque se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle égal si son plan est parallèle au plan de projection.**

Un angle peut se projeter orthogonalement sur un plan suivant un angle égal sans que son plan soit parallèle au plan de projection. Nous allons le démontrer dans le cas particulier de l'angle droit.

217. Projection orthogonale de l'angle droit. — Soit un angle droit $\widehat{xOy}$, Ox_1 et Oy_1 les demi-droites opposées respectivement à Ox et Oy. Pour étudier la projection de cet angle, remplaçons le plan de projection donné par un plan parallèle (P). Nous prendrons le plan (P) passant par un point A quelconque de Ox. Plusieurs cas sont possibles :

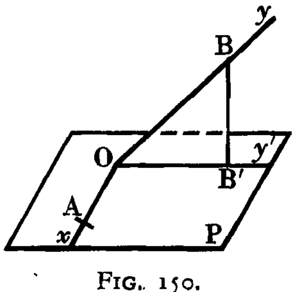


Fig. 150.

1° Le plan (P) contient Ox et Oy. — L'angle xOy est confondu avec sa projection.

2° **Le plan (P) contient Ox et ne contient pas Oy.** — Soit B un point de Oy, B′ sa projection orthogonale sur (P) (*Fig. 150*). Ox est perpendiculaire à Oy par hypothèse. Ox est perpendiculaire à BB′ (car BB′, perpendiculaire au plan (P), est perpendiculaire à Ox de ce plan). Donc Ox, orthogonale à deux droites Oy et BB′ du plan BOB′ (distinctes si Oy non perpendiculaire à (P), ce que nous supposons) est perpendiculaire à ce plan, donc en particulier à Oy'. L'angle $\widehat{xOy'} = 1$ D.

Même résultat si le plan (P) coupe Ox et est parallèle à Oy; donc :

- THÉORÈME I. — **Si un angle droit a un côté parallèle au plan de projection, ou contenu dans ce plan, l'autre côté n'étant pas perpendiculaire à ce plan, sa projection orthogonale est un angle droit.**

3° **Le plan (P) coupe Ox en A et Oy en B** (*Fig. 151*). Soit O′ la projection de O et I le milieu de AB.

OI, médiane du triangle rectangle OAB, est égale à la moitié de l'hypoténuse : $OI = AI = IB$.

OO′I est rectangle en O′; donc : $OI > O'I$.

Dans les triangles O′IA et O′IB on a :

$$O'I < IA \Longrightarrow \hat{A} < \hat{O}'_1.$$

$$O'I < IB \Longrightarrow \hat{B} < \hat{O}'_2.$$

Fig. 151.

Donc par addition, on a dans le triangle AO′B :

$$\hat{A} + \hat{B} < \hat{O}' \qquad \hat{A} + \hat{B} + \hat{O}' < 2\,\hat{O}'.$$

Soit : $2\,O' > 2$ D ou $\widehat{AO'B} > 1$ D.

4° **Le plan (P) coupe Ox en A et Oy_1 en C.** — L'angle $\widehat{xOy_1}$ est droit, et dans la position du cas précédent. Sa projection est un angle obtus; donc la projection de $\widehat{xOy}$ est un angle aigu (*Fig. 152*).

Nous énoncerons :

- THÉORÈME II. — **Si un angle droit n'a aucun côté parallèle au plan de projection, sa projection orthogonale n'est pas un angle droit.**

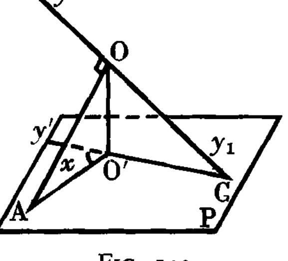


Fig. 152.

L'étude que nous venons de faire permet même de préciser si la projection est un angle aigu ou obtus.

218. Étude des réciproques. — 1. Soit un angle droit $\widehat{xOy}$, dont la projection orthogonale sur un plan est un angle droit. Si l'angle $\widehat{xOy}$ n'a aucun côté parallèle au plan de projection ni dans ce plan d'après le théorème II, sa projection ne peut pas être un angle droit, par suite nous énoncerons :

▪ THÉORÈME III. — **Si un angle droit a pour projection orthogonale sur un plan un angle droit, il a au moins un côté parallèle au plan de projection, ou contenu dans ce plan.**

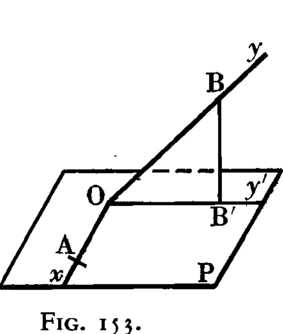


FIG. 153.

2. Soit un angle $\widehat{xOy}$, dont un côté, Ox par exemple, est parallèle au plan de projection ou dans ce plan, et dont la projection orthogonale est un angle droit. Nous pouvons remplacer le plan de projection par le plan parallèle passant par Ox, (*Fig. 153*) soit, B un point de Oy, B′ sa projection.

Ox est perpendiculaire à BB′ (BB′ projetante est perpendiculaire à (P), donc à Ox de (P)).

Ox est perpendiculaire à OB′ par hypothèse.

Donc Ox est perpendiculaire à deux droites distinctes du plan OBB′ et par suite à toute droite de ce plan, en particulier à Oy. Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME IV. — **Si un angle ayant un côté parallèle au plan de projection, ou dans ce plan, a pour projection orthogonale un angle droit, cet angle est droit.**

219. Conclusion. — L'ensemble des théorèmes I, III et IV fait intervenir trois propositions que nous pouvons noter :

A. L'angle $\widehat{xOy}$ est droit.

B. Sa projection est un angle droit.

C. Un côté de l'angle $\widehat{xOy}$ est parallèle au plan de projection, ou dans ce plan.

On a :

Th. I	A et C	$\Rightarrow$ B.
Th. III	A et B	$\Rightarrow$ C.
Th. IV	B et C	$\Rightarrow$ A.

On fait abstraction du cas où un côté de l'angle est perpendiculaire au plan de projection.

Plus particulièrement l'ensemble des théorèmes I et III, constitue une condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit.

III. exprime que la condition est **nécessaire.**

I. exprime que la condition est **suffisante.** Donc :

▪ THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit, est qu'il ait un côté au moins parallèle au plan de projection ou contenu dans ce plan, l'autre côté n'étant pas perpendiculaire au plan de projection.**

Exercices. **1258.** — Soit deux plans sécants (P) et (Q). Quel est l'ensemble dont la projection parallèlement à (*d*) sur chacun des deux plans est une droite? Cas exceptionnels?

1259. — Les projections, parallèlement à (*d*), de deux droites parallèles sur deux plans sécants, sont quatre droites parallèles ou confondues deux à deux. La réciproque est-elle vraie?

1260. — 1° On donne deux droites (*a*) et (*b*) non coplanaires. Peut-on trouver un plan (P) sur lequel elles se projettent orthogonalement suivant deux droites parallèles?
2° Déterminer un plan sur lequel un quadrilatère gauche se projette orthogonalement suivant un parallélogramme. Le problème est-il possible pour un quadrilatère plan?

1261. — On projette un triangle ABC sur un plan parallèlement à (*d*). Démontrer que son centre de gravité se projette au centre de gravité de la projection.

1262. — Soit un angle droit $\widehat{xOy}$ dont la projection orthogonale sur un plan (P) est un angle droit $\widehat{x'O'y'}$. Démontrer directement qu'un de ses côtés au moins est parallèle au plan de projection, ou dans ce plan.

1263. — Soit un angle $\widehat{xOy}$ dont un seul côté est parallèle au plan de projection. La projection est orthogonale.
1° S'il est aigu, il est plus grand que sa projection.
2° S'il est obtus, il est plus petit que sa projection.

1264. — Démontrer que par deux droites concourantes on peut toujours faire passer deux plans perpendiculaires. En déduire que la projection orthogonale d'un angle quelconque peut toujours être un angle droit si on choisit convenablement le plan de projection. **Exercices**

III. ENSEMBLES DE POINTS

220. Plan médiateur d'un segment.

☆ DÉFINITION. — **Le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu.**

Propriété caractéristique. — Soit un segment AB, de milieu I, (P) son plan médiateur. Soit M un point quelconque de (P) distinct de I (*Fig. 154*). Dans le plan MAB la droite MI est perpendiculaire à AB, donc hauteur du triangle MAB, elle est aussi médiane; donc le triangle est isocèle et MA = MB.

Si M est en I on a évidemment MA = MB.

$$M \in (P) \implies MA = MB$$

Réciproquement, soit M distinct de I, donc non situé sur AB, tel que MA = MB. Le triangle MAB est isocèle, la médiane MI est hauteur : le point M appartient au plan perpendiculaire en I à AB.

$$MA = MB \implies M \in (P)$$

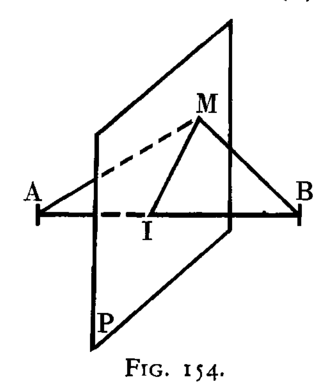


Fig. 154.

Il résulte de ces deux propositions que :

- **L'ensemble des points équidistants des deux extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment.**

MA = MB $\Longleftrightarrow$ M dans le plan médiateur de AB.

221. Ensemble des points équidistants de trois points A, B, C, donnés, non alignés.

1. Existence de points de l'ensemble. — S'il existe un point M appartenant à l'ensemble :

MA = MB $\Longrightarrow$ M dans le plan médiateur de AB.
MA = MC $\Longrightarrow$ M dans le plan médiateur de AC.

Ces deux plans médiateurs sont sécants sans quoi les droites AB et AC auraient même direction et seraient confondues. Les points communs à ces deux plans appartiennent à l'ensemble.

2. Analyse. — Soit M un point de l'ensemble; il est tel que :

MA = MB = MC. (*Fig. 155*).

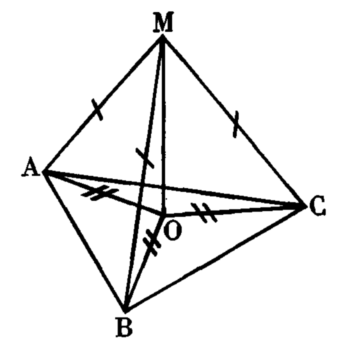
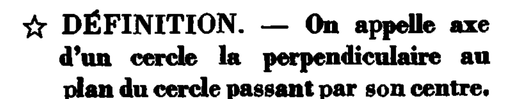


Fig. 155.

Soit O, la projection orthogonale de M sur le plan ABC, on a (n° 211) :

MA = MB = MC $\Longrightarrow$ OA = OB = OC.

Le point O équidistant des trois points A, B, C est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, il est fixe.



☆ DÉFINITION. — **On appelle axe d'un cercle la perpendiculaire au plan du cercle passant par son centre.**

Nous pouvons énoncer :

- **Tout point, appartenant à l'ensemble des points équidistants de A, B, C, se trouve sur l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.**

3. Synthèse. — Soit M un point de l'axe (D) du cercle circonscrit au triangle ABC; les trois obliques MA, MB, MC, également écartées de la projection orthogonale de M sur le plan ABC, sont égales :

OA = OB = OC $\Longrightarrow$ MA = MB = MC.

- **Tout point de l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à l'ensemble des points équidistants des trois points ABC.**

Nous pouvons conclure :

- **L'ensemble des points équidistants de trois points A, B, C non alignés est l'axe du cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois points.**

222. Ensemble des points à une distance donnée l d'un plan donné (P).

1. Existence de points de l'ensemble. — Soit (d) une perpendiculaire au plan (P) qui perce ce plan en I. Sur cette droite de part et d'autre de I il existe deux points A et A′ tels que : $IA = IA' = l$.
Les points A et A′ appartiennent à l'ensemble (E) étudié.

2. Analyse. — Les points A et A′ venant d'être déterminés, soit M un point quelconque de (E), il se trouve dans l'un ou l'autre des demi-espaces limités par (P), supposons qu'il soit du même côté que A. On raisonnera de même dans l'autre demi-espace. Soit H la projection orthogonale de M sur (P). On a : $MH = l$, donc : $MH = AI$ (*Fig. 156*).

Les droites MH et AI perpendiculaires à (P) sont parallèles, donc le quadrilatère plan AIHM est un parallélogramme et : MA parallèle à (P).

- **Tout point M de (E) est dans l'un ou l'autre des plans (π) et (π') passant respectivement par A et A′ et parallèles à (P).**

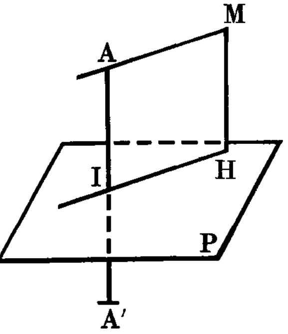


Fig. 156.

3. Synthèse. — Soit M un point appartenant par exemple au plan (π) [on ferait le même raisonnement avec (π')], soit H la projection orthogonale de M sur (P). On a :

MH // AI : perpendiculaires à un même plan.
MA // HI : intersections d'un plan par deux plans parallèles.

Donc MHIA est un parallélogramme et : $MH = AI = l$.

- **Tout point de l'un ou l'autre des plans (π) et (π') appartient à (E).**

Remarque. — Les deux plans parallèles (P) et (π) sont tels que la distance d'un point quelconque de l'un à l'autre est l. Nous appellerons l la **distance** des deux plans parallèles. Nous pouvons alors énoncer :

- **L'ensemble des points qui sont à une distance donnée l d'un plan donné (P) se compose des deux plans (π) et (π') parallèles à (P) et à distance l de (P).**

223. Ensemble des points équidistants de deux plans parallèles donnés. — Soit (P) et (P′) les deux plans parallèles donnés, et $2\,l$ leur distance.

1. Existence de points de l'ensemble. — Soit (d) une perpendiculaire en H à (P), cette droite est perpendiculaire à (P′) en H′. Sur (d), seul le milieu M de HH′ appartient à l'ensemble étudié (*Fig. 157*).

2. Analyse. — Il résulte du 1 que tout point de l'ensemble est à la distance l de (P).

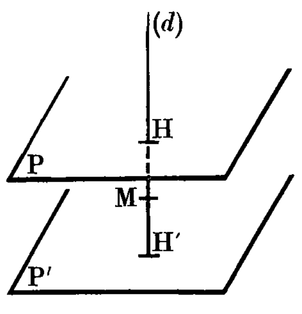


Fig. 157.

- **Tout point M de l'ensemble étudié appartient à la fois à l'ensemble (E) des points à distance l de (P) et à l'ensemble (E′) des points à distance l de (P′). Autrement dit tout point M appartient à l'intersection (E) ∩ (E′).**

3. Synthèse. — Tout point appartenant à (E) ∩ (E′) est à la distance l de (P) et à la distance l de (P′), donc est équidistant de ces deux plans.

- **Tout point de (E) ∩ (E′) est équidistant de (P) et (P′).**

L'ensemble cherché est donc (E) ∩ (E′).

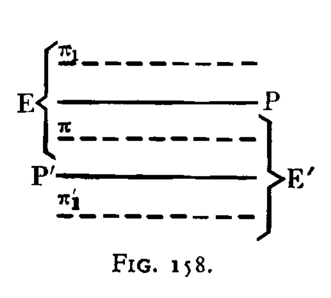


Fig. 158.

4. Détermination de (E) ∩ (E′). — (E) se compose de deux plans : le plan (π), situé dans le demi-espace limité par (P) et contenant (P′); et un autre plan (π_1) dans le demi-espace limité par (P) et ne contenant pas (P′). De même (E′) se compose des deux plans (π) et (π'_1) (*Fig. 158*).

L'intersection de (E) et (E′) est donc le plan (π) que nous appellerons plan équidistant de (P) et (P′). Nous énoncerons :

- **L'ensemble des points équidistants de deux plans parallèles est le plan équidistant des deux plans.**

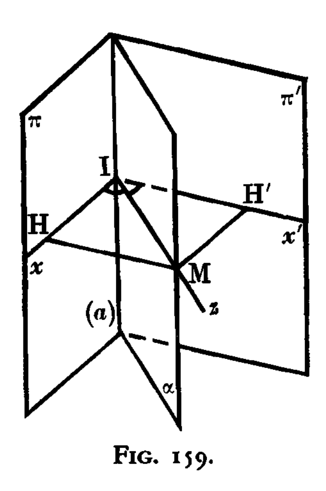


Fig. 159.

224. Propriété caractéristique du bissecteur d'un dièdre. — Soit un dièdre d'arête (a) dont les faces sont les demi-plans (π) et (π'). Soit (α) le demi-plan bissecteur du dièdre (*Fig. 159*).

Soit M un point du bissecteur non situé sur (a); le plan passant par M et perpendiculaire à (a) coupe (a) en I, les demi-plans (π) et (π') suivant Ix et Ix' et (α) suivant Iz. Soit MH et MH′ les perpendiculaires tracées de M sur Ix et Ix'.

La droite MH est orthogonale à (a) puisque (a) est perpendiculaire au plan MHH′. Comme elle est aussi orthogonale à Ix, elle est donc perpendiculaire au demi-plan (π).

De même MH′ est perpendiculaire à (π').

L'angle $\widehat{xIx'}$ est la section droite du dièdre, Iz sa bissectrice, donc MH = MH′.

- **Tout point du bissecteur d'un dièdre est équidistant des deux faces du dièdre.**

Réciproquement, soit M un point équidistant des deux faces du dièdre, MH et MH′ les perpendiculaires de M sur (π) et (π'). On a par hypothèse : MH = MH′.

La droite MH perpendiculaire à (π) est orthogonale à (a) (*Fig. 160*); de même MH′ est orthogonale à (a); donc (a), perpendiculaire à MH et MH′, est perpendiculaire au plan MHH′, qui est le plan de la section droite $\widehat{xIx'}$ du dièdre.

Puisque MH = MH′, le point M équidistant des deux côtés de $\widehat{xIx'}$, est sur la bissectrice de cet angle, donc M est dans le bissecteur du dièdre.

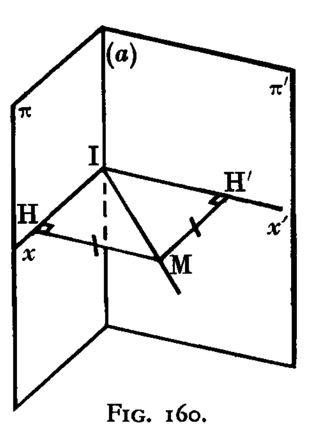


FIG. 160.

- **Tout point équidistant des deux faces d'un dièdre se trouve dans le bissecteur du dièdre.**

Il en résulte alors sans difficulté le résultat suivant :

- **L'ensemble des points équidistants de deux plans sécants donnés, se compose de deux plans perpendiculaires, à savoir les bissecteurs des quatre dièdres formés par ces deux plans.**

225. Ensemble des demi-droites issues d'un point O et qui font avec des demi-droites fixes Ox et Oy des angles égaux. — Supposons qu'il existe une demi-droite Oz appartenant à l'ensemble et soit sur cette demi-droite un point M (*Fig. 161*).

1° ANALYSE. — Marquons sur les demi-droites Ox et Oy, respectivement deux points A et B tels que OA = OB. Nous formons ainsi deux triangles OAM et OBM qui ont : OA = OB par construction, OM commun, $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ par hypothèse.

Ils sont égaux et : MA = MB; le point M est donc dans le plan (P) médiateur du segment AB. Ce plan passe par la bissectrice Ot de l'angle $\widehat{xOy}$.

Toute demi-droite appartenant à l'ensemble étudié se trouve dans le plan (P).

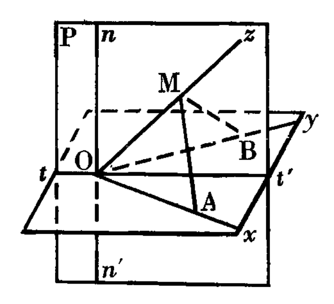


FIG. 161.

2° SYNTHÈSE. — Soit une demi-droite Oz du plan (P). Si M est un point d'une telle droite, on a : MA = MB. Les deux triangles OAM et OBM ont leurs trois côtés respectivement égaux, et : $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$.

L'ensemble cherché est tout le plan médiateur de AB. Il contient la normale n'On au plan xOy passant par O, car cette normale convient, puisqu'elle fait un angle droit avec Ox et Oy.

On remarquera que le plan (P) est le plan passant par le support de Ot et perpendiculaire au plan $\widehat{xOy}$.

▪ **L'ensemble des demi-droites issues d'un point O et qui font avec deux demi-droites fixes Ox et Oy des angles égaux, constitue le faisceau de sommet O dans le plan (P) passant par la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ et perpendiculaire au plan de cet angle.**

226. Conclusion. — On remarquera que la recherche des ensembles en géométrie dans l'espace se fait de la même façon qu'en géométrie plane. Il faut noter qu'on cherche non seulement des ensembles de points, mais des ensembles de droites ou de demi-droites. Enfin lorsque l'ensemble est plan, il faut prendre soin de définir d'abord ce plan avec précision et, dans ce plan, l'ensemble considéré.

Exercices. **1265.** — Ensemble des points équidistants de deux droites parallèles.

1266. — 1° Ensemble des points équidistants de deux droites concourantes.
2° Soit un triangle ABC; ensemble des points équidistants des trois droites AB, BC, et CA.

1267. — Que peut-on dire de l'ensemble des plans médiateurs des cordes d'un cercle?

1268. — Quel est l'ensemble des projections orthogonales d'un point O, sur les plans passant par une droite donnée (d)?

1269. — On donne un plan (P), un point O de ce plan, et un point A non situé dans le plan. Quel est l'ensemble des projections orthogonales du point A sur les droites du faisceau de sommet O dans le plan (P)?

1270. — Démontrer que les plans passant par un point donné O et équidistants de deux points donnés A et B forment deux groupes de plans et que dans chaque groupe les plans passent par une droite fixe. Y a-t-il un plan commun aux deux groupes?

1271. — On donne deux points A et B. Tracer par une droite donnée (D) un plan tel que les distances de A et B à ce plan soient égales (on dit que le plan est équidistant des deux points).

1272. — Tracer par un point un plan équidistant de trois points.

1273. — Déterminer un plan équidistant de quatre points.

1274. — 1° Construire un point équidistant de deux points donnés A et B et situé sur une droite donnée ou sur un cercle donné de l'espace.
2° Construire, dans un plan donné, un point équidistant de trois points donnés A, B, C non dans le plan.

1275. — 1° On donne un plan (P) et deux points A et B d'un même côté de ce plan. Trouver dans (P) un point M tel que MA + MB soit minimum.
2° A et B étant de part et d'autre de (P), trouver dans (P) un point M′ tel que | M′A — M′B | soit maximum.

1276. — On donne une droite (D) et deux points A et B, ces divers éléments n'étant pas dans un même plan. Trouver sur (D) un point M tel que MA + MB soit minimum.

1277. — Soit quatre points A, B, C, D, non coplanaires et tels que trois quelconques ne sont pas alignés. Démontrer qu'il existe un point et un seul, équidistant de ces quatre points.

Exercices.

IV. TRIÈDRES. ANGLES POLYÈDRES

227. Définition d'un trièdre. — Soit trois demi-droites Ox, Oy, Oz, non coplanaires. Elles définissent (*Fig. 162*) :

— trois angles saillants : $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ et $\widehat{zOx}$;

— trois dièdres. L'un d'eux a pour arête le support de Ox, ses faces contiennent l'une Oy, l'autre Oz.

Cet ensemble est **le trièdre** noté $Oxyz$.

Le point O est **le sommet** du trièdre, les demi-droites Ox, Oy, Oz **les arêtes** du trièdre, les angles $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ et $\widehat{zOx}$ **les faces** du trièdre, les trois dièdres d'arêtes Ox, Oy, Oz sont **les dièdres** du trièdre.

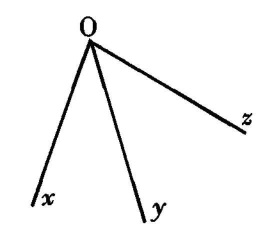


FIG. 162.

Chaque dièdre est **opposé** à une face : le dièdre d'arête Ox est opposé à la face $\widehat{yOz}$; de même la face $\widehat{yOz}$ est opposée au dièdre d'arête Ox.

Si on prend trois points A, B, C sur les arêtes Ox, Oy, Oz du trièdre on obtient un plan ABC qui coupe les trois arêtes du trièdre.

228. Trièdre trirectangle. — Soit un angle droit $\widehat{xOy}$ et une demi-droite Oz perpendiculaire au plan $\widehat{xOy}$. Les trois demi-droites Ox, Oy, Oz définissent un trièdre dans lequel (*Fig. 163*) :

Les faces sont des angles droits : $\widehat{xOy}$ par hypothèse, $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = 1$ D parce que Oz, perpendiculaire au plan $\widehat{xOy}$, est perpendiculaire à Ox et Oy.

Les trois dièdres sont aussi droits, car chaque dièdre a pour section droite, la face opposée.

☆ DÉFINITION. — **Un trièdre trirectangle est un trièdre dans lequel chaque arête est perpendiculaire au plan de la face opposée.**

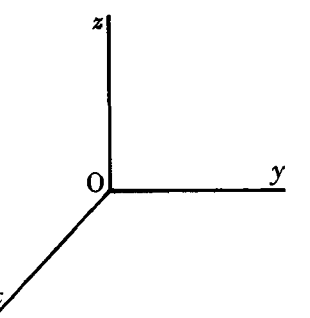
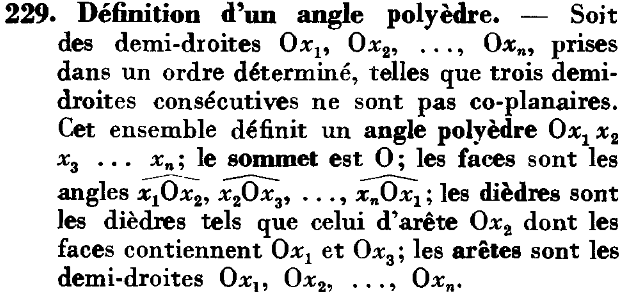


FIG. 163.



229. Définition d'un angle polyèdre. — Soit des demi-droites Ox_1, Ox_2, ..., Ox_n, prises dans un ordre déterminé, telles que trois demi-droites consécutives ne sont pas co-planaires. Cet ensemble définit un **angle polyèdre** $Ox_1 x_2 x_3 \ldots x_n$; **le sommet** est O; **les faces** sont les angles $\widehat{x_1Ox_2}$, $\widehat{x_2Ox_3}$, ..., $\widehat{x_nOx_1}$; **les dièdres** sont les dièdres tels que celui d'arête Ox_2 dont les faces contiennent Ox_1 et Ox_3; **les arêtes** sont les demi-droites Ox_1, Ox_2, ..., Ox_n.

En particulier (*Fig. 164*) on définira un angle polyèdre en considérant un polygone plan ABCDE... et un point O non situé dans ce plan. On obtient l'angle polyèdre O, ABCDE....

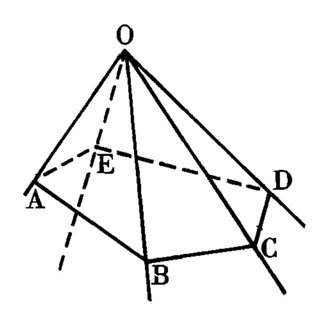


FIG. 164.

Exercices. 1278. — Soit trois droites $\widehat{x'Ox}$, $\widehat{y'Oy}$ et $\widehat{z'Oz}$ non coplanaires.

1° Combien de trièdres déterminent-elles?

2° On pose $\widehat{yOz} = \alpha$, $\widehat{zOx} = \beta$, $\widehat{xOy} = \gamma$. Évaluer en fonction de α, β, γ les faces des trièdres déterminés. Faire un tableau donnant les résultats.

3° On suppose α, β, γ aigus. Conséquences pour les autres trièdres?

4° On suppose α, β, γ obtus. Conséquences pour les autres trièdres?

5° Obtiendrait-on des résultats d'ensemble nouveaux si on faisait pour α, β, γ d'autres hypothèses? Donner alors la classification du point de vue angulaire, des ensembles formés par trois droites.

1279. — Étudier les sections d'un trièdre.

1° par un plan parallèle à une arête;

2° par un plan parallèle à deux arêtes.

1280. — Soit $Oxyz$ un trièdre coupé par un plan (P) suivant un triangle ABC. On appelle D un point intérieur au triangle et on appelle Ot la demi-droite d'origine O contenant D. Quelle est la section de l'angle polyèdre $Oxyzt$ par le plan (P)?

1281. — 1° Soit un trièdre $Oxyz$. On marque sur Oy un point N, sur Oz un point P et sur la demi-droite Ox' opposée à Ox un point M. Quelle est la section du trièdre par le plan MNP?

2° Même question en prenant M sur Ox, N sur Oy' opposée à Oy et P sur Oz' opposée à Oz.

1282. — Un angle polyèdre est défini par son sommet O et une section plane qui est le quadrilatère convexe ABCD. On le coupe par un plan passant par une droite (d) du plan OAB et un point M de l'arête OC. Achever le tracé de la section en recherchant d'abord la droite d'intersection des plans (ABCD) et (d, M).

1283. — 1° Démontrer que les plans bissecteurs des dièdres d'un trièdre se coupent suivant une même droite.

2° Quel est l'ensemble des points équidistants de trois plans concourants en un point?

1284. — On considère un trièdre $Sxyz$ et on porte sur les arêtes des longueurs égales SA = SB = SC.

1° Étudier les traces sur le plan ABC des plans déterminés par une arête et par la bissectrice intérieure de la face opposée. Que peut-on dire des trois plans obtenus?

2° Démontrer que les bissectrices extérieures des faces du trièdre sont dans un même plan.

3° En considérant le trièdre formé par Sx, Sy et par le prolongement Sz' de Sz, démontrer que les bissectrices intérieures de deux faces d'un trièdre et la bissectrice extérieure de la troisième face sont dans un même plan.

1285. — SX est la projection orthogonale de l'arête Sx d'un trièdre sur le plan ySz de la face opposée; SY est la projection de l'arête Sy sur le plan xSz. Les plans xSX et ySY se coupent suivant la droite ST.

1° Étudier les sections planes du trièdre par des plans perpendiculaires à ST.

2° Quel est l'ensemble des orthocentres des sections?

3° Que peut-on dire des plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée (plans hauteurs)?

4° Étudier les droites menées par le sommet d'un trièdre dans chaque face et perpendiculaires à l'arête opposée.

5° Que deviennent les résultats du 3° et du 4°

lorsque : $\widehat{xSy} = 90°$ et lorsque : $\widehat{xSy} = \widehat{xSz} = 90°$?

Exercices.

PROBLÈMES

1286. — Soit un segment AB, une droite (a) perpendiculaire en A à AB, une droite (b) perpendiculaire en B à AB, les droites (a) et (b) n'étant pas dans un même plan. Quelle est la projection orthogonale de cet ensemble sur un plan parallèle à AB?

1287. — 1° On projette orthogonalement un angle sur un plan parallèle à la bissectrice de cet angle. Étudier la projection de l'ensemble formé par l'angle et sa bissectrice.

2° Dans quel cas la bissectrice d'un angle se projette-t-elle orthogonalement sur un plan suivant la bissectrice de la projection?

3° Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle isocèle se projette orthogonalement sur un plan suivant un triangle isocèle.

1288. — Soit deux droites (d) et (d_1) non parallèles, rencontrant un plan (P) et telles que leurs projections orthogonales sur (P) soient parallèles. Soit (δ) une droite variable parallèle à (P) et rencontrant (d) et (d_1). Démontrer que la projection (δ') de (δ) sur (P) passe par un point fixe.

1289. — 1° Soit ABCD un parallélogramme. Déterminer un plan sur lequel ABCD se projette orthogonalement suivant un rectangle; suivant un losange.

2° Comment faut-il choisir le plan de projection pour que la projection orthogonale d'un triangle quelconque soit un triangle isocèle? Un triangle rectangle?

1290. — Soit un segment AA′ et deux droites (D) et (D′) non parallèles et respectivement perpendiculaires en A et A′ à AA′. Soit (P) le plan médiateur de AA′.

Quel est l'ensemble des points du plan (P) équidistants de (D) et (D′)?

1291. — Soit un cercle (C) et deux droites (D) et (D′) rencontrant le plan du cercle en deux points diamétralement opposés A et B. La droite (D) passant par A est perpendiculaire au plan de (C). La droite (D′) passant par B est quelconque.

1° Mener par un point M du cercle une droite qui coupe (D) en A′ et (D′) en (B′). On montrera que ce problème est toujours possible.

2° Démontrer que le plan MAA′ est perpendiculaire au plan MBB′.

3° On coupe l'ensemble par un plan perpendiculaire à (D) en A_1. Ce plan coupe (D′) en B_1 et A′B′ en P. Démontrer que le triangle A_1B_1P est rectangle. Quel est l'ensemble des milieux des hypoténuses?

1292. — Soit un trièdre $Oxyz$. On le coupe par des plans passant par une droite fixe (δ).

1° Démontrer que les côtés du triangle ABC ainsi obtenu, quand il existe, passent chacun par un point fixe. Cas où (δ) est parallèle à l'une des faces, ou à l'une des arêtes.

2° Ensemble des projections orthogonales du point O sur les côtés du triangle ABC.

1293. — Soit un trièdre $Oxyz$, un point A sur Ox, B sur Oy.

1° Faire passer par la droite AB un plan qui coupe le trièdre suivant un triangle isocèle ayant soit AB pour côté principal, soit AB pour un des côtés égaux.

2° Faire passer par cette droite un plan qui coupe le trièdre suivant un triangle rectangle en A.

1294. — Soit un trièdre $Oxyz$, on désigne par Ox', Oy', Oz' les demi-droites opposées à ses arêtes, A, B, C trois points fixes sur ces arêtes. Un plan variable (P) parallèle au plan ABC coupe les droites $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$ respectivement en A′, B′, C′. Soit D, E, F les milieux de BC, CA, AB.

1° Pour quelle position de (P) les droites A′D, B′E, C′F sont-elles parallèles?

2° Démontrer que pour toute autre position de (P) ces droites concourent en M. Ensemble des points M quand (P) varie.

1295. — On donne deux plans sécants (P) et (Q) et une droite (D) quelconque. Par un point M variable sur (D) on mène les plans (P′) et (Q′) respectivement parallèles à (P) et (Q). Les plans (P′) et (Q′) se coupent suivant une droite (Δ).

Quel est l'ensemble des droites (Δ)?

1296. — Dans un trièdre, l'un des dièdres est droit. On considère les sections du trièdre par des plans perpendiculaires à l'une des arêtes. Démontrer que les sections obtenues sont des triangles rectangles.

CHAPITRE XVI

SYMÉTRIES

I. DÉFINITIONS

230. Définitions.

1. Symétrie par rapport a un point.

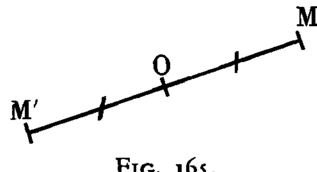


Fig. 165.

☆ **Étant donné un point O appelé centre de symétrie, on appelle symétrique, par rapport à O, d'un point M de l'espace, le point M' tel que O soit le milieu de MM'.**

Le point O est son propre symétrique (*Fig. 165*).

Si M et O sont donnés, le point M' est sur la droite OM, tel que O soit le milieu de MM'.

2. Symétrie par rapport a un plan.

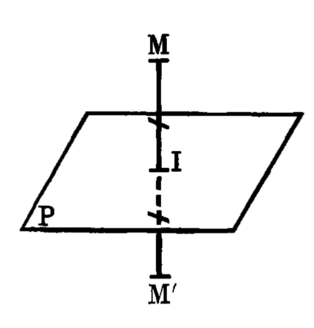


Fig. 166.

☆ **Étant donné un plan (P) appelé plan de symétrie, on appelle symétrique, par rapport à (P), d'un point M de l'espace le point M' tel que (P) soit le plan médiateur de MM'.**

Tout point du plan (P) est son propre symétrique (*Fig. 166*).

Si M et (P) sont donnés, le point M' est sur la perpendiculaire MI du point M sur (P), tel que I est le milieu de MM'.

3. Symétrie par rapport a une droite.

☆ **Étant donné une droite (D) appelée axe de symétrie, on appelle symétrique, par rapport à (D), d'un point M, le point M′ tel que, dans le plan (M, D), la droite (D) soit médiatrice de MM′.**
Tout point de la droite (D) est son propre symétrique (*Fig. 167*).

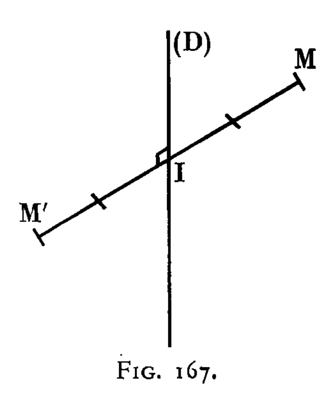


Fig. 167.

Si M et (D) sont donnés, le point M′ est sur la perpendiculaire MI de M sur (D), tel que I soit le milieu de MM′.

Il résulte d'abord de ces définitions que ces trois transformations sont réciproques : si au point M correspond le point M′, réciproquement au point M′ correspond le point M. Nous dirons alors que les deux points M et M′ sont symétriques par rapport au point O, ou par rapport au plan (P), ou par rapport à la droite (D).

Si M est un point appartenant à un ensemble (E), les points M′ symétriques de ces points M, définissent l'ensemble (E′), symétrique de (E) par rapport au point O, à la droite (D), ou au plan (P).

Si l'ensemble (E) est plan et si ce plan passe par le centre de symétrie, ou par l'axe de symétrie, l'ensemble (E′) est situé dans le même plan. La symétrie par rapport à une droite et la symétrie par rapport à un point peuvent alors être considérées comme des transformations planes que nous allons d'abord étudier.

II. SYMÉTRIE PLANE PAR RAPPORT A UNE DROITE

231. Symétrique d'une droite par rapport à une droite, dans le plan. — Soit (d) la droite donnée et (D) l'axe de symétrie.

1. La droite (d) est parallèle a (D). — Soit a la distance de ces deux droites. Soit M un point de (d), M′ son symétrique par rapport à (D), I le milieu de MM′ sur (D). On a $MI = M'I = a$ (*Fig. 168*).

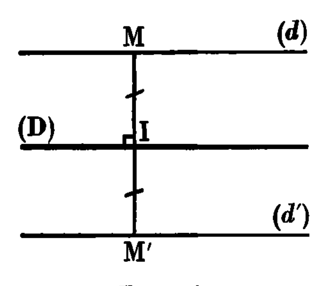


Fig. 168.

Donc M′ appartient à l'ensemble des points du plan qui sont à la distance a de (D). Comme il n'est pas sur (d), il est sur (d') parallèle à (d), à la distance a de (D). La transformation étant réciproque, tout point de (d') est le symétrique d'un point de (d).

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'une droite (d) parallèle à l'axe de symétrie est une droite (d') parallèle telle que l'axe de symétrie est la parallèle équidistante de (d) et (d').**

2. LA DROITE (d) N'EST PAS PARALLÈLE A (D). — Soit I le point d'intersection de (d) et (D), M un point de (d), M′ son symétrique (*Fig. 169*).

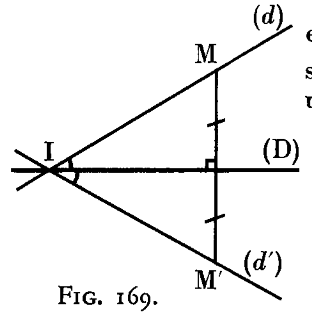


FIG. 169.

Pour le triangle IMM′, la droite (D) est médiane et hauteur, le triangle est isocèle et (D) est bissectrice de l'angle $\widehat{MIM'}$. La transformation étant réciproque, nous pouvons conclure :

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'une droite (d) qui rencontre l'axe (D) est une droite (d') telle que (D) est une des bissectrices des angles formés par (d) et (d').**

En particulier si (d) est perpendiculaire à (D), cette droite est sa propre symétrique.

232. Symétrique d'un segment. — Soit un segment AB et son symétrique A′B′ par rapport à (D).

1. SI AB EST PARALLÈLE A (D). — On a également A′B′ parallèle à (D).

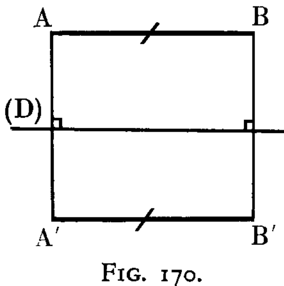


FIG. 170.

Comme AA′ et BB′, toutes deux perpendiculaires à (D), sont parallèles le quadrilatère AA′B′B est un parallélogramme et AB = A′B′ (*Fig. 170*).

2. SI AB COUPE (D) EN I. — Plusieurs cas sont possibles :

a) I *confondu avec* A. Alors A′ est confondu avec A. Nous avons vu nº 231, 2 que le triangle IBB′ s'il existe est isocèle donc :

$$AB = A'B' \ (Fig.\ 171).$$

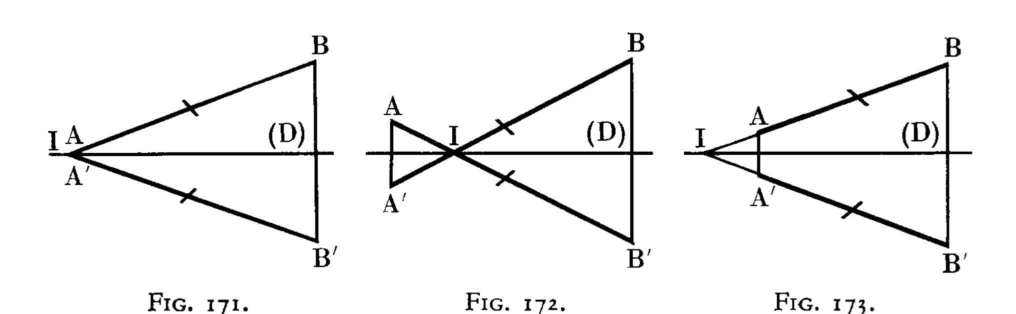


FIG. 171. FIG. 172. FIG. 173.

b) I *entre* A *et* B. Alors I est entre A′ et B′ (*Fig. 172*). Le cas *a*) nous donne :

$$IA = IA'.$$
$$IB = IB'.$$

Par addition : $AB = A'B'.$

c) A *entre* I *et* B. Alors A′ est entre I et B′. On a (*Fig. 173*) :

$$IB = IB'.$$
$$IA = IA'.$$

Par soustraction : $AB = A'B'.$

Les autres cas se ramènent aux cas ci-dessus par permutation des lettres A et B. Nous énoncerons :

- **Le symétrique d'un segment est un segment égal. Les extrémités des deux segments sont symétriques ainsi que leurs supports.**

Il en résulte :

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'une demi-droite est une demi-droite, les origines des deux demi-droites étant symétriques ainsi que leurs supports.**

233. Symétrique d'un angle. — Soit un angle $\widehat{xOy}$, un point A sur Ox et B sur Oy, soit O′x' et O′y' les symétriques respectifs de Ox et Oy, A′, B′ les symétriques respectifs de A et B par rapport à (D). On a dans tous les cas (*Fig. 174*) :

$$OA = O'A', \quad OB = O'B', \quad AB = A'B'.$$

Les deux triangles OAB et O′A′B′ étant égaux, on a :

$$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}.$$

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'un angle est un angle égal; les sommets des deux angles étant symétriques ainsi que leurs côtés.**

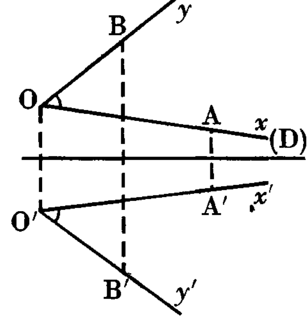


FIG. 174.

Exercices. 1297. — Quel est le symétrique d'un parallélogramme par rapport à une droite de son plan? d'un rectangle? d'un losange? d'un carré?

1298. — Quel est le symétrique d'un cercle par rapport à une droite de son plan? Quel est le symétrique de l'intérieur du cercle?

1299. — Quel est le symétrique de l'ensemble formé par un angle et sa bissectrice?

1300. — On considère l'ensemble des droites qui passent par un point fixe O. Quel est l'ensemble des symétriques d'un point fixe A par rapport à ces droites?

Exercices.

III. SYMÉTRIE PLANE PAR RAPPORT A UN POINT

234. Symétrique d'une droite par rapport à un point. — Soit une droite (d) et O le centre de symétrie.

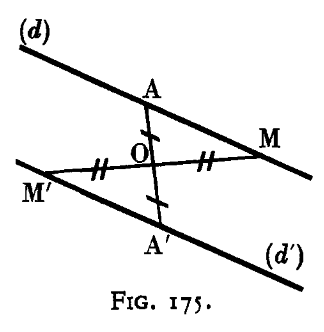


FIG. 175.

1. O SUR (d). — Si M est un point de (d) et M' son symétrique. Les trois points O, M et M' étant alignés, il en résulte :

- THÉORÈME. — **Une droite (d) passant par le centre de symétrie est invariante globalement dans cette symétrie.**

2. O NON SUR (d). — Soit A un point de (d), A' son symétrique; M un point quelconque de (d) et M' son symétrique.

Le point O est le milieu de AA'; le point O est le milieu de MM', donc AMA'M' est un parallélogramme et A'M' est parallèle à AM. Il en résulte (*Fig. 175*) :

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'une droite (d) ne passant pas par le centre de symétrie est une droite (d') parallèle à (d), telle que O est équidistant de (d) et (d').**

235. Symétrique d'un segment. — Soit un segment AB, A' et B' les symétriques de A et B.

1° AB *passe par* O.

a) A en O $\Longrightarrow$ A' en O. Par définition OB = OB' $\Longrightarrow$ AB = A'B'.

b) O entre A et B $\Longrightarrow$ O entre A' et B'; $\begin{matrix} OA = OA' \\ OB = OB' \end{matrix}$ $\Longrightarrow$ AB = A'B'.

c) A entre O et B $\Longrightarrow$ A' entre O et B'; $\begin{matrix} OB = OB' \\ OA = OA' \end{matrix}$ $\Longrightarrow$ AB = A'B'.

2. AB *ne passe pas par* O.

$\left.\begin{matrix} \text{O milieu de AA'} \\ \text{O milieu de BB'} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ ABA'B' parallélogramme $\Longrightarrow$ AB = A'B'.

Il en résulte :

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'un segment est un segment égal et parallèle, les extrémités des deux segments étant symétriques ainsi que leurs supports.**

Et :

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'une demi-droite est une demi-droite, les origines des deux demi-droites étant symétriques ainsi que leurs supports.**

236. Symétrique d'un angle. — En reprenant le raisonnement du n° 233, on peut énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'un angle est un angle égal, les sommets des angles étant symétriques ainsi que leurs côtés.**

Exercice. 1301. — Reprendre les exercices n°s 1298 et 1299, en remplaçant « symétrie par rapport à une droite », par « symétrie par rapport à un point ».

Exercice.

IV. SYMÉTRIES DANS L'ESPACE

237. Symétrie par rapport à un plan.

1. Symétrique d'une droite. — Si la droite (d) est perpendiculaire au plan de symétrie (P), elle est sa propre symétrique.

Soit (d) non perpendiculaire à (P). Soit M un point de (d) (*Fig. 176*), M′ son symétrique par rapport à (P).

Le milieu I de MM′ est la projection orthogonale de M sur (P). Soit (δ) la projection orthogonale de (d) sur (P).

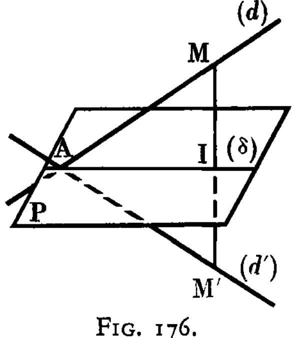


Fig. 176.

Les droites (d) et (δ) sont situées dans le plan (π) passant par (δ) et perpendiculaire à (P). Dans ce plan (π), M′ est le symétrique de M par rapport à (δ).

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'une droite (d), par rapport à un plan (P) non perpendiculaire à (d), est la droite (d') symétrique de (d) par rapport à la droite (δ) projection orthogonale de (d) sur (P).**

2. Symétriques d'un segment et d'une demi-droite. — Le résultat résulte du théorème précédent et de la symétrie plane par rapport à une droite. Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'un segment par rapport à un plan est un segment égal, les extrémités des deux segments étant symétriques ainsi que leurs supports.**

Et :

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'une demi-droite par rapport à un plan est une droite, les origines des deux demi-droites étant symétriques ainsi que leurs supports.**

Le même raisonnement que précédemment nous donne :

3. Symétrique d'un angle.

■ **THÉORÈME. — Le symétrique d'un angle est un angle égal, les sommets étant symétriques ainsi que les côtés.**

4. Symétrique d'un plan. — Soit (π) donné, (P) le plan de symétrie.

Si le plan (π) est parallèle à (P), soit *a* sa distance à (P). Soit M un point de (π), M′ son symétrique, I le milieu de MM′, on a M′I = *a*. D'où comme au n° 231, le résultat :

■ **THÉORÈME. — Le symétrique d'un plan (π) parallèle au plan de symétrie est un plan parallèle (π′) tel que le plan de symétrie est équidistant des plans (π) et (π′).**

Si le plan (π) coupe le plan (P) suivant une droite (*a*) (*Fig. 177*), soit A un point de (π) non situé sur (*a*) et A′ le symétrique de A. Soit (*d*) la parallèle à (*a*) tracée par A, et (*d*′) la symétrique de (*d*). Les droites (*d*) et (*d*′) sont parallèles et équidistantes de (P).

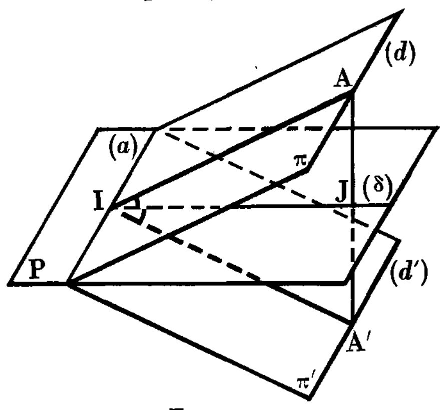


Fig. 177.

Le plan (π) est l'ensemble constitué par la droite (*d*) et les droites passant par A rencontrant (*a*), donc le symétrique de (π) est le plan (π′), défini par le point A′ et la droite (*a*). Soit alors (Q) le plan perpendiculaire à (*a*) passant par A, il coupe (*a*) en I, (*d*′) en A′ et le plan (P) suivant la droite (δ) joignant I au milieu J de AA′.

On a : IA = IA′ par symétrie, IJ perpendiculaire à AA′; donc IJ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AIA'}$.

Comme le plan (Q) détermine une section droite des dièdres définis par (π) et (π′), nous pouvons énoncer :

■ **THÉORÈME. — Le symétrique d'un plan (π) qui coupe le plan de symétrie est un plan (π′) tel que (P) soit le bissecteur d'un des dièdres formés par (π) et (π′).**

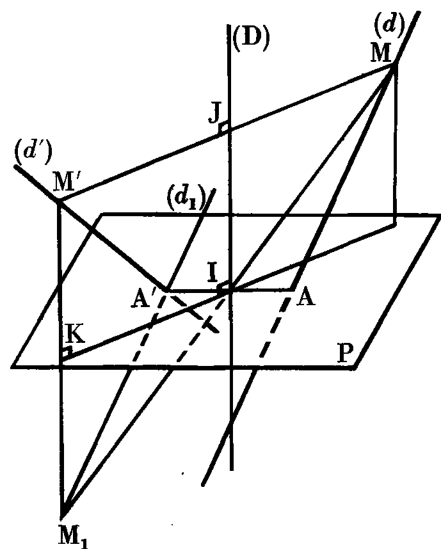


Fig. 178.

238. Symétrie par rapport à une droite.

1. Symétrique d'une droite. — Nous avons étudié ce problème (n° 231) lorsque la droite donnée rencontre l'axe, ou lui est parallèle. Nous étudierons simplement le cas où la droite (*d*) est non coplanaire avec l'axe (D).

Soit A un point de (d), A′ son symétrique, I milieu de AA′, M un autre point quelconque de (d), M′ son symétrique, J milieu de MM′ (*Fig. 178*). Soit M_1 et (d_1) les symétriques respectifs de M et (d) par rapport à I.

Dans le plan [M, D], le segment IJ joint les milieux de deux côtés du triangle MM_1M', donc IJ est parallèle à M_1M'.

Soit (P) le plan perpendiculaire en I à (D); il coupe M_1M' en K et IK est parallèle à MM′, puisque ces deux droites sont dans un même plan et orthogonales à (D); donc K est le milieu de M_1M'. Il en résulte que les points M′ et M_1 sont symétriques par rapport à (P). Le point M′ décrit la droite (d') symétrique de (d_1) par rapport au plan (P). En remarquant que :

$$AM = A'M_1 = A'M',$$ nous énoncerons :

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'une droite (d) par rapport à une droite (D), est une droite (d'), les droites (d) et (d') n'étant pas en général coplanaires.**

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'une demi-droite par rapport à une droite est une demi-droite, les origines étant symétriques ainsi que les supports.**

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'un segment par rapport à une droite est un segment égal, les extrémités des deux segments étant symétriques ainsi que leurs supports.**

On démontre alors comme précédemment :

- THÉORÈME. — **Le symétrique d'un angle est un angle égal, les sommets des deux angles étant symétriques ainsi que leurs côtés.**

2. Symétrique d'un plan. — Soit un plan (π) et un axe de symétrie (D). Nous envisagerons deux cas :

1er *cas* : Le plan (π) est parallèle à (D). Soit (a) et (b) deux droites de (π) parallèles à (D), A un point de (a). Le plan (π) est l'ensemble formé par les droites (a) et les droites passant par A et rencontrant (b) (*Fig. 179*).

Soit A′, (a'), (b') les symétriques des éléments correspondants, les droites (a') et (b') étant parallèles à (D). Le symétrique de (π) est le plan (π') défini par les droites parallèles (a') et (b').

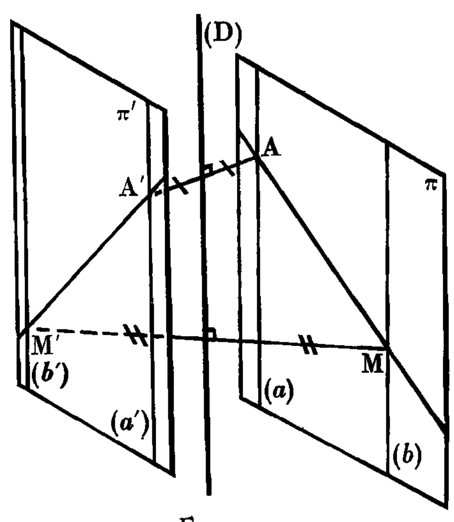


Fig. 179.

Nous pouvons énoncer :

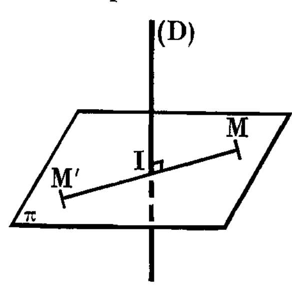


FIG. 180.

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'un plan (π) parallèle à l'axe de symétrie (D) est un plan (π′) parallèle à (D), l'axe (D) étant équidistant de (π) et (π′).**

2e *cas : Le plan* (π) *coupe* (D) *en* I. — Si le plan (π) est perpendiculaire à (D), le plan (π) est alors invariant, la transformation dans ce plan étant une symétrie par rapport à I (*Fig. 180*).

Ce cas étant écarté soit (*d*) la droite d'intersection du plan (π) avec le plan perpendiculaire en I à (D), et (*a*) une droite de (π) parallèle à (*d*) (*Fig. 181*). (*d*) est invariante dans la symétrie, soit (*a*′) la symétrique de (*a*). Le symétrique du plan (π) est le plan (π′) des deux droites parallèles (*d*) et (*a*′).

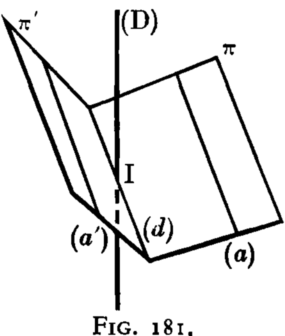


FIG. 181.

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique d'un plan (π) par rapport à une droite (D), le plan (π) n'étant ni parallèle ni perpendiculaire à (D), est un plan (π′) qui coupe (π) suivant une droite (*d*) perpendiculaire à (D) et rencontrant cette droite.**

239. Symétrie par rapport à un point. — Les symétriques d'une droite, d'un segment d'une demi-droite, ont été étudiés en géométrie plane. Il en résulte que le symétrique d'un angle est un angle situé dans le même plan ou dans un plan parallèle, les sommets et les côtés des deux angles étant respectivement symétriques. On pourrait en déduire le symétrique d'un plan. Traitons directement ce problème.

Soit un centre de symétrie O et un plan (P). Si (P) passe par O, il est globalement invariant.

Si (P) ne passe pas par O, soit H le pied de la perpendiculaire de O sur (P) et H′ le symétrique de H (*Fig. 182*). Soit M un point quelconque de (π) et M′ son symétrique. Les triangles OHM et OH′M′

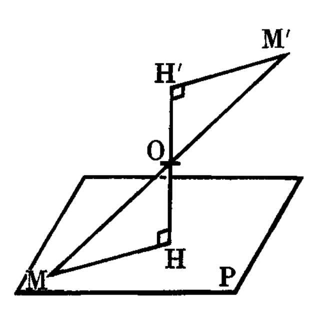


FIG. 182.

ont : $\begin{matrix} OH = OH' \\ OM = OM' \end{matrix}$ par définition de la symétrie.

$\widehat{HOM} = \widehat{H'OM'}$: opposés par le sommet.

Ils sont égaux et par suite $\widehat{OH'M'} = 1D$. Le point M′ se trouve sur le plan (π′) passant par H′ et perpendiculaire à HH′. Par suite de la réciprocité de la symétrie on peut énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Le symétrique, par rapport à un point O, d'un plan (π) ne passant pas par O est le plan (π′) parallèle à (π), tel que O soit équidistant de (π) et (π′).**

Exercices. 1302. — Quel est l'ensemble symétrique d'un cercle :

1° Par rapport à un point situé hors de son plan?

2° Par rapport à une droite parallèle à son plan, ou une droite quelconque?

3° Par rapport à un plan, parallèle ou sécant au plan du cercle?

1303. — Quel est l'ensemble symétrique d'un dièdre par rapport à un point, à une droite, à un plan? On étudiera les différents cas possibles.

1304. — Quel est l'ensemble symétrique de l'ensemble formé par deux droites parallèles? On étudiera les trois cas de la symétrie par rapport à une droite, un point, un plan. **Exercices.**

V. ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UN ENSEMBLE

240. Définitions. — Nous désignerons par **élément de symétrie** e, un plan, un point ou une droite, considérés comme plan de symétrie, ou centre de symétrie, ou axe de symétrie.

☆ DÉFINITION. — **Étant donné un ensemble géométrique (E), un élément e est un élément de symétrie de (E) si le symétrique M′ de tout point M de (E) appartient lui-même à (E).**

Les trois symétries étant des transformations réciproques, il résulte de la définition que tout point de (E) peut être considéré comme le symétrique par rapport à e d'un autre point de (E).

Nous allons étudier quelques exemples aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace.

241. Géométrie plane.

1. Triangle. — *Un triangle peut-il avoir un centre de symétrie?* Soit O un tel centre, s'il existe.

Ou bien O est confondu avec un des sommets, A par exemple et B et C symétriques par rapport à O, ce qui donne A milieu de BC; le triangle n'est pas propre.

Ou bien O est distinct des trois sommets, ce qui conduit à une impossibilité car O serait, par exemple, le milieu de BC, le symétrique de A ne peut être un sommet du triangle.

Un triangle admet-il un axe de symétrie? Cet axe, s'il existe, passe nécessairement par un sommet A et les deux autres sommets B et C sont symétriques; il en résulte AB = AC, le triangle est isocèle.

Réciproquement, un triangle isocèle admet pour axe de symétrie la bissectrice principale.

▪ THÉORÈME. — **Le fait d'avoir un axe de symétrie caractérise le triangle isocèle.**

2. Droites parallèles. — Soit (d) et (d') ces deux droites, (D) la parallèle équidistante.

- **Tout point de (D) est centre de symétrie de l'ensemble (E) formé par (d) et (d').**

- **Toute droite perpendiculaire à (d) et (d'), dans leur plan, est axe de symétrie de (E).**
  La droite (D) est axe de symétrie de (E).

3. Droites concourantes. — Soit (d) et (d') concourantes en O; (D) et (D$'$) les bissectrices des angles formés par ces deux droites.

- **Le point O est centre de symétrie.**
  Chacune des droites (D) et (D$'$) est axe de symétrie.

Remarquons que chacune des droites (d) et (d') est axe de symétrie, si ces deux droites sont perpendiculaires.

4. Parallélogramme.

- **Le centre du parallélogramme est centre de symétrie.**

Un parallélogramme ABCD peut-il avoir un axe de symétrie (Δ)?

Ou bien (Δ) est médiatrice de AB et de CD, alors AD et BC sont symétriques, donc parallèles à (Δ) et par suite perpendiculaires à AB : ABCD est un rectangle.

Ou bien (Δ) passe par A et C, alors B et D sont symétriques, AC et BD sont perpendiculaires; ABCD est un losange.

- THÉORÈME. — **Tout parallélogramme qui admet un axe de symétrie est un rectangle ou un losange.**

Inversement, un rectangle ABCD admet pour axes de symétrie les deux droites joignant les milieux de deux côtés opposés.

Un losange admet pour axes de symétrie ses diagonales.

Il en résulte que le carré admet un centre de symétrie, et quatre axes de symétrie : les deux diagonales et les droites joignant les milieux de deux côtés opposés.

5. Cercle.

- **Le cercle admet pour centre de symétrie son centre, et pour axe de symétrie tout diamètre.**

6. Une droite et un cercle. — Si la droite (d) passe par le centre O du cercle (C), le point O est centre de symétrie de l'ensemble, la droite (d) elle-même axe de symétrie, et également la perpendiculaire en O à (d).

Si (d) ne passe pas par O, il n'y a pas de centre de symétrie, mais un axe : la perpendiculaire tracée de O à (d).

242. Espace.

1. Un plan. — Un plan est plan de symétrie pour lui-même et tout plan perpendiculaire est plan de symétrie. Tout point du plan est centre de symétrie. Toute droite du plan et toute droite perpendiculaire au plan sont axes de symétrie.

2. Deux plans parallèles. — Soit (π) et (π') deux plans parallèles et (P) le plan équidistant de (π) et (π').

Tout point O de (P) est centre de symétrie.

Toute droite de (P) et toute droite perpendiculaire à (P) est axe de symétrie.

Le plan (P) et tout plan perpendiculaire à (P) sont plans de symétrie.

3. Deux plans sécants. — Soit (d) la droite commune à (π) et (π'), (P) et (Q) les plans qui portent les bissecteurs des dièdres formés par (π) et (π').

Tout point de (d) est centre de symétrie.

La droite (d) et toute droite perpendiculaire à (d) située dans (P) ou (Q) sont axes de symétrie.

Les plans (P) et (Q) et tous les plans perpendiculaires à (d) sont plans de symétrie.

Si les plans (π) et (π') sont perpendiculaires, les droites perpendiculaires à l'un tracées dans l'autre sont axes de symétrie, et les plans (π) et (π') sont plans de symétrie.

4. Cercle. — Notons que dans l'espace, l'axe du cercle est axe de symétrie, le plan du cercle et tous les plans passant par l'axe sont plans de symétrie.

243. Problème. — *Étude d'un ensemble* (E) *admettant deux plans de symétrie rectangulaires.*

Soit (P) et (Q) les deux plans de symétrie, (D) leur droite d'intersection. Soit M un point de (E), M′ son symétrique par rapport à (P) et M″ le symétrique de M′ par rapport à (Q). Quel que soit M de (E), M″ appartient à (E). Réciproquement, M″ quelconque de (E) est le symétrique de M′ par rapport à (Q), lui-même le symétrique de M par rapport à (P).

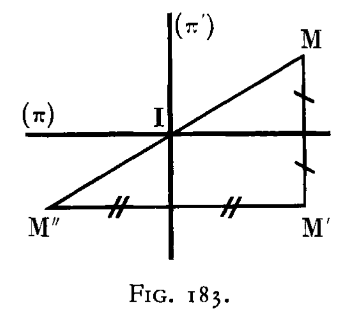


Fig. 183.

La figure étant faite dans le plan passant par M et perpendiculaire à (D) en I (*Fig. 183*), le triangle rectangle MM′M″ a pour centre du cercle circonscrit I, point de rencontre de deux médiatrices; donc I est le milieu de MM″; il en résulte que les points M″ et M sont symétriques par rapport à (d).

▪ THÉORÈME. — **Si un ensemble admet deux plans de symétrie rectangulaires, il admet pour axe de symétrie la droite d'intersection des deux plans.**

Exercices. **1305.** — Quels sont les éléments de symétrie d'un segment AB?

1306. — Étudier le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des côtés d'un rectangle.

1307. — Étudier le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des côtés d'un losange.

1308. — Étudier le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des côtés d'un carré.

1309. — Un trapèze isocèle est un trapèze dont les côtés non parallèles sont égaux.
1° Démontrer qu'un tel trapèze a un axe de symétrie. Énoncer et démontrer une réciproque.
2° En déduire que les angles du trapèze isocèle sont égaux deux à deux. Énoncer et démontrer une réciproque.

1310. — On considère un cercle (C) et deux points A et B. Étudier, suivant les cas de figure, les éléments de symétrie de l'ensemble.

1311. — Éléments de symétrie de l'ensemble formé :
par un plan et une droite; par un plan et deux points.
par une droite et deux points; par deux plans et une droite. **Exercices.**

PROBLÈMES

1312. — Que peut-on dire d'un ensemble admettant :
1° Un plan de symétrie (P) et un centre de symétrie situé dans (P)?
2° Un plan de symétrie (P) et un axe de symétrie perpendiculaire à (P)?
3° Un axe de symétrie et un centre de symétrie situé sur cet axe?

1313. — A tout point M de l'espace on associe le point M′ tel que MM′ soit parallèle à une droite fixe (D), et que le milieu O de MM′ soit dans un plan (P) donné, non parallèle à (D). Quel est l'ensemble des points M′ associés aux points M d'un plan, ou d'une droite?

1314. — Soit un ensemble (E), et (E_1) son symétrique par rapport à un point O_1, puis le symétrique (E_2) de (E_1) par rapport à un point O_2, et enfin (E_3) symétrique de (E_2) par rapport à O_3.
1° Démontrer que (E_3) est symétrique de (E) par rapport à un point O.
2° Quel est l'ensemble des points O lorsque l'un des points O_1, O_2, O_3 décrit une droite dans un plan fixe passant par les deux autres points supposés fixes?

1315. — Soit un demi-cercle (C) d'extrémités A et B; soit (C′) le symétrique de (C) par rapport à A et (C″) le symétrique de (C) par rapport à B.
L'ensemble obtenu admet-il un centre de symétrie? Un axe de symétrie?

1316. — On donne une droite (D) et un point A.
1° Trouver sur une droite (D′) un point M′ et sur la droite (D) un point M tels que A soit le milieu de MM′.
2° Même question en remplaçant la droite (D) par le cercle (C).

1317. — Quels sont les éléments de symétrie de l'ensemble plan formé par
— deux cercles égaux?
— un cercle et un point?

1318. — Construire le symétrique B d'un point A par rapport au point O; le symétrique C de A par rapport à O′ et le symétrique D de B par rapport à O′. Montrer que C et D sont symétriques par rapport à un point I qu'on déterminera par rapport à O et O′.

1319. — Comment choisir cinq points pour que l'ensemble qu'ils déterminent admettent un centre de symétrie?

LIVRE VI

ÉLÉMENTS ORIENTÉS VECTEURS

CHAPITRE XVII

GÉOMÉTRIE RECTILIGNE

I. GÉNÉRALITÉS

244. Segment orienté. Demi-droites orientées. — Un segment est orienté quand on prend ses extrémités dans un certain ordre. Il y a deux façons d'orienter un segment AB. L'une lui confère le sens allant de A vers B, l'autre le sens allant de B vers A.

Une demi-droite Ox est orientée par un segment orienté OM, M étant un point quelconque de cette demi-droite. Une demi-droite détermine un sens.

Une droite est orientée quand on choisit sur cette droite une demi-droite qui lui confère un sens. Nous admettrons qu'il y a deux sens possibles sur une droite, définis par les deux demi-droites obtenues en marquant un point sur la droite.

245. Axe. Valeur algébrique d'un segment orienté sur son support orienté.

☆ DÉFINITION. — **Un axe est une droite orientée sur laquelle on a choisi un point O appelé point initial, et une unité de longueur.**

On notera un axe $x'Ox$, Ox étant le sens de l'axe.
Soit un axe $x'Ox$ et un segment orienté AB porté par cet axe.

☆ DÉFINITION. — **On appelle valeur algébrique d'un segment orienté AB sur son support orienté, le nombre réel, noté $\overline{AB}$, dont la valeur absolue est la mesure de la longueur AB, ce nombre étant positif si le segment orienté et l'axe ont le même sens, et négatif si le segment orienté et l'axe sont de sens contraires.**

Si le segment est nul, sa valeur algébrique est 0; les nombres $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont symétriques :

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

246. Théorème de Chasles[1]. — Soit, sur un axe, trois points A, B, C tels que le segment AC ait le sens de l'axe, et B entre A et C. On a (*Fig. 184*) :

$$\overline{AC} > 0, \qquad \overline{AB} > 0, \qquad \overline{BC} > 0 \qquad \text{et} \qquad AC = AB + BC,$$

donc :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

En ajoutant $\overline{CA}$ aux deux membres, il vient :

$$\overline{AC} + \overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA},$$

A B C

FIG. 184.

donc :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Cette relation étant symétrique par rapport aux trois points A, B, C, on peut énoncer :

▪ THÉORÈME DE CHASLES. — **Si A, B, C sont trois points quelconques sur un axe $x'Ox$ on a :**

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

CONSÉQUENCES. — 1. Il résulte immédiatement de la formule ci-dessus :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}, \qquad \text{ou :} \qquad \overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}.$$

2. Soit un quatrième point D sur l'axe, on a :

$$\overline{CA} = \overline{CD} + \overline{DA}.$$

Donc en utilisant la propriété d'associativité de l'addition algébrique :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0.$$

On étendra sans difficulté la propriété à un nombre quelconque de points.

1. CHASLES (1793-1880), mathématicien français.

II. ABSCISSE D'UN POINT SUR UN AXE. APPLICATIONS

247. Abscisse d'un point sur un axe. — Soit un axe $x'Ox$ et un point M quelconque de cet axe. A ce point M on fait correspondre le nombre réel $x = \overline{OM}$.

Réciproquement, soit un nombre réel x. Si $x > 0$, il lui correspond sur la demi-droite Ox, le point M tel que $OM = x$.

Si $x < 0$, il lui correspond sur la demi-droite Ox', le point M tel que $OM = |x|$.

Si $x = 0$, il lui correspond le point O. Dans les trois cas on a $\overline{OM} = x$.

☆ DÉFINITIONS. — **Le nombre réel $x = \overline{OM}$ est l'abscisse du point M. Le point M tel que $\overline{OM} = x$ est l'image du nombre réel x.**

On a ainsi établi une correspondance dite biunivoque entre un point de l'axe et un nombre réel. Tout problème posé sur les points d'un axe se trouve ainsi ramené à un problème sur les nombres réels. Nous allons étudier quelques-uns de ces problèmes.

248. Valeur algébrique d'un segment orienté défini par les abscisses de ses extrémités. — Soit un segment orienté AB porté par l'axe Ox, il est défini par :

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b.$$

Le théorème de Chasles donne :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \qquad \text{donc :} \qquad \overline{AB} = b - a.$$

▪ THÉORÈME. — **La valeur algébrique d'un segment orienté sur son support orienté est la différence entre l'abscisse de son extrémité et l'abscisse de son origine.**

Notons que la longueur du segment est : $AB = |b - a|$.

249. Abscisse du milieu d'un segment. — Soit AB défini par :

$$\overline{OA} = a; \qquad \overline{OB} = b.$$

Soit I le milieu de AB, on a (*Fig. 185*) :

$$\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AI}.$$
$$\overline{OI} = \overline{OB} + \overline{BI}.$$

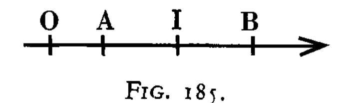


FIG. 185.

En remarquant que par définition :

$$\overline{AI} + \overline{BI} = 0,$$

il vient par addition : $2\,\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{OB}$, et : $\overline{OI} = \dfrac{a+b}{2}$.

▪ THÉORÈME. — **L'abscisse du milieu d'un segment est la demi-somme des abscisses de ses extrémités.**

250. Changement d'origine. — Soit sur un axe $x'Ox$ un point O′ défini par

$$\overline{OO'} = x_0.$$

Soit M un point quelconque de l'axe, x son abscisse quand on prend O pour point initial (ancienne abscisse); x' son abscisse quand on prend O′ pour point initial (nouvelle abscisse). Le théorème de Chasles donne :

$$\overline{O'M} = \overline{O'O} + \overline{OM}, \quad \text{soit} \quad x' = x - x_0.$$

▪ THÉORÈME. — **La nouvelle abscisse d'un point est la différence entre l'ancienne abscisse de ce point et l'ancienne abscisse de la nouvelle origine.**

Exercices. 1320. — Soit, sur un axe, trois points A, B, C et un point M quelconque. Démontrer que :

$$\overline{AM} \times \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{CM} + \overline{AC} \times \overline{MB} = 0$$

$$\overline{MA}^2 \times \overline{BC} + \overline{MB}^2 \times \overline{CA} + \overline{MC}^2 \times \overline{AB} + \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CA} = 0.$$

1321. — Soit, sur une droite, un segment AB de milieu I, M un point quelconque de la droite AB; E et F les milieux respectifs de MA et MB. Démontrer que les segments MI et EF ont même milieu.

1322. Soit, sur un axe de point initial O, les points A et M tels que $\overline{OM} = x$, $\overline{OA} = a$. Calculer $x' = \overline{OM'}$ tel que le point A soit le milieu de MM′.

1323. On donne, sur un axe, n points A, B, C, ... L. Déterminer sur cet axe le point initial O pour que la somme des abscisses des n points soit nulle.

Indiquer la position du point O : 1° pour deux points,
2° pour trois points.

1324. — Sur un axe, on a placé les points O, O′, A, A′ et l'on pose : $\overline{OO'} = d$; $\overline{OA} = a$; $\overline{O'A'} = a'$. Calculer $\overline{AA'}$

Application : $d = -3$; $a = +4$; $a' = -5$.

1325. — Sur un axe de point initial O, les points A, B, C ont pour abscisses respectives : $a = +5$; $b = -3$; $c = +7$.

1° Calculer $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

2° On prend pour nouveau point initial, le point O′ tel que $\overline{OO'} = -4$. Quelles sont les nouvelles abcisses de A, B, C? Que deviennent les mesures algébriques $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$?

III. DIVISION HARMONIQUE

251. Problème. — *Étant donné sur un axe deux points* A *et* B, *existe-t-il un point* M *de l'axe tel que* $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, *où* k *est un nombre réel donné?*

Soit O, milieu de AB, le point initial, posons : $\overline{OA} = a$ et $\overline{OB} = -a$.
Le point M s'il existe est défini par son abscisse $x = \overline{OM}$.

On a : $\overline{MA} = a - x$; $\overline{MB} = -a - x$.

L'abscisse du point M est telle que : $\dfrac{x-a}{x+a} = k$.

Réciproquement, tout nombre x vérifiant cette égalité est l'abscisse d'un point M tel que : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$.

Le problème posé est ramené à la résolution de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \qquad \exists x? \qquad \frac{x-a}{x+a} = k.$$

Le domaine de validité de cette équation est : $\Delta = \mathrm{R} - \{-a\}$.

On a successivement : $x \in \Delta \quad \exists x? \qquad (x-a) = k(x+a)$.
$$x(1-k) = a(1+k).$$

Si $k \neq 1$ $x = \dfrac{a(1+k)}{1-k}$. Cette solution convient si elle diffère de $-a$.

Or pour avoir $x = -a$, il faudrait : $\dfrac{a(1+k)}{1-k} = -a$,

soit : $a(1+k) = a(k-1)$, ou : $2a = 0$.

Si les points A et B sont distincts, la solution convient.
Si $k = 1$, l'équation $0x = 2a$ est impossible si A et B sont distincts.

▪ CONCLUSION. — **A tout nombre $k \neq 1$ correspond un point M et un seul de l'axe $x'Ox$, tel que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, A et B étant deux points quelconques de l'axe.**

Remarquons que, réciproquement, à tout point M de l'axe, distinct de B correspond le nombre $k = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

252. Division harmonique. — Soit m un nombre arithmétique donné, différent de 1. Soit C et D les deux points tels que :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -m; \qquad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = m.$$

Si $m = 1$, le point C tel que $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$ est le milieu de AB, le point D n'existe pas.

☆ DÉFINITION. — **Les deux points C et D tels que $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ sont dits conjugués harmoniques par rapport à A et B.**

Il résulte de cette définition que tout point de AB a un conjugué harmonique. (Il y a exception pour le milieu de AB.)

En particulier A est son propre conjugué. (De même B.)

La relation $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$, peut s'écrire : $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$; il en résulte que les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport à C et D. Nous dirons maintenant que la **division** (A, B, C, D) est harmonique.

253. Propriétés caractéristiques de la division harmonique. — Une division harmonique est caractérisée par une relation entre les abscisses de ses quatre points A, B, C, D. Cette relation prend différentes formes suivant le choix du point initial.

1. Origine quelconque. — Soit O le point initial. Posons :

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{OC} = c, \qquad \overline{OD} = d.$$

La relation : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$, s'écrit : $\dfrac{a-c}{b-c} = -\dfrac{a-d}{b-d}$,

ou encore : $(a-c)(b-d) + (a-d)(b-c) = 0.$

Développons : $2\,ab + 2\,cd - bc - ad - ac - bd = 0,$

qui s'écrit finalement : $\boxed{2(ab + cd) - (a + b)(c + d) = 0.}$ (1)

Cette forme de la relation harmonique fait apparaître la *symétrie* des rôles joués par A et B d'une part, C et D d'autre part.

2. Origine au milieu I de AB. — On a : $\overline{IB} = -\overline{IA}$, donc dans la relation précédente : $b = -a$. On obtient :

$$2\,(cd - a^2) = 0, \qquad \text{soit :} \qquad cd = a^2.$$

On retiendra plus facilement cette relation sous la forme :

$$\overline{IC}.\overline{ID} = IA^2 = IB^2. \qquad (2)$$

On a de même, J étant le milieu de CD :

$$\overline{JA}.\overline{JB} = JC^2 = JD^2.$$

Cette relation, appelée relation de Newton[1], met en évidence les propriétés suivantes de la division harmonique :

Puisque $\overline{IC}.\overline{ID} = IA^2$, les nombres $\overline{IC}$ et $\overline{ID}$ sont de même signe : les points C et D sont du même côté du milieu de AB. D'autre part :

$$IC < IA \implies ID > IA.$$
$$IC > IA \implies ID < IA.$$

Un des points C ou D est entre A et B, l'autre extérieur au segment AB.

1. Newton (1643-1727), mathématicien, physicien et astronome anglais.

3. ORIGINE EN UN DES QUATRE POINTS. — Prenons pour origine le point A, il suffit dans la relation générale de faire $a = 0$, il vient :

$$2\,cd - bc - bd = 0,$$

soit, en divisant par bcd : $\frac{2}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} = 0$, ou : $\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

On la retiendra sous la forme : $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$. (3)

On l'appelle relation de Descartes[1]. Bien entendu, on peut prendre pour origine l'un quelconque des quatre points et écrire par exemple :

$$\frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}}.$$

Chacune des trois relations obtenues est une *condition nécessaire et suffisante* de conjugaison harmonique. Si $(\mathfrak{R})$ désigne une de ces trois relations, on peut résumer :

$$[\text{A, B, C, D harmonique}] \iff (\mathfrak{R}).$$

254. Problème.

Soit un segment AB *de longueur l et, sur la droite* AB, *les deux points* C *et* D *tels que :* $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{p}{q}$; *où p et q sont deux entiers naturels $p > q$. Déterminer la position du milieu* O *de* CD *et calculer la longueur du segment* CD.

Orientons la droite AB de A vers B, prenons C entre A et B, on pose $\overline{AB} = l$ (*Fig. 186*). On a :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{p}{q}.$$

Ou : $\frac{\overline{CA}}{-p} = \frac{\overline{CB}}{q} = \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{p+q} = \frac{l}{p+q}$.

$$\frac{\overline{DA}}{p} = \frac{\overline{DB}}{q} = \frac{\overline{AD} + \overline{DB}}{q-p} = \frac{l}{q-p}.$$

FIG. 186.

Il en résulte : $\overline{AC} = \frac{pl}{p+q}$; $\overline{AD} = \frac{pl}{p-q}$.

Le milieu O de CD est défini par :

$$\overline{AO} = \frac{\overline{AC} + \overline{AD}}{2} = \frac{pl}{2}\left[\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p-q}\right] = \frac{p^2 l}{p^2 - q^2}.$$

On a : $\overline{CD} = \frac{pl}{p-q} - \frac{pl}{p+q} = pl.\frac{2q}{p^2-q^2}$, d'où : $CD = \frac{2pql}{p^2-q^2}$.

PROBLÈMES

1326. — On donne trois points A, B, C en ligne droite dans cet ordre, tels que l'on ait AB = a cm et BC = b cm. Évaluer les rapports :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}; \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}};$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}; \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}; \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

1327. — On prend sur une droite et dans l'ordre ACBD les points A, B, C, D tels que AC = 2 a, BC = a; BD = 3 a.

1° Évaluer les rapports :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

2° Vérifier que l'on a :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

3° O étant le milieu de AB et O′ le milieu de CD, on a :

$$\overline{OC}.\overline{OD} = \overline{OA}^2; \quad \overline{O'A}.\overline{O'B} = \overline{O'C}^2;$$
$$\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AO'}.$$

1328. — Soit un segment AB et les points M et M′ de son support tels que :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{7}.$$

1° On donne AB = 60 mm. Faire la figure. Calculer MM′.

2° On donne MM′ = 21 mm. Faire la figure. Calculer AB.

1329. — Un segment AB de milieu O vaut 32 mm.

1° Construire les points M et M′ qui divisent AB dans le rapport $\frac{3}{5}$ (M entre A et B).

2° Calculer les longueurs AM, BM, AM′, BM′ et MM′.

3° Évaluer les rapports

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AM'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{BM}}{\overline{BM'}}.$$

1330. — Tracer un segment $\overline{AB}$. Construire les segments $\overline{AC} = -3\,\overline{AB}$; $\overline{AD} = \frac{2}{5}\overline{AB}$; $\overline{AE} = -\frac{3}{5}\overline{AB}$. Calculer les rapports :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}; \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}; \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}.$$

1331. — M et M′ sont les points du support du segment AB tels que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{p}{q}.$$

En supposant M entre A et B et M′ sur un prolongement de AB et $p > q$, calculer les longueurs : MA, MB, M′A et M′B.

1332. — Trois points A, C, B étant donnés dans cet ordre sur une droite, on donne AC = c, AB = b. On appelle D le point de la droite tel que la division A, B, C, D soit harmonique.

1° Calculer AD = x en fonction de c et b.

2° Évaluer les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$ en fonction de c et b.

1333. — Démontrer que pour que la division A, B, C, D soit harmonique, il faut et il suffit que l'on ait, en appelant O le milieu de AB et O′ le milieu de CD :

$$\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AO'};$$

(Relation de Mac-Laurin)

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\,\overline{OO'}^2;$$

$\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\right)^2 = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$ (la réciproque exige une condition que l'on précisera).

1334. — Peut-il arriver dans une division harmonique que deux points soient confondus?

1335. — On donne un segment AB et un segment CD. Placer CD sur la droite AB de façon que les points C et D soient conjugués harmoniques par rapport à A et B.

1336. — Les points A, B, D étant alignés dans cet ordre, on pose AB = b, BD = d. Soit C le conjugué harmonique de D par rapport à A et B.

1° Calculer AC = c et les rapports :

$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}, \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}, \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}, \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$, en fonction de b et d.

2° O désignant le milieu du segment AB, calculer $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ et constater qu'il est égal à l'un des rapports précédents.

1337. — Soit quatre points A, B, C, D distincts et alignés.

1° Démontrer que : $\overline{BD} + \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

2° On suppose que :

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BD}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} = 0. \quad (1)$$

Démontrer que cette relation est équivalente à :

$$(\overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AC}.\overline{BD})(\overline{AD} + \overline{BC}) = 0 \quad (2)$$

En déduire que la relation (1) exprime soit que la division ABCD est harmonique, soit que les segments AB et CD ont même milieu.

CHAPITRE XVIII

VECTEURS

I. VECTEURS

255. Sens de deux droites orientées parallèles. — Nous avons vu (n° 244) que sur une droite, deux sens sont possibles, un de ces sens pouvant être matérialisé par une demi-droite Ox, l'autre par la demi-droite opposée. Deux droites parallèles orientées sont de même sens si les demi-droites Ox et $O'x'$ sont dans le même demi-plan d'arête OO'.

Soit Ox et $O''x''$ de même sens ainsi que $O'x'$ et $O''x''$, ces trois demi-droites ayant des supports distincts. Par définition, les trois demi-droites sont dans le même demi-espace limité par le plan $OO'O''$, il en résulte que Ox et $O'x'$ sont dans le même demi-plan limité par OO'. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} Ox \text{ et } O''x'' \text{ même sens} \\ O'x' \text{ et } O''x'' \text{ même sens} \end{array}\right\} \Longrightarrow Ox \text{ et } O'x' \text{ même sens.}$$

Si deux supports, ou les trois, sont confondus, le sens des demi-droites correspondantes est le sens du support et la propriété est évidente.

256. Définition d'un vecteur lié.

☆ **Un vecteur lié est un élément géométrique défini par un couple rangé de deux points.**

Le vecteur lié défini par les deux points A et B sera noté $\overrightarrow{AB}$.

On attribue à un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$:

1° Une **origine** A et une **extrémité** B.

2° Un **support,** qui est la droite définie par les deux points A et B. Lorsque ces deux points sont confondus, le support n'est plus défini, le vecteur lié correspondant est un **vecteur nul** noté $\vec{0}$.

3° Un **sens,** qui est le sens du segment orienté AB.

4° Un **module** (ou **longueur**) qui est la mesure de la longueur du segment AB. On note le module d'un vecteur lié par le même signe que la valeur absolue d'un nombre réel soit $|\overrightarrow{AB}|$. On peut donc écrire : $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

257. Équipollence des vecteurs liés.

☆ DÉFINITION. — **On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents et on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, pour exprimer qu'ils satisfont aux conditions suivantes :**

1. Leurs supports sont parallèles ou confondus.

2. Ils ont même sens.

3. Leurs modules sont égaux.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} AB \,//\, CD. \\ AB \text{ et } CD \text{ même sens.} \\ AB = CD. \end{cases}$$

Le signe // doit se lire ici : « même direction que », c'est-à-dire « parallèle ou confondu avec ».

Nous considérerons comme équipollents entre eux tous les vecteurs nuls.

Il résulte de la définition et des propriétés du sens des droites parallèles que deux vecteurs équipollents à un troisième sont équipollents :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

258. Propriété caractéristique de l'équipollence. — Soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

1. Si les droites AB et CD sont distinctes. On a l'équivalence :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff$ ABDC parallélogramme, mais (n° 64) :

ABDC parallélogramme $\iff$ AD et BC même milieu.

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff$ AD et BC même milieu.

2. Si les droites AB et CD sont confondues, on a l'équivalence :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overline{AB} = \overline{CD}.$$

Soit a, b, c, d les abscisses respectives des quatre points A, B, C, D.

On a : $\overline{AB} = \overline{CD} \iff b - a = d - c.$

Le milieu de AD a pour abscisse (nº 249) : $\frac{a+d}{2}$; le milieu de BC : $\frac{b+c}{2}$.

Puisque : $b - a = d - c \iff \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$,

on a encore : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff$ **AD et BC même milieu.**

Il résulte immédiatement de cette propriété que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

259. Conséquences. — 1. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même support, même module, mais ils sont de sens contraires, ils ne sont pas équipollents.

2. Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un point O quelconque. Soit I le milieu de BO, M le symétrique de A par rapport à I, on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Ce point M est unique, car un second point M′ donnerait :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AB} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{O, M, M}' \text{ alignés} \\ \text{OM et OM}' \text{ même sens} \\ \text{OM} = \text{OM}'\end{array}\right\} \implies \text{M et M}' \text{ confondus.}$$

260. Définition du vecteur libre. — Toutes les droites parallèles à une droite donnée sont parallèles entre elles et ont une propriété commune : leur **direction.**

Toutes les demi-droites parallèles et de même sens ont une propriété commune : leur **sens.**

Tous les segments égaux à un segment donné sont égaux entre eux et ont une propriété commune : leur **longueur.**

Tous les vecteurs liés équipollents à un vecteur lié donné sont équipollents entre eux. Ils ont une propriété commune : ils correspondent au même **vecteur libre** ou simplement au même **vecteur.**

Un **vecteur** a trois constituants : une *longueur*, une *direction*, un *sens*. Nous le représenterons par une minuscule latine surlignée d'une flèche : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ...

Deux vecteurs libres sont égaux s'ils ont même longueur, même direction, même sens. Nous noterons l'égalité : $\vec{u} = \vec{v}$.

Remarquons que, lorsque nous disons que « deux vecteurs liés sont équipollents », il s'agit, en général, de deux vecteurs **distincts**; pour l'égalité de deux vecteurs libres il s'agit au fond du **même** vecteur.

Un vecteur libre ne peut pas être figuré. Pour raisonner sur un tel vecteur on peut tracer un vecteur lié qui a même direction, même sens, même module. Ce vecteur lié est le représentant du vecteur libre. Il en résulte l'équivalence suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} \text{ représentant de } \vec{u} \\ \overrightarrow{A'B'} \text{ représentant de } \vec{u'}\end{array}\right\} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \vec{u} = \vec{u'}.$$

Le vecteur libre dont un représentant est un vecteur nul est appelé vecteur nul, $\vec{u} = \vec{0}$.

261. Addition de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v'}$. — Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$, $\overrightarrow{BC}$ un représentant de $\vec{v}$. Soit un autre représentant de $\vec{u}$: $\overrightarrow{A'B'}$ et un autre représentant de $\vec{v}$: $\overrightarrow{B'C'}$. On a (nº 258) :

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} \\ \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{B'B}\end{array} \implies \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}.$$

Le vecteur lié $\overrightarrow{AC}$ est donc indépendant du vecteur $\overrightarrow{AB}$, il est le représentant d'un vecteur libre $\vec{w}$, qui ne dépend que de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{w}$ est dit la *somme* des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on écrit :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Remarquons que si A, B, C sont trois points quelconques, on a, par définition de l'addition vectorielle :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Enfin on a également :
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}.$$
$$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

Le vecteur nul est l'élément neutre pour l'addition vectorielle.

262. Propriétés de l'addition de deux vecteurs.

1. Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, et à partir du point O les points M et P tels que

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{MP} = \vec{v}, \quad \overrightarrow{OP} = \vec{w}.$$

Si les trois points O, M, P ne sont pas alignés on a dans le triangle OMP : OP < OM + MP, donc : $|\vec{w}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Si O, M, P sont alignés cette relation est conservée sauf si M est entre O et P, où l'on a : $OP = OM + MP$.

▪ THÉORÈME. — **Le module de la somme de deux vecteurs est inférieur ou égal à la somme des modules des deux vecteurs.**

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \leqslant \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|.$$

2. Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. et un point O quelconque. Soit M et P tels que :

$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$; $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$; on a : $\overrightarrow{OP} = \vec{w}$.



FIG. 187.

Soit R le symétrique de M par rapport au milieu I de OP (*Fig. 187* et *188*). On a :

OP et MR même milieu $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{RP}$ $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{RP} = \vec{u}$.

OP et MR même milieu $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OR}$ $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{OR} = \vec{v}$.

Mais : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$, donc : $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$.

▪ THÉORÈME. — **L'addition de deux vecteurs est une opération commutative.**

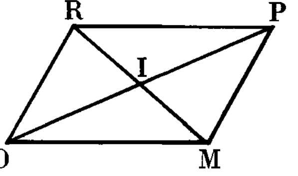


FIG. 188.

3. On a, par définition :

$$\vec{v} = \vec{v}' \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'.$$

Réciproquement, soit :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'.$$

Si $\vec{v}$ n'était pas égal à $\vec{v}'$ ($\vec{v} \neq \vec{v}'$), soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, P et P' distincts tels que $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{MP'} = \vec{v}'$, on aurait :

$$\overrightarrow{OP} \neq \overrightarrow{OP'} \quad \text{donc :} \quad \vec{u} + \vec{v} \neq \vec{u} + \vec{v}'.$$

D'où contradiction. On a finalement l'équivalence :

$$\vec{v} = \vec{v}' \Longleftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'.$$

263. Addition de plusieurs vecteurs. — Soit les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ... $\vec{u}_n$,

On a :

$$\vec{w}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$
$$\vec{w}_2 = \vec{w}_1 + \vec{u}_3.$$
$$\cdots\cdots$$
$$\vec{w} = \vec{w}_{n-2} + \vec{u}_n.$$

Le vecteur $\vec{w}$ est par définition la somme des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$. On a réalisé le « pas à pas de gauche à droite » (n° 15).

264. Propriétés de l'addition vectorielle. — Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et les trois points A, B, C tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{v}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{w}.$$

On a (*Fig. 189*) :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

Donc, par définition : $\overrightarrow{OC} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$

Mais on a : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, et : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Soit : $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

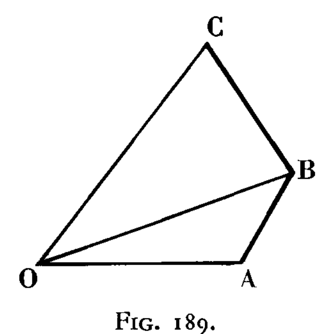


FIG. 189.

On a donc :

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, et :

▪ THÉORÈME. — **L'addition de plusieurs vecteurs est une opération associative et commutative.**

Enfin, on a de proche en proche :

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2| \leqslant |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2|$$

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3| \leqslant |\vec{u}_1 + \vec{u}_2| + |\vec{u}_3| \leqslant |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2| + |\vec{u}_3|$$

etc..., donc : $|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n| \leqslant |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2| + \ldots + |\vec{u}_n|$.

265. Soustraction vectorielle. — Par définition, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est dit le **symétrique** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Pour un vecteur $\vec{u}$ nous noterons le symétrique $\vec{u}'$. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}'$.

On a : $\vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}') + \vec{v} = \vec{u} + (\vec{v}' + \vec{v}) = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

▪ **Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il existe toujours un vecteur $\vec{w}$ tel que :**

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}.$$

Le vecteur $\vec{w}$ est la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On écrit :

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}.$$

On voit que si A, B, C, sont trois points quelconques, on a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Il résulte enfin de cette définition que la différence vectorielle possède les propriétés de la différence des nombres (voir Ex. 1338).

Nous constatons que, sur l'ensemble des vecteurs libres, nous avons défini une opération interne : l'addition; cette opération est associative, elle a un élément neutre : le vecteur nul; à tout élément correspond un élément symétrique :

- **L'ensemble des vecteurs libres a une structure de groupe pour l'addition vectorielle.**

266. Vecteurs glissants. — Pour répondre aux besoins de la physique, on définit des vecteurs glissants.

Un vecteur glissant est caractérisé par :

un support;
une longueur;
un sens.

Les forces par exemple, en Physique, sont assimilées à des vecteurs glissants.

Exercices. 1338. — Démontrer les propriétés suivantes de la soustraction vectorielle :

$$(\vec{u} + \vec{w}) - (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} - \vec{v}).$$
$$\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}.$$

1339. — Démontrer que, si deux demi-droites de même support sont de même sens, elles ont des points communs autres que ceux du segment OO'.
Si elles sont de sens contraires, ou bien elles n'ont pas de point commun, ou bien leurs points communs sont ceux du segment OO'.

1340. — Quelle condition doivent satisfaire trois vecteurs libres pour que, A, B, C étant trois points quelconques, ces trois vecteurs soient représentables respectivement par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$?

1341. — Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Le vecteur $\vec{w}$ étant donné, construire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ connaissant :

1° Les longueurs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2° La longueur de $\vec{u}$ et la direction de $\vec{v}$.

1342. — Soit $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Le vecteur $\vec{S}$ étant donné, construire $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sachant qu'ils ont même longueur et que leurs supports sont deux à deux rectangulaires.

1343. — Soit un triangle ABC, on détermine les points A', B', C', tels que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}.$$
$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BB'}.$$
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CC'}.$$

Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$?

Exercices.

II. PROJECTIONS

267. Projection sur un plan parallèlement à une droite. — Nous avons étudié géométriquement cette projection (nº 212).

Soit un plan de projection (π), la direction (δ) et un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Si $AB // \delta$, nous dirons que la projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur nul. Les projections A′ et B′ de A et B sont en effet confondues.

Si AB n'est pas parallèle à (δ), au couple rangé des deux points A et B, correspond le couple rangé A′, B′, l'ordre étant conservé. Donc :

- **La projection d'un vecteur sur un plan est un vecteur. Les extrémités des deux vecteurs se correspondent dans la projection.**

Voyons quelques propriétés de cette projection pour les vecteurs.

1. Soit AB un segment, A′B′ sa projection sur le plan (π) parallèlement à la droite (δ) (*Fig. 190*). Soit I le milieu de AB, I′ sa projection. Les points A, B, A′, B′, I et I′ sont dans le plan passant par AB et parallèle à (δ). Joignons AB′ qui coupe II′ en K. On a :

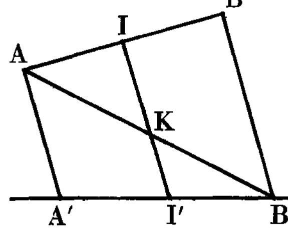


Fig. 190.

$$\left.\begin{array}{r}\text{I milieu de AB}\\ \text{IK parallèle à BB}'\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{K milieu de AB}'.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{K milieu de AB}'\\ \text{KI}' \text{ parallèle à AA}'\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{I}' \text{ milieu de A}'\text{B}'.$$

- THÉORÈME. — **Le milieu d'un segment se projette au milieu de la projection du segment.**

2. Soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$, les projections de ces deux vecteurs, sur le plan (π), parallèlement à (δ). On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{AD et BC}\\ \text{même milieu I}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{I}' \text{ projection de I}\\ \text{milieu de A}'\text{D}' \text{ et B}'\text{C}'\end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c}\text{A}'\text{D}' \text{ et B}'\text{C}'\\ \text{même milieu I}'\end{array} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}.$$

- THÉORÈME. — **Les projections de deux vecteurs égaux sont deux vecteurs égaux.**

3. Soit (π') un plan parallèle à (π) un vecteur $\overrightarrow{AB}$ se projette en $\overrightarrow{A'B'}$ sur (π) et en $\overrightarrow{A''B''}$ sur (π'). Les deux plans parallèles (π) et (π') coupent le plan ABB′A′ suivant les droites parallèles A′B′ et A″B″ (*Fig. 191*), on a :

$$\left.\begin{array}{l}A'B'//A''B'' \\ A'A''//(\delta) \\ B'B''//(\delta)\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}A'B'//A''B'' \\ A'A''//B'B''\end{array}$$

$\Longrightarrow$ A'B'B''A'' parallélogramme $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''}$.

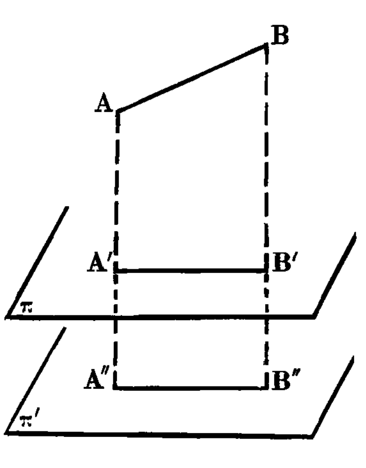


FIG. 191.

▪ THÉORÈME. — **Les projections d'un vecteur sur deux plans parallèles sont des vecteurs égaux.**

4. Soit des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ et $\vec{v}$ leur somme. A partir d'un point O, construisons les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, S, tels que :

$$\overrightarrow{OA_1} = \vec{u}_1, \ \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}_2, \ \ldots, \ \overrightarrow{A_{n-1}S} = \vec{u}_n.$$

On a : $\overrightarrow{OS} = \vec{v}$.

Si $O', A'_1, \ldots, A'_{n-1}, S'$ sont les projections sur un plan (π), parallèlement à (δ), des différents points, on a : $\overrightarrow{O'S'} = \overrightarrow{O'A'_1} + \overrightarrow{A'_1A'_2} + \ldots + \overrightarrow{A'_{n-1}S'}$.

Et, par suite, si $\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n, \vec{v}'$ sont les projections des différents vecteurs : $\vec{v}' = \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2 + \ldots + \vec{u}'_n$.

▪ THÉORÈME. — **La projection d'une somme de vecteurs est la somme des projections de ces vecteurs.**

REMARQUE IMPORTANTE. — L'opération que nous venons de faire, nous conduit de la donnée des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ au résultat $\vec{v}'$. Nous constatons que ce résultat peut s'obtenir de deux façons :

1° Faire la somme $\vec{v}$, puis projeter, on a $\vec{v}'$.

2° Projeter les vecteurs, puis faire la somme des projections, on a encore $\vec{v}'$.

▪ THÉORÈME. — **L'opération qui consiste à ajouter des vecteurs et l'opération qui consiste à projeter des vecteurs sont permutables.**

Enfin remarquons que si : $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, et si : $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ sont les projections respectives sur un plan de ces trois vecteurs, on a : $\vec{w}' = \vec{u}' - \vec{v}'$.

Tout ce qui précède s'applique à une projection orthogonale.

268. Projection sur une droite, parallèlement à un plan.

1. DÉFINITION. — Soit une droite (d) et un plan (π) non parallèle à (d). A tout point M de l'espace on fait correspondre le point M', intersection avec (d) du plan passant par M parallèle à (π).

Si le point M est sur (d), le point M' coïncide avec M.

Inversement, tout point M' de (d) est la projection de tous les points du plan parallèle à (π) et passant par M'.

Lorsque le plan (π) est perpendiculaire à (d), la projection est orthogonale. On voit immédiatement que la projection d'un segment est un segment, qui se réduit à un point si le segment est parallèle à (π).

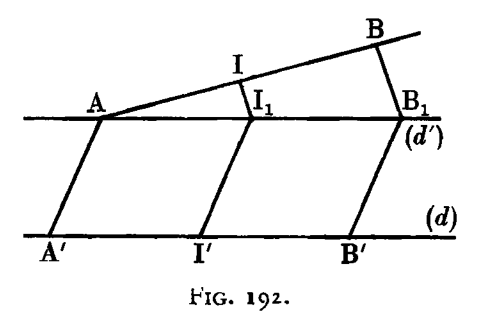


FIG. 192.

▪ **La projection d'un vecteur est un vecteur, qui se réduit au vecteur nul si le support du vecteur est parallèle à (π).**

2. Soit un segment AB et son milieu I; A′, B′, I′ leurs projections respectives sur une droite (d), parallèlement à (π) (*Fig. 192*).

Traçons par A la parallèle (d') à (d), qui coupe les plans projetant I et B en I_1 et B_1. On a :

Dans le plan BAB_1 coupé par des plans parallèles à (π) :

$$\left.\begin{array}{ll} I & \text{milieu de } AB \\ II_1 & \text{parallèle à } BB_1 \end{array}\right. \Longrightarrow I_1 \text{ milieu de } AB_1.$$

De même dans le plan $[d, d']$:

$$\left.\begin{array}{ll} I_1 & \text{milieu de } AB_1 \\ I_1I' & \text{parallèle à } B_1B' \end{array}\right. \Longrightarrow I' \text{ milieu de } A'B'.$$

▪ THÉORÈME. — **La projection du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté.**

3. Soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et A′, B′, C′, D′ les projections respectives de ces quatre points sur une droite (d).

I et I′ désignant les milieux respectifs de AD et A′D′ on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \begin{array}{c} AD \text{ et } BC \\ \text{même milieu } I \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} I' \text{ milieu de } A'D' \\ I' \text{ milieu de } B'C' \end{array} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}.$$

▪ THÉORÈME. — **Les projections de deux vecteurs égaux sont des vecteurs égaux.**

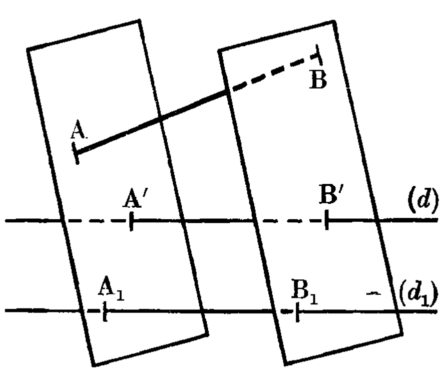


FIG. 193.

4. Soit $(d_1) // (d)$. Projetons un vecteur $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ sur (d), parallèlement au plan (π) et en $\overrightarrow{A_1B_1}$ sur (d_1) parallèlement au même plan (π). On a (*Fig. 193*) :

$$\left.\begin{array}{l} A'B' // A_1B_1 \\ A'A_1 // B'B_1 \end{array}\right. \Longrightarrow A'B'B_1A_1 \text{ parallélogramme}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1B_1}.$$

▪ THÉORÈME. — **Les projections d'un vecteur sur deux droites parallèles, parallèlement à une même direction de plan, sont des vecteurs égaux.**

5. Soit $\overrightarrow{OA_1} = \vec{u}_1, \ldots, \overrightarrow{A_{n-1}S} = \vec{u}_n$ et $\overrightarrow{OS} = \vec{v}$. Si $O', A'_1, \ldots, A'_{n-1}, S'$ sont les projections respectives de $O, A_1, \ldots A_{n-1}, S$ sur une droite (d), on a :

$$\overrightarrow{O'S'} = \overrightarrow{O'A'_1} + \overrightarrow{A'_1A'_2} + \ldots + \overrightarrow{A'_{n-1}S'}, \quad \text{d'où :} \quad \vec{v}' = \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2 + \ldots + \vec{u}'_n.$$

▪ THÉORÈME. — **La projection d'une somme de vecteurs est la somme des projections des vecteurs.**

Nous remarquerons, comme pour la projection sur un plan, que les deux opérations, addition de vecteurs et projection de vecteurs, sont permutables.

Enfin, si : $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, et si : $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ sont les projections respectives de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sur une droite, on a : $\vec{w}' = \vec{u}' - \vec{v}'$.

269. Projection sur un axe. — Soit un axe $x'Ox$ porté par une droite (d). Si on projette un vecteur $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$ sur la droite (d), on appelle projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'Ox$, la valeur algébrique du segment orienté $A'B'$, soit $\overline{A'B'}$.

Nous conviendrons que la projection d'un vecteur sur un axe est un nombre.

III. VECTEURS COLINÉAIRES

270. Vecteurs colinéaires.

☆ DÉFINITION. — **On dit que deux vecteurs sont colinéaires pour exprimer qu'ils ont même direction.**

271. Produit d'un vecteur par un nombre. — Étant donné un vecteur $\vec{v}$ et un nombre réel λ, on appelle produit du vecteur $\vec{v}$ par le nombre réel λ, un vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ tel que :

— le rapport du module de $\vec{u}$ au module de $\vec{v}$ est $|\lambda|$;

— les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens si $\lambda > 0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires si $\lambda < 0$.

Le vecteur $\vec{u}$ est nul si $\lambda = 0$. On écrit : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Il résulte de cette définition :

$$\lambda \in R, \quad \forall \lambda \quad : \quad \vec{u} = \vec{v} \implies \lambda\vec{u} = \lambda\vec{v}.$$

$$\lambda \neq 0, \quad \lambda \in R, \quad \forall \lambda \quad : \quad \lambda\vec{u} = \lambda\vec{v} \implies \vec{u} = \vec{v}.$$

$$\vec{u} \neq \vec{0}, \quad \lambda\vec{u} = \lambda'\vec{u} \implies \lambda = \lambda'.$$

R désigne l'ensemble des nombres réels.

272. Rapport de deux vecteurs colinéaires. — Soit deux vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$), considérons le nombre réel λ défini de la façon suivante :

sa valeur absolue est le rapport $\dfrac{\text{du module de } \vec{u}}{\text{au module de } \vec{v}}$: $\quad |\lambda| = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}.$

et
$$\begin{cases} \lambda > 0 \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ de même sens.} \\ \lambda < 0 \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ de sens contraires.} \\ \lambda = 0 \text{ si } \vec{u} = \vec{0}. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, ce nombre λ est tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

☆ DÉFINITION. — **Le rapport d'un vecteur $\vec{u}$ à un vecteur $\vec{v}$, colinéaire à $\vec{u}$, existe si $\vec{v} \neq 0$; c'est le nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$.**

Remarque. — Soit un nombre entier n; considérons la somme de n vecteurs égaux au vecteur $\vec{v}$: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{v} + \ldots + \vec{v}$.

La définition de l'addition vectorielle donne $\vec{u} = n\vec{v}$, au sens de la multiplication par un nombre telle que nous venons de la définir.

▪ THÉORÈME. — **Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un nombre entier positif n est la somme de n vecteurs égaux au vecteur $\vec{v}$.**

273. Distributivité, par rapport à l'addition des nombres, du produit d'un vecteur par un nombre. — Soit $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ et $\vec{u'} = \lambda'\vec{v}$; nous nous proposons de calculer $\vec{u} + \vec{u'}$. Soit O un point quelconque et les points A et B tels que : $\vec{OA} = \lambda\vec{v}$, $\vec{AB} = \lambda'\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires donc O, A, B sont alignés sur une droite parallèle au support de $\vec{v}$. Le vecteur $\vec{OB} = \vec{u} + \vec{u'}$ est alors colinéaire à $\vec{v}$.

On a dans les différents cas de figure (*Fig. 194*) :

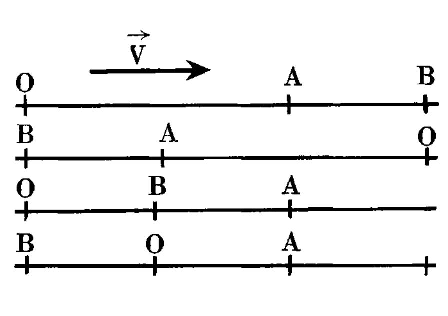


Fig. 194.

I. $\lambda > 0, \lambda' > 0 \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{AB} \\ \text{sens de } \vec{v} \end{array} \right. \Longrightarrow$ A entre O et B

$$\Longrightarrow \quad OB = OA + AB = \lambda|\vec{v}| + \lambda'|\vec{v}| = (\lambda + \lambda')|\vec{v}|$$
$$\Longrightarrow \quad \vec{u} + \vec{u}' = (\lambda + \lambda')\vec{v}.$$

II. $\lambda < 0, \lambda' < 0 \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{AB} \\ \text{sens contraire à } \vec{v} \end{array} \right. \Longrightarrow$ A entre O et B.

$$\Longrightarrow \quad OB = OA + AB \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} + \vec{u}' = (\lambda + \lambda)\vec{v}.$$

III. $\begin{array}{l} \lambda > 0, \lambda' < 0 \\ |\lambda| > |\lambda'| \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \text{ sens de } \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \text{ sens contraire} \end{array} \right. \Longrightarrow$ B entre O et A.

$$\Longrightarrow \quad OB = OA - AB = \lambda|\vec{v}| - |\lambda'|.|\vec{v}| = (\lambda + \lambda')|\vec{v}|.$$
$$\Longrightarrow \quad \vec{u} + \vec{u}' = (\lambda + \lambda')\vec{v}.$$

IV. $\begin{array}{l} \lambda > 0, \lambda' < 0 \\ |\lambda| < |\lambda'| \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \text{ sens de } v \\ \overrightarrow{AB} \text{ sens contraire} \end{array} \right. \Longrightarrow$ O entre A et B.

$$\Longrightarrow \quad OB = AB - OA = |\lambda'|\,|\vec{v}| - \lambda|\vec{v}| = (-\lambda' - \lambda)|\vec{v}|.$$
$$\Longrightarrow \quad \vec{u} + \vec{u}' = (\lambda + \lambda')\vec{v}.$$

Les autres cas de figure résultent des précédents par suite de la commutativité de l'addition. On a donc : $\boldsymbol{\lambda \vec{v} + \lambda' \vec{v} = (\lambda + \lambda')\vec{v}}$.

Considérons : $\vec{u} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{v} = (\lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v}) + \lambda_3\vec{v}.$

On peut écrire : $\vec{u} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} + \lambda_3\vec{v} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\vec{v}.$

On passe de trois à quatre vecteurs, puis à un nombre quelconque de vecteurs : $\lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v} + \ldots + \lambda_n\vec{v} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\vec{v}.$

• THÉORÈME. — **La multiplication d'un vecteur par un nombre est distributive par rapport à l'addition des nombres.**

274. Associativité de la multiplication d'un vecteur par un nombre. — Soit $\vec{u} = \lambda\vec{v}$; nous nous proposons de calculer $\vec{w} = \mu\,\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{w}$ colinéaire à $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

Par suite des propriétés des opérations sur les segments, on a :

$$|\vec{w}| = |\mu|.|\vec{u}| = |\mu|(|\lambda|.|\vec{v}|) = |\mu|.|\lambda|.|\vec{v}| = |\lambda\mu|.|\vec{v}|.$$

On a maintenant suivant les signes de λ et μ :

$\lambda > 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ même sens
$\mu > 0$, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ même sens
$\Longrightarrow$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ même sens, $\lambda\mu > 0 \Longrightarrow \vec{w} = \lambda\mu\vec{v}$.

$\lambda > 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ même sens
$\mu < 0$, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sens contraires
$\Longrightarrow$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sens contraires, $\lambda\mu < 0 \Longrightarrow \vec{w} = \lambda\mu\vec{v}$.

$\lambda < 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sens contraires
$\mu > 0$, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ même sens
$\Longrightarrow$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sens contraires, $\lambda\mu < 0 \Longrightarrow \vec{w} = \lambda\mu\vec{v}$.

$\lambda < 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sens contraires
$\mu < 0$, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sens contraires
$\Longrightarrow$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ même sens, $\lambda\mu > 0 \Longrightarrow \vec{w} = \lambda\mu\vec{v}$.

On a dans tous les cas : $\lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$.

On généralise sans difficulté : $\lambda[\mu(\nu\vec{v})] = \lambda\mu\nu.\vec{v}$.

▪ THÉORÈME. — **La multiplication d'un vecteur par un nombre est associative.**

Il en résulte :

1° Si : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, on a $\frac{1}{\lambda}\vec{u} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\vec{v}) = \vec{v}$ $(\lambda \neq 0)$.

$$\lambda \neq 0. \quad \vec{u} = \lambda\vec{v} \iff \vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{u}.$$

2° Si : $\vec{u} = \frac{\lambda}{\mu}\vec{v}$, on a : $\mu\vec{u} = \mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\vec{v}\right) = \lambda\vec{v}$ $(\mu \neq 0)$

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\lambda}{\mu}\vec{v} \iff \mu\vec{u} = \lambda\vec{v}.}$$

275. Application aux projections. — Dans ce paragraphe, nous désignerons par $\vec{u}$ un vecteur et par $\vec{u'}$ la projection de ce vecteur, soit sur un plan parallèlement à une droite, soit sur une droite, parallèlement à un plan.

Soit n un entier positif et $\vec{u} = n\vec{v}$. Nous avons vu (n° **271**) que $\vec{u}$ peut être considéré comme une somme de n vecteurs tous égaux à $\vec{v}$. Il en résulte par application du théorème n° **267**, concernant la projection d'une somme de vecteurs : $\vec{u'} = n\vec{v'}$.

Si n est un entier négatif, on a, en posant $n_1 = -n$:

$$\vec{u} = -n_1\vec{v} = n_1(-\vec{v}).$$

En appelant $\vec{v_1}$ le vecteur symétrique du vecteur $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u} = n_1\vec{v_1} \Longrightarrow \vec{u'} = n_1\vec{v_1'} \Longrightarrow \vec{u'} = -n\vec{v_1'} = n(-\vec{v_1'}) = n\vec{v'}.$$

Soit maintenant λ rationnel : $\lambda = \frac{p}{q}$; en utilisant la remarque 2 du **n° 274,**

on a : $\vec{u} = \frac{p}{q}\vec{v} \iff q\vec{u} = p\vec{v} \implies q\vec{u'} = p\vec{v'} \iff \vec{u'} = \frac{p}{q}\vec{v'}.$

On démontre et **nous admettrons** que cette propriété est encore vraie lorsque λ est un nombre réel quelconque.

- THÉORÈME. — **La projection du produit d'un vecteur par un nombre est égale au produit de la projection du vecteur par ce nombre :**

$$\lambda \in \mathbf{R} \quad \forall \lambda \quad \vec{u} = \lambda \vec{v} \implies \vec{u'} = \lambda \vec{v'}.$$

(R désigne l'ensemble des nombres réels.)

276. Vecteur porté par un axe. — Soit sur l'axe $x'Ox$, le point E d'abscisse 1; le vecteur $\overrightarrow{OE}$ est appelé vecteur **unitaire** porté par l'axe.

Soit sur l'axe deux points A et B. Par définition le rapport du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au vecteur unitaire $\overrightarrow{OE}$ est $\overline{AB}$, on peut donc écrire : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\overrightarrow{OE}.$

Soit un second vecteur $\overrightarrow{CD}$ porté par le même axe. On a :

$$\overrightarrow{CD} = \overline{CD}.\overrightarrow{OE} \iff \overrightarrow{OE} = \frac{1}{\overline{CD}}.\overrightarrow{CD}.$$

Il en résulte : $\overrightarrow{AB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\overrightarrow{CD},$ et :

- THÉORÈME. — **Le rapport de deux vecteurs portés par un axe est le rapport des valeurs algébriques des segments orientés correspondants.**

IV. THÉORÈME DE THALÈS

277. Théorème de Thalès[1] dans le plan. — Soit dans le plan deux droites (d) et (d'), et une droite (δ) qui n'est parallèle ni à (d) ni à (d'). Sur (d) soit trois points quelconques A, B, C. Les parallèles à (δ) tracées par A, B, C, coupent (d') en A′, B′, C′ (*Fig. 195*). Nous considérons sur (d) un axe et sur (d') un axe.

Les points A′, B′, C′ peuvent être considérés comme les projections de A, B, C sur (d') parallèlement à (δ). Soit λ le rapport du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au vecteur $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

D'après le théorème sur les projections (n° 275) on a : $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$.

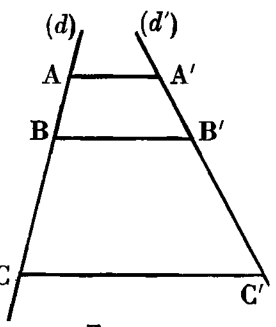


FIG. 195.

1. THALÈS de Milet, philosophe et géomètre grec, l'un des sept sages de la Grèce (640-548 av. J.-C.).

Sur l'axe porté par (*d*) on a (n° 276) : $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Sur l'axe porté par (*d'*) : $\lambda = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$. Il en résulte : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ et :

- THÉORÈME DE THALÈS. — **Si trois droites parallèles coupent une première sécante en A, B, C, et une deuxième sécante en A', B', C' on a :** $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

278. Étude d'une réciproque. — Le théorème de Thalès peut se réduire à la forme simple suivante, où il est bien entendu que A, B, C d'une part, A', B', C' d'autre part, sont alignés.

$$\begin{matrix} AA' \,//\, BB' \\ AA' \,//\, CC' \end{matrix} \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Il serait illogique d'essayer de déduire de l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, le parallélisme des droites AA', BB' et CC'.

La *figure 196* montre qu'en général cette proposition est fausse : on a pris sur (*d*) les points A, B, C tels que : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{2}$, et sur (*d'*) un segment **quelconque** A'B'. On a pris pour C' le point tel que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{3}{2}$. Les droites AA', BB' CC' ne sont pas parallèles et on a : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

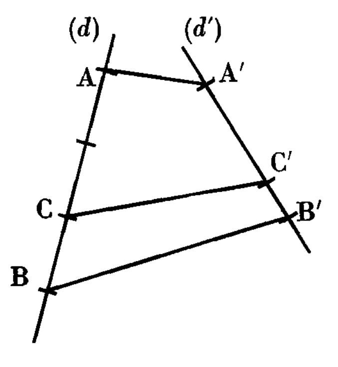


FIG. 196.

Supposons alors toujours $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, et de plus AA' // BB'. Traçons de C la parallèle à AA' qui coupe (*d'*) en C" (*Fig. 197*).

Le théorème de Thalès appliqué aux parallèles AA', BB' et CC" donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}.$$

Il en résulte par comparaison avec l'hypothèse : $\overline{A'C'} = \overline{A'C''}$. Les deux points C′ et C″ étant confondus, les droites AA′ et CC′ sont parallèles.

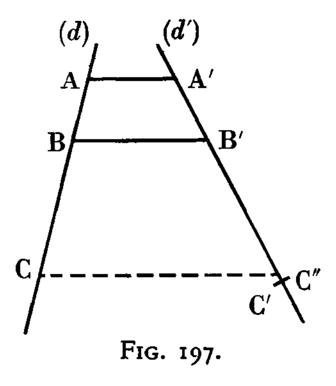


FIG. 197.

▪ RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS. — **Si trois points A, B, C alignés sur une droite (*d*) et trois points A′, B′, C′ alignés sur une droite (*d′*) sont tels que l'on ait : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, AA′ et BB′ étant parallèles, alors CC′ est parallèle à AA′ et à BB′.**

279. Application du théorème de Thalès au triangle. — Soit un triangle ABC, une parallèle au côté BC coupe les supports des côtés AB et AC respectivement en B′ et C′ (*Fig. 198*).

En considérant la droite passant par A et parallèle à BC, nous pouvons appliquer le théorème de Thalès, d'où $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$.

▪ THÉORÈME. — **Toute parallèle au côté BC d'un triangle coupe les supports des côtés AB et AC respectivement en B′ et C′ tels que $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$.**

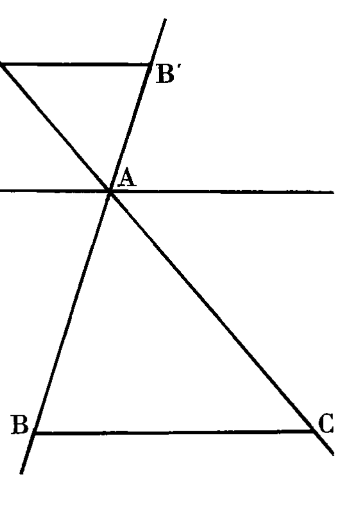


FIG. 198.

En remarquant que la réciproque s'applique puisqu'on peut tracer la droite passant par A parallèle à BC, nous énoncerons :

▪ THÉORÈME RÉCIPROQUE. — **Si une droite coupe les supports des côtés AB et AC d'un triangle ABC en des points distincts B′ et C′ tels que $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$, la droite B′C′ est parallèle à BC.**

Par suite, on a l'équivalence :

A, B, B′ alignés A, C, C′ alignés	BC // B′C′ $\Longleftrightarrow$ $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$.

280. Double application du théorème de Thalès au triangle. — Soit un triangle ABC; une parallèle à BC coupe les supports des côtés AB et AC en des points distincts B′ et C′.

La parallèle tracée de C à AB coupe B′C′ en D (*Fig. 199*). Le théorème de Thalès appliqué au triangle AB′C′ coupé successivement par BC et CD donne :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \quad \text{et :} \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D}}.$$

Mais : $\left.\begin{array}{l} BC \,//\, B'D \\ BB' \,//\, CD \end{array}\right\} \Longrightarrow$ BCDB′ parallélogramme $\Longrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'D}$.

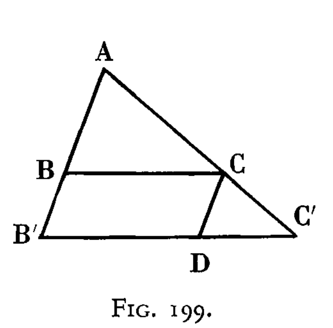


FIG. 199.

On a donc : $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$.

Finalement : $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$.

▪ THÉORÈME. — **Si une droite parallèle au support du côté BC, d'un triangle ABC, coupe les supports des côtés AB et AC en B′ et C′ respectivement, on a :**

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}.$$

Si on ne tient compte que des longueurs des côtés on énoncera :

▪ THÉORÈME. — **Toute parallèle au support de l'un des côtés d'un triangle forme avec les supports des deux autres côtés un nouveau triangle dont les côtés sont proportionnels à ceux du premier.**

$$B'C' \,//\, BC \Longrightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$



281. Théorème de Thalès dans l'espace. — Soit deux axes portés par les droites (*d*) et (*d′*) et un plan (π) qui n'est parallèle ni à (*d*) ni à (*d′*). Soit sur (*d*), trois points quelconques A, B, C., posons $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ donc : $\lambda = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ (*Fig. 200*). Les plans parallèles à (π) passant par A, B, C coupent (*d′*) en A′, B′, C′ qui peuvent être considérés comme les projections sur (*d*) de A, B, C parallèlement à (π).

D'après les propriétés des projections : $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{A'C'}$ et $\lambda = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

FIG. 200.

▪ THÉORÈME. — **Si trois plans parallèles coupent une première sécante en A, B, C, une deuxième sécante en A′, B′, C′, on a :**

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

On remarquera que la démonstration et le résultat obtenu sont identiques à ceux faits dans le plan. On étudie de la même façon une réciproque :

Soit deux droites (d) et (d') non coplanaires, les points A, B, C sur (d) et les points A′, B′, C′ sur (d'), tels que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ (1) (*Fig. 201*).

Les droites AA′ et BB′ ne sont pas dans un même plan. On peut alors construire deux plans (P) et (Q) parallèles et tels que (P) contienne AA′ et (Q) contienne BB′. Soit (R) le plan passant par C et parallèle à (P). Il coupe (d') en C_1 tel que : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C_1}}$ (2).

La comparaison de (1) et (2) donne : $\overline{A'C'} = \overline{A'C_1}$, et les points C′ et C_1 sont confondus. La droite CC′ est dans le plan (R). Les trois droites AA′, BB′ et CC′ sont parallèles au même plan.

- RÉCIPROQUE. — **Si trois points A, B, C alignés sur une droite (d) et trois points A′, B′, C′ alignés sur une droite (d') sont tels que : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, alors les droites AA′, BB′ et CC′ sont parallèles à un même plan.**

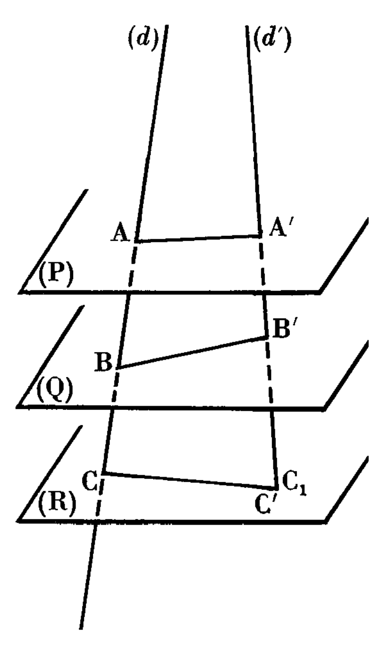


FIG. 201.

282. Construction du point M tel que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$. — Nous avons vu (n° 251) qu'un tel point existe si $k \neq 1$. Le théorème de Thalès permet de construire ce point.

Sur une droite quelconque passant par B distincte de BA prenons C quelconque puis D tel que $\overline{CD} = k\,\overline{CB}$. Joignons DA et traçons de C la parallèle à DA qui coupe AB en M. On a :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = k.$$

La *figure 202* montre la construction pour : $k = -\frac{3}{5}$.

FIG. 202.

283. Distributivité, par rapport à l'addition vectorielle, de la multiplication d'un vecteur par un nombre. — Soit $\vec{u'} = \lambda \vec{u}$ et $\vec{v'} = \lambda \vec{v}$. Calculons $\vec{u'} + \vec{v'}$. Soit à partir d'un point O, les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OA'} = \lambda \vec{u}$. La parallèle tracée de A′ à AB coupe OB en B′ (*Fig. 203*).

La double application du théorème de Thalès au triangle OAB donne :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Par hypothèse (et n° 276) on a : $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \lambda$; il en résulte :

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \lambda \implies \overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \lambda \implies \overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \vec{v}.$$

D'autre part : $\overrightarrow{OB} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$

donc : $\overrightarrow{OB'} = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$

et : $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB} = \lambda (\vec{u} + \vec{v})$.

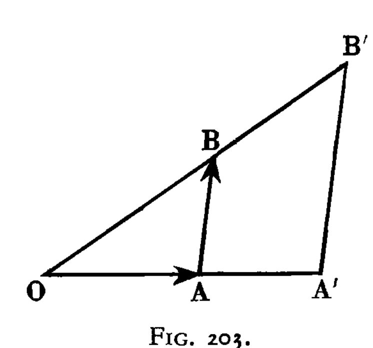


FIG. 203.

Si O, A, B sont alignés, A′ est sur la même droite; soit B′ tel que :

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

On a : $\lambda = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

et : $\lambda = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Donc : $\begin{array}{l}\overline{OA'} = \lambda \overline{OA} \\ \overline{A'B'} = \lambda \overline{AB}\end{array}$, soit par addition $\overline{OB'} = \lambda \overline{OB}$, donc $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$, et

$$\overrightarrow{OB'} = \lambda (\vec{u} + \vec{v}).$$

Il en résulte :

$$\lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}.$$

Ce résultat s'étend sans difficulté à plusieurs vecteurs.

$$\lambda (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n) = \lambda \vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2 + \ldots + \lambda \vec{u}_n.$$

▪ THÉORÈME. — **La multiplication d'un vecteur par un nombre est distributive par rapport à l'addition vectorielle.**

Ce résultat, comme il résulte de la démonstration ci-dessus, n'est autre que l'énoncé vectoriel du théorème de Thalès.

Exercices. 1344. — Soit un trapèze ABCD. Une parallèle aux bases AB et CD coupe les supports des côtés AD et BC en M et N. Démontrer que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}$. Énoncer et démontrer une réciproque.

1345. — On donne un segment AB et un point C entre A et B. Construire géométriquement le point D conjugué harmonique de C par rapport à A et B.
Reprendre la même construction, le point C donné extérieur à AB.

1346. — On considère un triangle ABC et son centre de gravité G, les médianes étant AA', BB', CC'.

1° Évaluer les rapports $\frac{\overline{GA}}{\overline{GA'}}$; $\frac{\overline{GB}}{\overline{GB'}}$; $\frac{\overline{GC}}{\overline{GC'}}$.

2° On trace de G les parallèles à AB et AC qui coupent BC en M et N. Évaluer $\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$ et $\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}$. Préciser la disposition des points B, M, N, C.

1347. — Ensemble des points dont le rapport des distances à deux droites parallèles est un nombre réel donné, la direction perpendiculaire aux deux droites parallèles étant supposée orientée.
En déduire l'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à deux droites parallèles données est un nombre arithmétique donné.

1348. — On considère deux triangles ABC, A'B'C' tels que les droites AA', BB', CC' sont concourantes en O et qu'en outre AB et A'B' soient parallèles, ainsi que BC et B'C'. Montrer que AC et A'C' sont parallèles.

1349. — On considère un quadrilatère ABCD dont les diagonales se coupent en O et on marque sur AB le point M tel que OM est parallèle à BC et sur AD le point M' tel que OM' est parallèle à CD. Montrer que MM' est parallèle à BD.

1350. — 1° Ensemble des milieux des segments dont les extrémités décrivent deux plans parallèles donnés.
2° Ensemble des milieux des segments dont les extrémités décrivent deux droites fixes, ces segments étant parallèles à un plan fixe.
3° Généraliser les 1° et 2° aux points divisant le segment dans un rapport donné.
4° Conclure que les droites qui rencontrent deux droites fixes et qui restent parallèles à un plan fixe rencontrent une infinité d'autres droites fixes.

1351. — Soit deux axes xOy et $x'O'y'$ non situés dans un plan. Soit sur le premier un point M et sur le second M' tels que $\overline{OM} = 2\,\overline{O'M'}$.
1° Démontrer que MM' est parallèle à un plan fixe.
2° Ensemble des points I milieux de MM'.

1352. — Soit un trapèze ABCD de bases AB et CD, dont les diagonales se coupent en O. On appelle M le point de BD tel que AM est parallèle à BC, M' le point de AC tel que BM' est parallèle à AD. Démontrer que MM' est parallèle aux bases.

1353. — Soit un losange ABCD; sur les côtés AB et CD on place respectivement les points E et F tels que $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{3}$.
1° Démontrer que EF passe par le centre du losange.
2° La droite EF coupe la droite AD en I et la droite BC en K. Démontrer que EI = EF = FK, et que le triangle DBI est rectangle.

Exercices.

PROBLÈMES

1354. — 1° Construire deux segments connaissant leur somme et leur rapport.

2° Construire deux segments connaissant leur différence et leur rapport.

1355. — On considère un triangle isocèle ABC (CA = CB) et l'on trace les hauteurs AA' et BB'; puis l'on marque sur AC le point D tel que l'angle $\widehat{CBD}$ soit droit.

Démontrer les relations :

$$\overline{CA}^2 = \overline{CB'}.\overline{CD}$$
$$BB' \times AD = BD \times AB'.$$

1356. — Soit un triangle ABC. On prend sur AB un point M variable et sur AC un point M' variable tel que l'on ait constamment : $\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = k\frac{\overline{M'C}}{\overline{AC}}$, k étant un nombre réel donné. La droite MM' coupe BC en P.

Démontrer que le rapport $\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}}$ reste constant quand M varie, k restant fixe.

1357. — On considère un parallélogramme ABCD. Par le point A on trace une droite quelconque qui coupe la diagonale BD (ou son prolongement) en E, le côté BC (ou son prolongement) en F et le côté CD (ou son prolongement) en G.

1° Démontrer les relations :

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EA}}; \qquad \overline{EA}^2 = \overline{EF}.\overline{EG}.$$

2° Démontrer les relations :

$$\frac{\overline{GD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{GA}}{\overline{AF}}; \qquad \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}$$

et en conclure que, lorsque E varie sur BD, le produit GD × BF est constant.

1358. — On considère deux droites sécantes $x'Ox$ et $y'Oy$. D'un point A de $x'Ox$ on trace AA' perpendiculaire sur Oy et A'H perpendiculaire sur Ox; de même, d'un point B de $y'Oy$ on trace BB' perpendiculaire sur Ox et B'K perpendiculaire sur Oy.

1° Démontrer que l'on a :

$$OH.OB = OA.OK.$$

2° Que peut-on dire des droites AB et HK?

1359. — On donne deux droites concourantes (d) et (d'); une droite (δ) les coupe en A et A', une droite (δ') parallèle à (δ) les coupe en B et B'. On joint A et A' à un point O quelconque du plan. Les parallèles tracées de B et B' à OA et OA' se coupent en O'.

1° Démontrer que (d), (d') et OO' sont concourantes.

2° *Application.* Par un point pris dans le plan de deux droites non parallèles, tracer une droite qui passe par le point de rencontre (supposé hors des limites du dessin) des deux premières droites.

1360. — Montrer que si 4 plans parallèles découpent sur une sécante une division harmonique, ils découpent aussi une division harmonique sur toute sécante.

1361. — Si trois droites (d), (d') et (d'') sont parallèles à un plan (π) (sans que deux d'entre elles soient dans un même plan) toutes les droites qui les rencontrent sont parallèles à un même plan.

1362. — Soit trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ et :

$$\frac{OA}{3} = \frac{OB}{4} = \frac{OC}{5}.$$

Faire la figure.

1363. — Soit trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ et :

$$\frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{OB}{\sqrt{3}} = \frac{OC}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}.$$

Faire la figure.

1364. — Soit 4 points quelconques de l'espace A, B, A', B'; O le milieu de AB, O' le milieu de A'B'. Démontrer que :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\,\overrightarrow{OO'}.$$

CHAPITRE XIX

TRANSFORMATIONS

I. TRANSLATION

284. Définition.

☆ **Étant donné un vecteur libre $\vec{v}$, on appelle translation une transformation qui à tout point M fait correspondre le point M′ tel que**

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

Le point M′ est dit le transformé du point M dans la translation définie par le vecteur $\vec{v}$. Nous supposons le vecteur $\vec{v}$ non nul.

A tout point M du plan ou de l'espace correspond un point M′ distinct du point M. Remarquons que si le vecteur $\vec{v}$ a son support parallèle à un plan (π), à tout point du plan (π) correspond un point du plan. La translation est dite plane.

285. Propriété fondamentale. — Soit une translation définie par un vecteur $\vec{v}$.

Au point A correspond A′ tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$. Au point M correspond M′ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ (*Fig. 204*).

On a (n° 258) :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} \implies \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}.$$

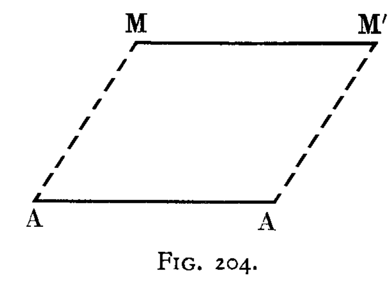


FIG. 204.

On peut énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Dans une translation définie par un vecteur $\vec{v}$, le transformé d'un vecteur lié est un vecteur lié équipollent. Un vecteur libre est indifférent à la translation.**

286. Transformés d'une droite, d'une demi-droite d'un segment, d'un angle. — Soit une droite (d) un point A de (d), A′ son transformé dans la translation définie par $\vec{v}$; M un point quelconque de (d), M′ son transformé.

Puisque : $$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'};$$

le point M′ se trouve sur la droite (d') tracée par A′ et parallèle à (d).

Réciproquement soit M'_1 un point quelconque de (d'). Puisque (d) et (d') sont parallèles, il existe un point M de (d) tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'_1} \iff \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'_1}.$$

Le point M'_1 est le transformé d'un point de (d).

- **Le transformé d'une droite (d) passant par A est la droite (d') parallèle à (d) et passant par A′, transformé de A.**

Si (d) est parallèle au support de $\vec{v}$ les droites (d) et (d') sont confondues. Soit une demi-droite Ox et un point $M \in Ox$. Si O′ est le transformé de O et M′ celui de M on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}$, ce qui implique que le transformé de Ox est une demi-droite $O'x'$ de même sens.

- **Le transformé d'une demi-droite Ox est une demi-droite $O'x'$ parallèle à Ox et de même sens, les points O et O′ se correspondant dans la translation.**

On démontre de même :

- **Le transformé d'un segment est un segment égal, parallèle, de même sens, les extrémités se correspondant dans la translation.**

Soit un angle $\widehat{xOy}$, $A \in Ox$, $B \in Oy$ et O′, A′, B′ les transformés respectifs de O, A, B (*Fig. 205*). On a : $OA = O'A'$; $OB = O'B'$; $AB = A'B'$.

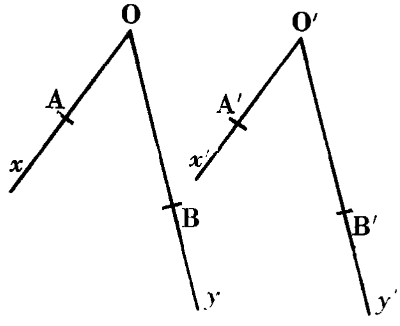


FIG. 205.

Les triangles AOB et A′O′B′ sont égaux (3[e] cas) donc $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$. Nous énoncerons :

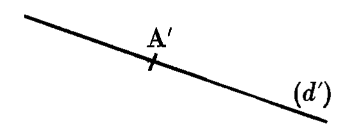
- **Le transformé d'un angle est un angle égal, les côtés des deux angles étant parallèles et de même sens.**

Réciproquement, soit deux angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$ dont les côtés sont parallèles et de même sens. D'après ce qui précède la translation définie par le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ fait correspondre à l'angle $\widehat{xOy}$ l'angle égal $\widehat{x'O'y'}$.

Deux angles dont les côtés sont respectivement parallèles et de même sens, sont égaux. Ceci complète le résultat du n° 63.

287. Transformé d'un plan. — Soit un plan (π) et un point $A \in (\pi)$, (d) une droite quelconque de (π) passant par A. Soit A′ le transformé de A, (d') le transformé de (d) (*Fig. 206*).

Puisque $(d') \parallel (d)$, (d') se trouve dans le plan (π') passant par A′ et parallèle à (π).



Réciproquement, (d') étant une droite quelconque de (π') et passant par (A′), la droite (d) parallèle à (d') et passant par A est dans (π).

▪ **Le transformé d'un plan (π) passant par A est le plan (π') passant par A′ transformé de A, et parallèle à (π).**

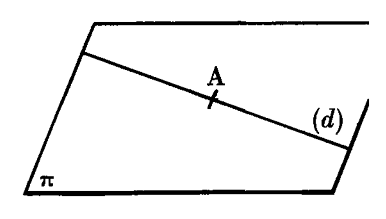


FIG. 206.

Si le vecteur $\vec{v}$ définissant la translation a son support parallèle à (π), les plans (π) et (π') sont confondus.

288. Transformé d'un cercle. — Soit, dans un plan (π), un cercle (C) de centre O et de rayon R. Soit O′ le transformé de O dans la translation définie par le vecteur $\vec{v}$. A tout point M de (C), correspond M′ tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}$.

1° $OM \parallel O'M'$, donc M′ se trouve dans le plan (π'), passant par O′ et parallèle à (π).

2° $OM = O'M'$, le point M′ se trouve sur le cercle (C′), de centre O′ et de rayon R, dans le plan (π').

Réciproquement, si M′ est un point quelconque de (C′), il existe un point M et un seul du cercle (C) tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}$. Le point M′ est le transformé de M dans la translation.

▪ **Le transformé d'un cercle est un cercle égal, les deux centres et les deux plans se correspondant dans la translation.**

Exercices. 1365. — Quel est, dans une translation, le transformé d'un demi-plan? d'un dièdre?

1366. — On donne deux droites parallèles (d) et (d'). Déterminer toutes les translations pour lesquelles (d') est le transformé de (d).

1367. — Même question que la précédente avec deux plans parallèles (π) et (π').

1368. — On donne deux cercles égaux (C) et (C′). Existe-t-il une translation dans laquelle (C′) est le transformé de (C)?

1369. — On donne deux droites (d) et (d') et un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer un point M de (d) et M′ de (d') tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

1370. — On considère deux droites parallèles (D) et (D′) et de part et d'autre de la bande ainsi délimitée deux points fixes A et B. On joint A à un point M de (D) et B à un point M′ de (D′).
1° Construire les transformés du point B et de la droite (D′) par la translation définie par le vecteur $\overrightarrow{M'M}$.
2° Construire les points M et M′ sachant que AM = BM′ et que MM′ a une direction donnée.
3° MM′ ayant toujours une direction donnée, construire M et M′ pour que le chemin AM + MM′ + M′B soit minimum.

1371. — 1° On fait subir à une droite (D) une translation ($\mathcal{T}$); on obtient une droite (D′) à laquelle on applique de nouveau la même translation ($\mathcal{T}$) d'où une nouvelle droite (D″). En déduire qu'une droite (Δ) non parallèle à (D) est coupée par (D), (D′), (D″) en trois points dont l'un est le milieu des deux autres.
2° Utiliser le résultat précédent pour résoudre le problème suivant : Mener par les sommets d'un triangle donné ABC trois droites parallèles qui interceptent sur une droite quelconque deux segments égaux. (On pourra faire subir à la droite passant par C la translation $\overrightarrow{BA}$.)

1372. — Construire un cercle tangent à deux droites parallèles données et passant par un point donné.

Exercices.

II. HOMOTHÉTIE

289. Définition.

☆ **Étant donné un point fixe O, appelé centre d'homothétie, et un nombre réel k, appelé rapport d'homothétie, l'homothétie de centre O et de rapport k fait correspondre à tout point M le point M′ tel que :** $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.

Si $k = 0$, l'homothétie est dite singulière; à tout point M correspond le point O.

Si $k \neq 0$, ce que nous supposerons désormais, l'homothétie est régulière. Le point M′ est l'homothétique ou l'homologue du point M.

Les points O, M, M′ sont alignés, et sur la droite qui les porte : $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k$.

Si $k > 0$, l'homothétie est positive, M et M′ sont du même côté de O.
Si $k < 0$ l'homothétie est négative, M et M′ sont de part et d'autre de O.
Si $k = -1$ l'homothétie coïncide avec la symétrie par rapport à O.

Si le point M est en O le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est nul, donc $\overrightarrow{OM'} = \vec{0}$, le point M′ est en O. Nous dirons que O est un point double de la transformation. Cherchons s'il y a d'autres points doubles. Si M était un tel point, on aurait :

$\overrightarrow{OM} = k\,\overrightarrow{OM}$, soit : $\overrightarrow{OM}(1-k) = 0 \implies OM\,|1-k| = 0$. Donc :

1° $OM = 0$ M est en O.

2° $1 - k = 0 \implies \overrightarrow{OM}(1-k) = 0$. Tout point coïncide avec son homologue. L'homothétie coïncide avec la transformation identique. Nous supposerons dans la suite $k \neq 1$.

290. Propriété fondamentale de l'homothétie. — Soit deux points A et B et leurs homologues A′ et B′ dans l'homothétie de centre O et de rapport k.

On a : $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$.

D'où, par différence : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

- **THÉORÈME. — Dans une homothétie de centre O et de rapport k, l'homologue d'un vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur colinéaire $\overrightarrow{A'B'}$ tel que : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.**

291. Homothétique d'une droite, d'une demi-droite d'un angle, d'un plan.

1. Droite. — Soit une droite (d), A un point de cette droite, M un point quelconque de (d), A′ et M′ les homologues de A et M dans l'homothétie de centre O et de rapport k (*Fig. 207*). Puisque $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$, le point M′ se trouve sur la droite (d') passant par A′ et parallèle à (d).

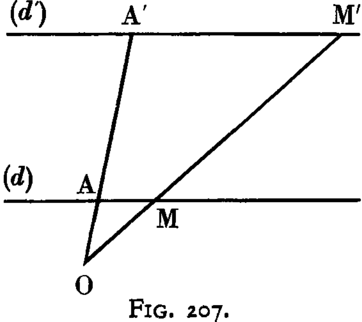


Fig. 207.

Réciproquement, M′ étant un point de (d'), il existe un point M de (d) défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'M'}$. M′ est l'homologue de M.

- **L'homologue d'une droite (d) passant par A est la droite (d') passant par A′, homothétique de A, et parallèle à (d).**

Si (d) ne passe pas par le centre d'homothétie (d) et (d') sont distinctes.

Si (d) passe par le centre d'homothétie les droites (d) et (d') sont confondues.

Considérons deux droites parallèles (d) et (d'), un point O quelconque dans leur plan, n'appartenant à aucune des droites. Une droite passant par O et coupant (d) en A coupe (d') en A′. L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ fait correspondre au point A le point A′ et à la droite (d), la droite (d').

- **Deux droites parallèles peuvent être considérées comme homothétiques d'une infinité de façons. Le centre d'homothétie peut être pris arbitrairement dans leur plan, en dehors de chacune d'elles.**

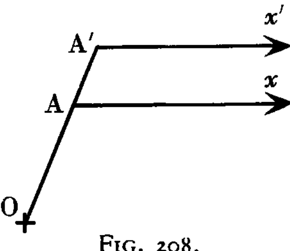


Fig. 208.

2. Demi-droite. — Soit une demi-droite Ax, A′ l'homothétique de A.

Si $k > 0$ (*Fig. 208*), le point O est extérieur à AA′; soit M sur Ax et M′ son homologue : $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$, les vecteurs sont de même sens, l'homologue

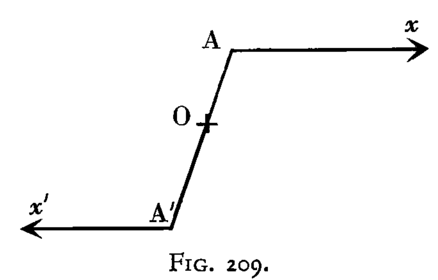


FIG. 209.

de Ax est $A'x'$ parallèle et de même sens.

Si $k < 0$, on voit de même que Ax et $A'x'$ sont de sens contraires (*Fig. 209*).

▪ **L'homologue de la demi-droite Ax est la demi-droite $A'x'$, l'origine A' est l'homothétique de A, les deux demi-droites sont parallèles, de même sens pour une homothétie positive, de sens contraires pour une homothétie négative.**

3. ANGLE. — Soit un angle $\widehat{xAy}$. Si $k > 0$ les homothétiques de Ax et Ay sont $A'x'$ et $A'y'$, respectivement parallèles et de même sens, donc :

$$\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'};$$

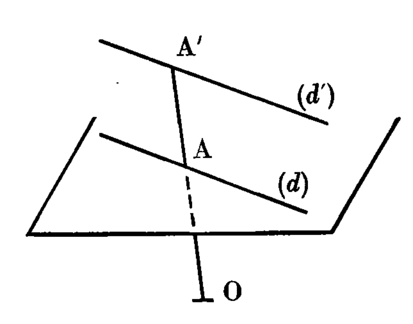


FIG. 210.

Si $k < 0$, $A'x'$ est de sens contraire à Ax, $A'y'$ est de sens contraire à Ay, l'angle opposé par le sommet à $\widehat{x'A'y'}$ est égal à $\widehat{xAy}$.

▪ **L'homothétique d'un angle est un angle égal.**

4. PLAN. — Soit un plan (π) et $A \in (\pi)$. Soit (d) une droite de (π) passant par A. L'homothétique de A est A', l'homothétique de (d) est (d') parallèle à (d). La droite (d') est dans (π') parallèle à (π) et passant par A' (*Fig. 210*).

Réciproquement, soit (d') de (π') et passant par A', et (d) parallèle à (d') passant par A; (d) appartient à (π) et (d') est l'homothétique de (d).

▪ **L'homothétique d'un plan (π) passant par A est le plan (π') passant par A' homologue de A, et parallèle à (π).**

292. Homothétique d'un cercle. — Soit, dans un plan (π), un cercle (C) de centre O et de rayon R. Nous considérons une homothétie dont le centre est quelconque (dans le plan (π) ou non). Soit k le rapport d'homothétie O' l'homologue de O, M' l'homologue d'un point M quelconque de (C). On a : $\overrightarrow{O'M'} = k\,\overrightarrow{OM}$. Il en résulte :

1° $O'M' \parallel OM$. Donc M' se trouve dans (π'), parallèle à (π), et passant par O'.

2° $O'M' = |k|.OM$. Donc M' se trouve sur le cercle tracé dans (π'), de centre O' et de rayon $|k|R$.

Réciproquement, à tout point M' du cercle (C') correspond un point M du cercle (C) tel que : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{k}.\overrightarrow{O'M'}$.

▪ **L'homothétique d'un cercle (C) est un cercle (C'), les deux plans et les deux centres des deux cercles sont homologues; le rapport des rayons est la valeur absolue du rapport d'homothétie.**

293. Cas de l'homothétie plane. — Soit, dans un plan un cercle (C) de centre O et de rayon R, un centre I d'homothétie dans ce plan, et k le rapport d'homothétie. L'homothétique du cercle (C) est le cercle (C′) dont le centre O′ se trouve sur la droite IO tel que $\dfrac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = k$, et dont le rayon est $|k|.R$.

Si M et M′ sont deux points homologues de ces cercles on a : OM // O′M′.

Réciproquement, soit deux cercles (C) et (C′) de centres distincts O et O′, de rayons R et R′, existe-t-il une homothétie dans laquelle ces deux cercles sont homologues?

S'il existe une telle homothétie, son centre I se trouve sur la droite OO′, le rapport d'homothétie est tel que $|k| = \dfrac{R'}{R}$, et on a : $\dfrac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = k$.

Il en résulte que si $R' \neq R$, et si I et J sont les deux points tels que :

$$\frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = \frac{R'}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{JO'}}{\overline{JO}} = -\frac{R'}{R};$$

l'homothétie positive de centre I et de rapport $\dfrac{R'}{R}$ transforme le cercle (C) en un cercle de centre O′ et de rayon R′ soit cercle (C′); l'homothétie négative de centre J et de rapport $-\dfrac{R'}{R}$ transforme (C) en (C′).

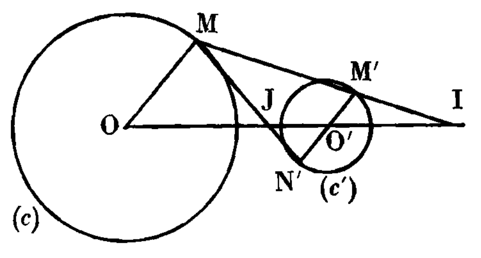


FIG. 211.

■ THÉORÈME. — **Deux cercles donnés non égaux se correspondent dans deux homothéties, l'une positive, l'autre négative; les rapports d'homothétie ont pour valeur absolue le rapport des rayons; les centres d'homothétie sont les deux points I et J tels que :**

$$\frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{R'}}{R}; \qquad \frac{\overline{JO'}}{\overline{JO}} = -\frac{\overline{R'}}{R}.$$

REMARQUES. — 1. Soit M un point de (C) non situé sur OO′, M′N′ le diamètre de (C′) parallèle à OM tel que OM et O′M′ soient de même sens (*Fig. 211*); M et M′ sont homologues dans l'homothétie positive, le point I est l'intersection de MM′ et OO′; de même J est l'intersection de MN′ et OO′.

2. Les points I et J sont conjugués harmoniques par rapport à O et O′.

3. Si les deux cercles sont concentriques les deux centres d'homothétie sont confondus au centre commun, les rapports sont $\dfrac{R'}{R}$ et $-\dfrac{R'}{R}$ (*Fig. 212*).

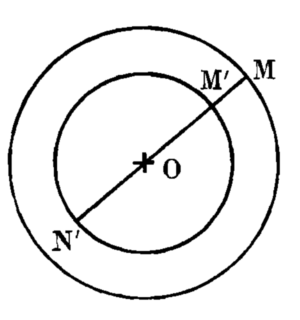


FIG. 212.

4. Si les deux cercles sont égaux, il n'y a plus d'homothétie positive, l'homothétie négative est la symétrie par rapport au milieu du segment des centres. Remarquons que, dans ce cas, O et O′ étant les centres des deux cercles, ces deux cercles sont homologues dans la translation définie par $\overrightarrow{OO'}$.

294. Position des centres d'homothétie par rapport aux deux cercles. — Nous supposons $R > R'$ et $OO' = d$. Le point J est entre O et O′, le point I tel que O′ est entre O et I.

On a :

$$\frac{OI}{R} = \frac{O'I}{R'} = \frac{d}{R - R'}; \qquad OI = \frac{dR}{R - R'}, \qquad O'I = \frac{dR'}{R - R'}.$$

$$\frac{OJ}{R} = \frac{O'J}{R'} = \frac{d}{R + R'}; \qquad OJ = \frac{dR}{R + R'}, \qquad O'J = \frac{dR'}{R + R'}.$$

$$OI - R = \frac{R}{R - R'}[d - (R - R')]; \quad O'I - R' = \frac{R'}{R - R'}[d - (R - R')].$$

$$OJ - R = \frac{R}{R + R'}[d - (R + R')]; \quad O'J - R' = \frac{R'}{R + R'}[d - (R + R')].$$

Le tableau ci-dessous donne les résultats suivant les positions relatives des deux cercles :

d	Position des cercles	Centre d'homothétie positive	Centre d'homothétie négative	Figure
$d < R - R'$	(C′) intérieur à (C)	Intérieur à (C′) donc à (C)	Intérieur à (C′) donc à (C)	*Fig. 213*
$d = R - R'$	Tangents intérieurement	Point de contact	Intérieur à (C′) donc à (C)	*Fig. 214*
$R - R' < d$ $d < R + R'$	Sécants	Extérieur à (C) Extérieur à (C′)	Intérieur à (C) Intérieur à (C′)	*Fig. 215*
$d = R + R'$	Tangents extérieurement	Extérieur à (C) Extérieur à (C′)	Point de contact	*Fig. 216*
$d > R + R'$	Extérieurs	Extérieur à (C) Extérieur à (C′)	Extérieur à (C) Extérieur à (C′)	*Fig. 217*

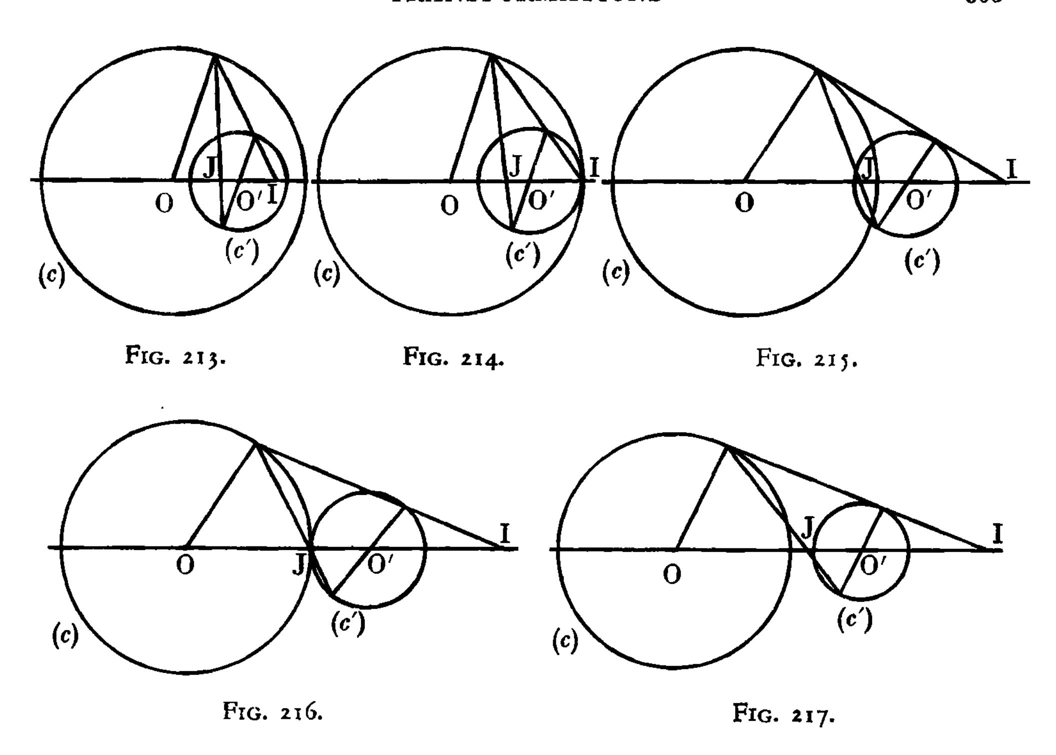


FIG. 213. FIG. 214. FIG. 215.

FIG. 216. FIG. 217.

295. Tangentes communes à deux cercles. — On dit que deux cercles admettent une tangente commune extérieure, les points de contact étant T et T′, s'il existe une droite tangente en T à un cercle, en T′ à l'autre, les deux cercles étant du même côté de TT′. Les rayons OT et O′T′ sont alors parallèles et de même sens; donc la droite TT′ passe par le centre d'homothétie positive I des deux cercles.

Réciproquement, supposons que par le point I on puisse tracer une tangente IT au cercle (C). Soit T′ l'homologue de T dans l'homothétie de centre I qui fait correspondre (C) et (C′). Les rayons OT et O′T′ sont parallèles, la droite TT′ étant perpendiculaire à OT est aussi perpendiculaire à O′T′; la droite TT′ est donc tangente à (C′). L'homothétie étant positive, les rayons OT et O′T′ sont de même sens; IT est tangente commune extérieure aux deux cercles.

On voit de même qu'une tangente commune intérieure (les deux cercles sont de part et d'autre de cette tangente) passe par le centre d'homothétie négative J des deux cercles et, réciproquement, si de J on peut tracer une tangente à l'un des cercles, elle est tangente à l'autre et c'est une tangente commune intérieure.

En utilisant les résultats du tableau de la page 362, on obtient les résultats suivants :

POSITION DES CERCLES	NOMBRE DES TANGENTES COMMUNES EXTÉRIEURES	NOMBRE DES TANGENTES COMMUNES INTÉRIEURES	FIGURE
(C′) intérieur à (C)	0	0	*Fig. 218*
Tangents intérieurement	1 la tangente au point de contact	0	*Fig. 219*
Sécants	2	0	*Fig. 220*
Tangents extérieurement	2	1 La tangente au point de contact	*Fig. 221*
Extérieurs	2	2	*Fig. 222*

Remarquons que lorsqu'il y a deux tangentes communes de même nature, elles sont symétriques par rapport à la ligne des centres.

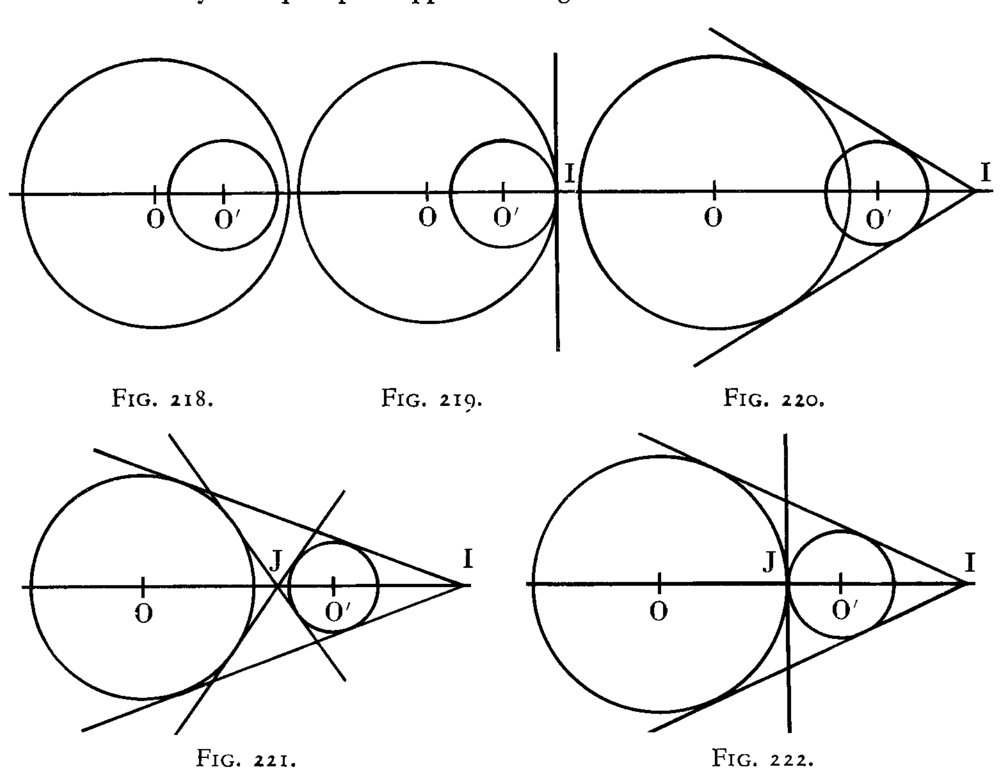


FIG. 218. FIG. 219. FIG. 220.

FIG. 221. FIG. 222.

296. Triangles homothétiques. — Soit un triangle ABC et son transformé A′B′C′ dans l'homothétie de centre O et de rapport k.

Les droites AB et A′B′ homothétiques sont parallèles, ou confondues, de même AC et A′C′ et BC et B′C′. On a :

$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \quad \widehat{B} = \widehat{B}'; \quad \widehat{C} = \widehat{C}'.$$

Enfin : $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB} \Longrightarrow A'B' = |k|.AB,$

donc : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}.$

▪ THÉORÈME. — **Si deux triangles sont homothétiques :**

1° leurs côtés homologues ont même direction;

2° leurs angles homologues sont égaux;

3° leurs côtés homologues sont proportionnels, le rapport de deux côtés homologues étant le rapport d'homothétie.

Considérons deux triangles ABC et A′B′C′ tels que :

$$AB \,//\, A'B', \quad AC \,//\, A'C' \quad \text{et} \quad BC \,//\, B'C'.$$

Si BC et B′C′ sont de même sens, et si on pose $\dfrac{B'C'}{BC} = k$, on a $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$.

Soit O le point de BB′ tel que : $\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k$. (Ce point existe si $k \neq 1$, donc si les triangles donnés ne sont pas égaux.)

Dans l'homothétie de centre O et de rapport k, l'homologue de B est B′ puisque $\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k$; l'homologue de C est C′, car : $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$; l'homologue de la droite BA est B′A′ (elle passe par B′ homologue de B et elle est parallèle à AB, de même l'homologue de CA est C′A′, il en résulte que l'homologue de A est A′).

▪ THÉORÈME. — **Deux triangles dont les côtés sont respectivement parallèles sont homothétiques.**

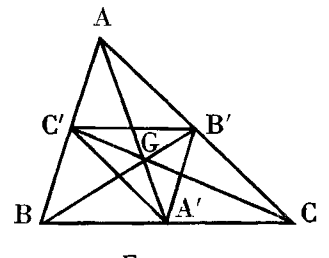


FIG. 223.

APPLICATION. — Soit un triangle ABC, et A′, B′, C′ les milieux des côtés respectifs BC, CA, AB (*fig. 223*). On a : B′C′ // BC; C′A′ // CA; A′B′ // AB. Les deux triangles sont homothétiques.

Le centre d'homothétie se trouve sur AA′, BB′ et CC′, on retrouve le résultat : **Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.**

On a enfin : $\overrightarrow{B'C'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Il en résulte que si G est le centre de gravité du triangle on a : $\dfrac{GA'}{GA} = \dfrac{GB'}{GB} = \dfrac{GC'}{GC} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercices. **1373.** — Étudier, dans une homothétie donnée, l'homologue d'un dièdre.

1374. — Quelles sont les homothéties dans lesquelles se correspondent :
— Deux demi-droites parallèles?
— Deux vecteurs de supports parallèles?
— Deux plans parallèles?
— Deux cercles dans des plans parallèles? **Exercices.**

PROBLÈMES

1375. — Construire un cercle tangent à deux droites concourantes données et passant par un point donné.

1376. — Construire un cercle tangent à un cercle donné et tangent à une droite donnée en un point donné de cette droite. (Déterminer le point de contact des deux cercles, en le considérant comme centre d'homothétie de ces deux cercles).

1377. — On considère tous les cercles (C) tangents en A à une droite (d). Quel est l'ensemble des extrémités des diamètres des cercles (C), parallèles à (d)?

1378. — Quel est l'ensemble des points dont le rapport des distances à deux droites concourantes données est une constante donnée? On déterminera un point de l'ensemble et on envisagera les homothéties ayant pour centre le point d'intersection des deux droites.

1379. — Deux carrés dont les côtés sont parallèles peuvent-ils être considérés comme homothétiques? De combien de façons?

1380. — En utilisant l'exercice n° 1378, construire les points dont les distances aux trois droites qui portent les côtés d'un triangle sont proportionnelles à trois nombres donnés.

1381. — Ramener la construction d'un cercle tangent à une droite donnée et passant par deux points donnés à celle d'un cercle tangent à deux droites et passant par un point.

1382. — Tracer par un point O une droite qui coupe un cercle donné en deux points A et B tels que $\frac{\text{OA}}{\text{OB}} = k$. ($k$ nombre arithmétique donné.)

1383. — Dans l'espace quel est l'ensemble des centres d'homothétie, dont le rapport k est donné, tels que l'homologue d'une droite (d) donnée rencontre une droite (δ) donnée?

1384. — Soit (P′) et (P) deux plans parallèles (Q′) et (Q) deux autres plans parallèles, (P) et (Q) étant sécants. Quel est l'ensemble des centres d'homothétie dans lesquels l'ensemble (P′), (Q′) est l'homologue de l'ensemble (P), (Q)?

1385. — Par un point S on trace trois droites Sx, Sy, Sz non dans un même plan et on coupe ces droites par un plan (P) qui les rencontre respectivement en A, B, C. Trouver l'ensemble des centres de gravité et l'ensemble des orthocentres des triangles ABC quand le plan (P) se déplace parallèlement à lui-même.

1386. — 1° On donne deux droites (d) et (d') dans un plan, et un point O de ce plan. Tracer par O une droite qui rencontre (d) en A et (d') en A′ tels que $\frac{\overline{\text{OA}}}{\overline{\text{OA'}}} = m$. ($m$ étant un nombre réel donné.)

2° Le problème peut-il être traité si (d) et (d') ne sont pas dans un même plan? Si le point O est donné montrer que m est alors déterminé. Si le nombre m est donné, quel est l'ensemble des points O possibles?

1387. — Deux cercles sont tangents en O. On trace dans l'un la corde OA et dans l'autre la corde perpendiculaire OB. Démontrer que la droite AB passe par un point fixe quand OA varie.

1388. — 1° Étudier l'ensemble des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée, aux cercles tangents à deux droites fixes.

2° Même question pour les cercles tangents en A à une droite donnée.

1389. — Ensemble des centres d'homothétie tels que les homologues de deux points donnés A et B soient respectivement dans deux plans donnés (P) et (Q).

LIVRE VII

FONCTIONS – GRAPHES

CHAPITRE XX

FONCTIONS COORDONNÉES GRAPHES

I. NOTION DE FONCTION

297. Définition. — ☆ **Un nombre y est fonction d'un nombre variable x sur un domaine $\mathfrak{D}$ si à toute valeur numérique $x \in \mathfrak{D}$ on peut faire correspondre une valeur de y.**

EXEMPLE. $\mathfrak{D} = R^+$ et $y = \sqrt{x}$; à $x = 4$ correspond $y = 2$
à $x = 3$ correspond $y = 1{,}73205\ldots.$

On désigne souvent une fonction de la variable x par la notation $y = f(x)$, qui se lit « f de x » et qui est l'abréviation de « fonction de x ». La valeur prise par la fonction pour $x = x_0$ se note $y_0 = f(x_0)$.

Par extension, lorsque l'on considère plusieurs fonctions de la variable x, on use de notations telles que $g(x)$, $h(x)$, $P(x)$.

Pour faire correspondre à tout $x \in \mathfrak{D}$ un nombre y, il faut disposer d'un procédé, appliquer une règle. Voici des exemples divers :

EXEMPLE 1. — Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble caractérisé par $0 < x < 1$. Tout $x \in \mathfrak{D}$ peut s'écrire dans le système décimal au moyen d'un nombre fini ou infini de chiffres c_i, sous la forme : $x = 0,\ c_1c_2c_3c_4 \ldots c_n \ldots.$

Pour transmettre des renseignements qui doivent rester secrets nous codons nos messages selon la grille :

Code f :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
8	1	6	2	7	5	3	9	4	0

Chaque chiffre doit être remplacé par celui qui se trouve au-dessous de lui. A chaque nombre x correspond un nombre $y = f(x)$, par exemple :

$$x_0 = 0{,}543 \qquad y_0 = f(x_0) = 0{,}726.$$
$$x_1 = 0{,}73205 \qquad y_1 = f(x_1) = 0{,}36107.$$

EXEMPLE 2. $\mathfrak{D} = D^+$ (Ensemble des nombres décimaux positifs.) En faisant la preuve par 9 de toute une série d'opérations, on est conduit à négliger la virgule (qui fait l'objet d'autres vérifications) et à remplacer chaque nombre par le reste de la division par 9 de la somme de ses chiffres. Ceci constitue une règle g :

$$x_0 = 138{,}325 \qquad t_0 = g(x_0) = 4.$$

298. Sur la notation $f(x)$. — Remarquons que dans la notation $f(x)$, la lettre f reçoit un double emploi :

1° f désigne ou rappelle le *procédé* qui permet de passer de x à y. Dans les exemples précédents f désigne une façon de coder, g une règle arithmétique complexe.

2° Pour une valeur donnée x_0, $f(x_0)$ désigne le *résultat* obtenu en se conformant au procédé, c'est donc un *nombre*.

En raison de ce double emploi, et pour qu'il n'engendre pas de confusion, il faudrait en principe écrire des phrases telles que :

« La fonction f définie par la formule : $\forall x_0 \quad f(x_0) = 3x_0 - 5$ ».

« La fonction C définie par la formule : $\forall x_0 \quad C(x_0) = \cos x_0$ ».

Mais l'usage permet de s'exprimer d'une façon plus rapide et de dire : « la fonction $3x - 5$, la fonction $\cos x$ ».

Encore faut-il bien comprendre que *la fonction cosinus n'est pas un nombre* mais un *procédé* qui permet de faire correspondre à tout angle *un* nombre, le cosinus de *cet* angle.

299. Types usuels de domaines de définition pour une fonction. — Les fonctions que nous aurons à considérer seront le plus souvent définies sur R ou tout au moins sur des domaines caractérisés par des conditions telles que :

$a \leqslant x \leqslant b$, un tel ensemble s'appelle le *segment* $[a, b]$.
$a < x < b$, un tel ensemble s'appelle l'*intervalle* $]a, b[$.
$a < x \leqslant b$, un tel ensemble est un *intervalle ouvert à gauche, fermé à droite* $]a, b]$.
$a \leqslant x < b$, intervalle *fermé à droite, ouvert à gauche* $[a, b[$.
$a \leqslant x$, *demi-droite fermée* $[a, +\infty[$.
$a < x$, *demi-droite ouverte* $]a, +\infty[$.
$x < b$, $x \leqslant b$: définitions analogues.

EXEMPLES. — 1. La fonction f définie par la formule $f(x) = \sqrt{(2-x)(x-1)}$ est définie sur le *segment* $1 \leqslant x \leqslant 2$.

2. La fonction g définie par la formule $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}$ est définie sur *l'intervalle* $1 < x < 2$.

3. La fonction h définie par la formule $h(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}$ est définie sur l'*intervalle semi-ouvert* $1 < x \leqslant 2$.

4. La fonction u définie par la formule $u(x) = \sqrt{x-1}$ est définie sur la *demi-droite fermée* $1 \leqslant x$.

300. Fonction croissante sur un intervalle. — Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$, nous dirons que la fonction $f(x)$ *croît sur cet intervalle*, (ou qu'elle est *croissante sur cet intervalle*) si les valeurs que prend la fonction augmentent lorsque les valeurs données à la variable augmentent.

Sous une autre forme, la même définition s'écrit :

$$f(x) \text{ est croissante sur }]a, b[\iff \begin{cases} a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b, \quad \forall x_0 \, \forall x_1 \\ x_0 < x_1 \implies f(x_0) < f(x_1). \end{cases}$$

Pour une fonction croissante les valeurs données à la variable, d'une part, les valeurs prises par la fonction, d'autre part, se classent par grandeur dans le même ordre.

Exemples. — 1. L'allongement d'un ressort vertical, fixé par son extrémité supérieure, est une fonction croissante du poids qu'on suspend à la partie inférieure.

2. La fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par la formule $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction croissante sur tout intervalle où elle est définie.

En effet : $$0 < x_0 < x_1 \implies \sqrt{x_0} < \sqrt{x_1},$$
en vertu de l'implication mutuelle : $0 < \alpha < \beta \iff \alpha^2 < \beta^2, \quad 0 < \alpha, \quad 0 < \beta.$

3. Soit (Δ) une droite, A un point extérieur, H la projection orthogonale de A sur (Δ), M un point variable de (Δ), x la longueur en cm de HM, y la longueur en cm de AM. On a démontré (n° **56**) que y est une fonction croissante de x.

301. Fonction décroissante sur intervalle. — Nous dirons que la fonction $f(x)$, définie pour $a < x < b$, *décroît sur cet intervalle*, si les valeurs que prend la fonction diminuent lorsque les valeurs données à la variable augmentent.

Sous une autre forme : $f(x)$ est décroissante sur $]a, b[$

$$\iff a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b, \quad \forall x_0 \, \forall x_1 \quad x_0 < x_1 \implies f(x_0) > f(x_1).$$

Pour une fonction décroissante les valeurs prises par la fonction se classent, par grandeur, dans l'ordre inverse de celui des valeurs données à la variable.

Exemple. — Soit $x > 0$ la longueur en cm de l'une des dimensions d'un rectangle, y la longueur en cm qu'il convient de donner à l'autre dimension pour que l'aire du rectangle soit de 100 cm². y est une fonction décroissante de x.

302. Fonction constante sur un intervalle. — Une fonction est *constante sur un intervalle* si elle prend la même valeur pour toute valeur numérique donnée à la variable. Sous une autre forme :

$$f(x) \text{ est constante sur }]a, b[\iff \begin{cases} a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b \quad \forall x_0 \, \forall x_1 \\ x_0 \neq x_1 \implies f(x_0) = f(x_1). \end{cases}$$

Exemples. — 1. A une température fixe, une masse donnée d'un gaz, soumise à une pression p, occupe un volume v.

v est une fonction de p ; pv une fonction de p. Pour un gaz parfait la fonction pv est une constante sur l'intervalle que l'on peut atteindre expérimentalement.

2. La fonction $y = \dfrac{2x - 6}{x - 3}$ est constante sur tout intervalle qui ne contient pas la valeur 3.

3. La fonction $y = x + \sqrt{x^2}$ est constante et égale à zéro pour $x \leqslant 0$.

303. Accroissement. Taux d'accroissement. — Les définitions relatives à la croissance et à la décroissance se fondent sur la comparaison du classement de deux valeurs données à la variable, avec le classement des valeurs correspondantes prises par la fonction.

Pour classer deux nombres, on peut former leur différence.

$x_0 < x_1$ signifie $x_1 - x_0 > 0$, et réciproquement.
$f(x_0) < f(x_1)$ signifie $f(x_1) - f(x_0) > 0$, et réciproquement.
$f(x_0) > f(x_1)$ signifie $f(x_1) - f(x_0) < 0$, et réciproquement.

Nous sommes donc en mesure de fournir des propriétés caractéristiques des fonctions croissantes (ou décroissantes) en utilisant les signes comparés des différences $x_1 - x_0$ et $f(x_1) - f(x_0)$.

☆ **DÉFINITIONS. — Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$, x_0 et x_1 deux valeurs appartenant à cet intervalle.**
1° On appelle *accroissement de la variable*, de la valeur x_0 à la valeur x_1, le nombre $x_1 - x_0$.
2° On appelle *accroissement de la fonction* correspondant à l'accroissement $x_1 - x_0$ de la variable, le nombre $f(x_1) - f(x_0)$.

EXEMPLES. — 1. La fonction définie par la relation $f(x) = 3x + 1$ est définie pour toute valeur de x, donc sur tout intervalle.

Pour $x_0 = 2$ $f(2) = 7$.
Pour $x_1 = 5$ $f(5) = 16$.
De $x_0 = 1$ à $x_1 = 5$ la fonction admet l'accroissement $16 - 7 = 9$.
Pour $x_2 = 0$ $f(0) = 1$.
Pour $x_3 = -5$ $f(-5) = -14$.
De x_2 à x_3 la fonction admet l'accroissement $-14 - 1 = -15$.

Dans le langage courant *accroissement* ne s'emploie que pour des différences positives. Dans le langage mathématique, le mot *accroissement* s'emploie indifféremment dans tous les cas : il correspond à une notion algébrique.

2. La fonction définie par la relation $g(x) = \sqrt{(2 - x)(x - 1)}$ est définie sur le segment $[1, 2]$.

Pour $x_0 = \frac{5}{4}$ $g(x_0) = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{4} - 1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Pour $x_1 = \frac{7}{4}$: $g(x_1) = \sqrt{\left(2 - \frac{7}{4}\right)\left(\frac{7}{4} - 1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

De x_0 à x_1, la fonction admet l'accroissement $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$.

TAUX D'ACCROISSEMENT. — **En nous servant des définitions précédentes nous pouvons formuler la définition de la croissance sous la forme :**

Une fonction croît sur l'intervalle $]a, b[$ si l'accroissement de la variable et l'accroissement correspondant de la fonction ont toujours le *même signe*.

Nous avions dit : $x_0 < x_1 \implies f(x_0) < f(x_1)$.
Nous aurions pu dire : $x_0 > x_1 \implies f(x_0) > f(x_1)$.

La nouvelle définition dispense de comparer x_0 et x_1.

Pour une fonction décroissante, les deux accroissements auront des signes contraires.

Pour comparer les *signes* de deux nombres on pourrait former le produit : si le produit est positif les signes sont les mêmes, s'il est négatif les signes sont différents. Mais nous formerons le *quotient* qui, du point de vue des signes, possède la même propriété que le produit et qui nous fournira par la suite d'autres renseignements sur les fonctions.

Ce quotient : $$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

se nomme le *taux d'accroissement*.

En conclusion nous énoncerons le théorème suivant :

▪ THÉORÈME. — **Si une fonction est croissante sur un intervalle, le taux d'accroissement est positif pour tout couple x_0, x_1 de valeurs appartenant à l'intervalle; et réciproquement.**
Si une fonction est décroissante sur un intervalle, le taux d'accroissement est négatif sur tout l'intervalle; et réciproquement.
Si une fonction est constante sur un intervalle, le taux d'accroissement est nul sur tout l'intervalle; et réciproquement.

EXEMPLE. — Revenons sur l'exemple donné **n° 301** du rectangle d'aire constante :

$$x > 0, \quad y = \frac{100}{x}; \qquad y_1 = \frac{100}{x_1} \quad x_1 > 0; \qquad y_0 = \frac{100}{x_0} \quad x_0 > 0$$

$$y_1 - y_0 = \frac{100}{x_1} - \frac{100}{x_0} = 100\,\frac{x_0 - x_1}{x_1 x_0}$$

Le taux d'accroissement est $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{-100}{x_1 x_0}$, il est négatif.

Nous compléterons ces notions sur la croissance ou la décroissance par une dernière définition.

☆ DÉFINITION. — **Une fonction est croissante au sens large sur l'intervalle] a, b [**

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b, \quad \forall x_0, \quad \forall x_1 \\ \qquad\qquad \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geqslant 0. \end{array} \right.$$

EXEMPLES. — 1. Pour $x \in \mathrm{R}^+$, tout x peut s'écrire comme la somme d'un nombre entier et d'un nombre compris entre 0 et 1.

$$4{,}3 = 4 + 0{,}3 \qquad \sqrt{2} = 1 + 0{,}41421\ldots.$$

Nous dirons que x est la somme de sa partie entière $\mathrm{E}(x)$ et de sa partie fractionnaire $\mathrm{F}(x)$:

$$x = \mathrm{E}(x) + \mathrm{F}(x).$$

Sur R^+, $\mathrm{E}(x)$ est une fonction croissante au sens large :

$$x_0 = 3{,}2 \qquad x_1 = 3{,}7 \qquad x_3 = 5{,}1$$
$$\mathrm{E}(x_0) = 3 \quad \mathrm{E}(x_1) = 3 \quad \mathrm{E}(x_3) = 5$$
$$\mathrm{E}(x_1) - \mathrm{E}(x_0) = 0 \qquad \mathrm{E}(x_3) - \mathrm{E}(x_1) = 2.$$

2. La fonction $y = x + \sqrt{x^2}$ est croissante au sens large sur R.

Exercices. 1390. — Démontrer que la fonction $y = 3x^2$ est croissante pour toutes les valeurs positives de x et décroissante pour toutes les valeurs négatives de x.

Si l'on donne à x les valeurs $x_1 = -2$ et $x_2 = +2$, on trouve les mêmes valeurs pour y_1 et y_2. Cela veut-il dire que la fonction est constante entre x_1 et x_2?

Si l'on donne à x les valeurs $x_1 = -1$ et $x_2 = +2$, on trouve que $y_2 - y_1$ est du même signe que $x_2 - x_1$. Cela veut-il dire que la fonction est croissante quand x varie de -1 à $+2$?

1391. — Pour $0 < x < 1$ on peut écrire, dans le système décimal

$$x = 0,\ c_1c_2 \dots c_n \dots.$$

On pose :

$$y = f(x) = 0,\ c_1 0 c_2 0 c_3 \dots 0 c_n 0 \dots$$

en intercalant un zéro entre deux chiffres consécutifs de x.

Étudier $f(x)$ du point de vue de la croissance.

1392. — Soit (L) une ligne, A un point fixe sur la ligne, M un point. variable sur la ligne, O un point fixe hors de (L), x la longueur de (L) entre A et M, y la longueur du segment OM. (*On s'en tiendra, pour x, à une notion intuitive.*) Imaginer des lignes simples formées de segments de droites et d'arcs de cercles de telle sorte que y soit une fonction croissante de x, une fonction non-décroissante de x.

1393. — On définit une fonction $f(x)$ par les relations suivantes :

a) $x \neq 0 \qquad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

b) $x = 0 \qquad f(0) = 0$.

Étudier $f(x)$ du point de vue de la croissance.

1394. — Pour $0 < x < 1$ et $x = 0,\ c_1c_2c_3 \dots : c_n \dots$

On définit une fonction $f(x)$ par la loi suivante :

$f(x) = 1$ si aucun chiffre n'est égal à 1

$f(x) = 2$ si un chiffre au moins est égal à 1.

Démontrer que cette fonction n'est ni croissante ni décroissante sur un intervalle aussi petit soit-il.

1395. — Une fonction est dite *rationnelle* si elle est donnée par une formule du type $f(x) = \mathfrak{R}(x)$ où $\mathfrak{R}(x)$ désigne une fraction rationnelle.

1° Quel est le domaine de définition des fonctions rationnelles :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}; \qquad g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; \qquad h(x) = \frac{x+3}{x(x^2+4)}?$$

2° Formuler en toute généralité le résultat concernant le domaine de définition d'une fonction rationnelle.

1396. — Une fonction définie sur R ou sur un intervalle du type :

$$]-a, \quad +a[$$

est dite *paire* si

$$-a < \alpha < a \qquad \forall \alpha \qquad f(-\alpha) = f(\alpha)$$

et *impaire* si

$$-a < \alpha < a \qquad \forall \alpha \qquad f(-\alpha) = -f(\alpha).$$

1° Étudier de ce point de vue les fonctions définies par les formules :

$$f(x) = x^2; \qquad g(x) = x^3; \qquad h(x) = x^4; \qquad l(x) = x^5.$$

Quelle est l'origine des dénominations *paire* et *impaire?*

2° Étudier de ce point de vue les fonctions :

$$u(x) = \frac{x}{x^2+1}; \qquad v(x) = \frac{x^3}{x^4+1}; \qquad w(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^3+x}.$$

3° La fonction $\dfrac{x^3+x}{1+x}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Trouver ces fonctions. **Exercices.**

II. COORDONNÉES

304. Coordonnées cartésiennes. — Soit un plan (π) et, dans ce plan, deux droites sécantes, O leur point commun. Marquons sur la première un point E distinct de O. Tout point M de la première droite est caractérisé par un nombre relatif :

$x = \dfrac{\overline{\text{OM}}}{\overline{\text{OE}}}$, et à tout nombre relatif correspond un point unique de la droite.

E correspond à $+1$: c'est le *point unitaire*; le sens de $\overrightarrow{\text{OE}}$ oriente la droite OE qui devient l'axe $x'Ox$.

Un point unitaire F sur la seconde permet de caractériser tout point P par un nombre :

$y = \dfrac{\overline{\text{OP}}}{\overline{\text{OF}}}$, et de définir un axe $y'Oy$.

La longueur de OE n'est pas nécessairement égale à celle de OF.

L'angle des axes n'est pas nécessairement droit.

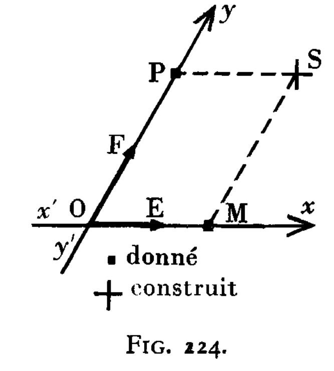
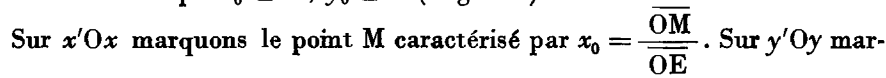


FIG. 224.

CORRESPONDANCE ENTRE LES POINTS DU PLAN ET LES COUPLES (x, y)

1° Soit un couple $x_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 \in \mathbf{R}$ (*Fig. 224*).



Sur $x'Ox$ marquons le point M caractérisé par $x_0 = \dfrac{\overline{\text{OM}}}{\overline{\text{OE}}}$. Sur $y'Oy$ marquons le point P caractérisé par $y_0 = \dfrac{\overline{\text{OP}}}{\overline{\text{OF}}}$.

Par M traçons la droite parallèle à la direction de $y'Oy$, par P la parallèle à la direction de $x'Ox$; comme $y'Oy$ et $x'Ox$ sont sécantes, les droites construites se coupent en un point S.

Au sens de l'addition vectorielle, nous avons construit la somme géométrique :

$$\overrightarrow{\text{OS}} = \overrightarrow{\text{OM}} + \overrightarrow{\text{OP}}.$$

Nous dirons que le point S est l'image du couple rangé (x_0, y_0).

2° *Réciproquement*, soit un point T du plan (*Fig. 225*).

Par T traçons la parallèle à la direction de $y'Oy$; comme $y'Oy$ coupe $x'Ox$, la droite construite coupe aussi $x'Ox$ en un point Q. Nous avons projeté T sur $x'Ox$ parallèlement à $y'Oy$, Q est la projection de T et la droite TQ la projetante.

FIG. 225.

D'une façon analogue T se projette en R sur $y'Oy$, parallèlement à $x'Ox$.

Au sens de la géométrie vectorielle, nous avons décomposé le vecteur $\overrightarrow{OT}$ selon $x'Ox$ et $y'Oy$: $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.

Le point Q est caractérisé par le nombre $x_1 = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OE}}$, le point R par $y_1 = \dfrac{\overline{OR}}{\overline{OF}}$. Au point T correspond le couple rangé (x_1, y_1) dont il est l'image.

☆ **DÉFINITIONS. — x_0 et y_0 sont respectivement l'*abscisse* et l'*ordonnée* de S pour le repère défini par le *point de référence* O et les *vecteurs unitaires* $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$.**

L'axe $x'Ox$ est *l'axe des abscisses*, il est gradué par l'intermédiaire du vecteur unitaire $\overrightarrow{OE}$.

L'axe $y'Oy$ est l'*axe des ordonnées*, il est gradué par l'intermédiaire du vecteur unitaire $\overrightarrow{OF}$.

x_0 et y_0 sont les *coordonnées cartésiennes* de S pour le repère précédent, O est l'*origine* des coordonnées.

Remarques. x_0 et y_0 sont des nombres abstraits. Les composantes $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ de $\overrightarrow{OS}$ ne dépendent que de la direction des axes $x'Ox$ et $y'Oy$, et non de leur graduation. Mais x_0 et y_0 dépendent de la graduation.

Parler d'axes de coordonnées sans en préciser la graduation est commettre par omission une faute grave : les axes ne peuvent être utilisés pour obtenir des coordonnées qu'après choix de vecteurs unitaires.

305. Points alignés avec l'origine. — 1° Les points S_1 (x_1, y_2), S_2 (x_2, y_2) sont supposés distincts, et distincts de l'origine O avec laquelle ils sont alignés.

Étudions d'abord le cas général (*Fig. 226*) où aucun des points n'est situé sur un axe de coordonnées. Nous projetons S_1 et S_2 sur $x'Ox$, parallèlement à $y'Oy$, en M_1 et M_2. En vertu de la double application du théorème de Thalès au triangle (n° **280**), nous avons :

$$\frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{M_2S_2}}{\overline{M_1S_1}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} \qquad (1)$$

or : $$\frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM_1}} = \frac{\dfrac{\overline{OM_2}}{\overline{OE}}}{\dfrac{\overline{OM_1}}{\overline{OE}}} = \frac{x_2}{x_1}$$

et de même : $$\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{y_2}{y_1} \qquad (2)$$

ainsi : (1) et (2) $\Longrightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1}$

$\Longrightarrow x_1y_2 - y_2x_1 = 0.$

FIG. 226.

Dans le cas où S_1 et S_2 appartiennent à $x'Ox$ on a $y_1 = y_2 = 0$, et s'ils appartiennent à $y'Oy$, $x_1 = x_2 = 0$. On peut donc affirmer sans restriction :

$$O, S_1 \text{ et } S_2 \text{ alignés} \implies x_1y_2 - y_1x_2 = 0 \quad (\text{relation } \mathcal{A}).$$

2° Supposons réalisée pour deux points S_1 et S_2 distincts et différents de O la relation :

$$x_1y_2 - y_1x_2 = 0. \qquad (\mathcal{A})$$

Envisageons d'abord le cas général où aucun des points n'est sur un axe de coordonnées. (*Fig. 227*).

La droite passant par O et S_1 n'est pas parallèle à $y'Oy$, donc elle rencontre en un point S_3 la projetante S_2M_2. Le point S_3 a pour abscisse x_2 et une certaine ordonnée y_3. D'après l'étude précédente

$$O, S_1 \text{ et } S_3 \text{ alignés} \implies x_1y_3 - y_1x_2 = 0 \quad (\mathcal{A}').$$

En utilisant l'hypothèse ($\mathcal{A}$) on voit que :

$$(\mathcal{A}) \text{ et } (\mathcal{A}') \implies x_1(y_3 - y_2) = 0 \text{ avec } x_1 \neq 0 \implies y_2 = y_3.$$

O, S_1 et S_2 sont donc alignés.

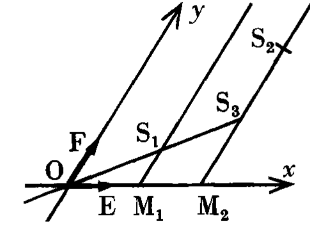


FIG. 227.

Dans le cas particulier où S_1 est sur $x'Ox$ et S_1 distinct de O :

$x_1 \neq 0$, $y_1 = 0$ et $x_2y_1 - y_2x_1 = 0 \implies y_2 = 0$, donc O, S_1 et S_2 alignés.

On traiterait de même le cas où S_1 est sur $y'Oy$. Ainsi :

$$x_1y_2 - y_1x_2 = 0 \quad (\mathcal{A}) \implies O, S_1 \text{ et } S_2 \text{ alignés.}$$

▪ THÉORÈME. — **L'alignement de deux points distincts, et distincts de l'origine, avec l'origine, conduit à l'équivalence logique :**

$$\mathbf{O, S_1 \text{ et } S_2 \text{ alignés} \iff x_1y_2 - y_1x_2 = 0 \quad (\mathcal{A}).}$$

306. Changement de coordonnées par translation des axes gradués. — Un premier système de référence (Σ) est déterminé par un point O et deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$, il comporte donc un axe des abscisses $x'Ox$ gradué par $\overrightarrow{OE}$ et un axe des ordonnées $y'Oy$ gradué par $\overrightarrow{OF}$.

Un second système (Σ_1) est déterminé par un point O_1 et par des vecteurs unitaires $\overrightarrow{O_1E_1}$ et $\overrightarrow{O_1F_1}$ *respectivement équipollents à* $\overrightarrow{OE}$ *et* $\overrightarrow{OF}$.

On connaît les coordonnées (a, b) de O_1 dans le système (Σ).

Problème. — *Étant donné les coordonnées (x, y) d'un point S dans le système (Σ), trouver les coordonnées de $S(x_1, y_1)$, dans le système (Σ_1) (Fig. 228).*

Le point S se projette, parallèlement à $y'Oy$, en M sur $x'Ox$ et M_1 sur $x_1'O_1x_1$. On obtient de façon analogue P et P_1 sur $y'Oy$ et $y_1'O_1y_1$.

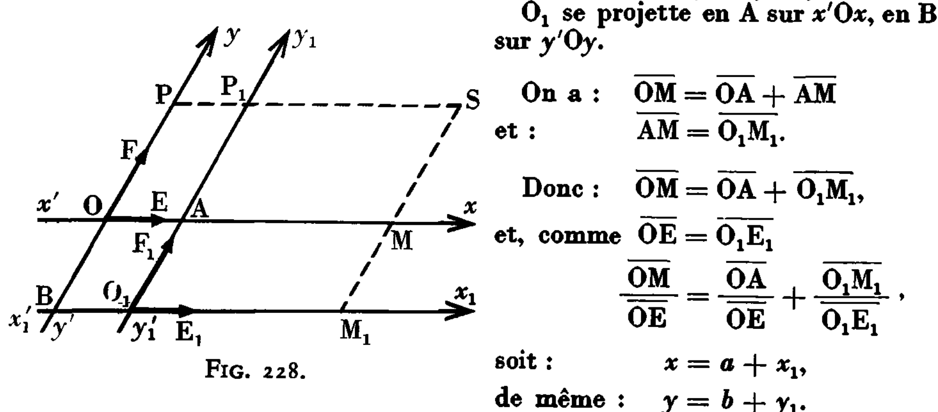


Fig. 228.

O_1 se projette en A sur $x'Ox$, en B sur $y'Oy$.

On a : $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$

et : $\overline{AM} = \overline{O_1M_1}$.

Donc : $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{O_1M_1}$,

et, comme $\overline{OE} = \overline{O_1E_1}$

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} + \frac{\overline{O_1M_1}}{\overline{O_1E_1}},$$

soit : $x = a + x_1$,

de même : $y = b + y_1$.

Changement de coordonnées par translation des axes gradués. —

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + x_1 \\ y &= b + y_1 \end{aligned}}$$

x, y coordonnées dans l'ancien système.

x_1, y_1 coordonnées dans le nouveau système.

a, b coordonnées de la *nouvelle* origine, dans *l'ancien* système.

307. Axes rectangulaires. Repères orthonormés. — On utilise souvent des axes rectangulaires.

Les axes étant perpendiculaires, si l'on choisit de plus des vecteurs unitaires de même longueur, OE = OF, on obtient un système de référence *orthonormé*, ou un *repère orthonormé*.

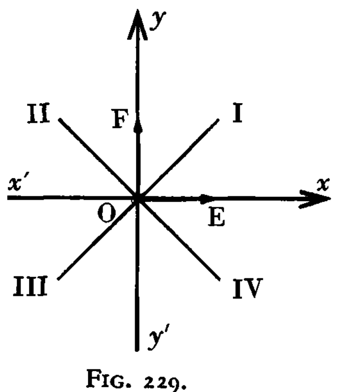


Fig. 229.

La bissectrice qui traverse les régions I et III relatives à un repère orthonormé s'appelle la première bissectrice (*Fig. 229*). On voit que :

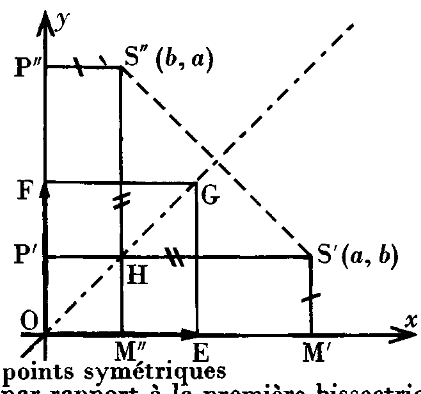
$$S(x, y) \in \text{première bissectrice} \iff x = y.$$

L'autre bissectrice s'appelle la seconde bissectrice :

$$S(x, y) \in \text{seconde bissectrice} \iff x = -y.$$

La figure *230* donne les résultats relatifs à la symétrie autour de la première bissectrice, la figure *231* donne les résultats relatifs à la symétrie par rapport à la seconde bissectrice. Démontrons-les.

Le point S' a pour coordonnées $x = a$, $y = b$; le point S'' a pour coordonnées $x = b$, $y = a$. Tous les points de la projetante S'P' ont la même ordon-



points symétriques
par rapport à la première bissectrice
$x' = y''$ $y' = x''$

FIG. 230.

(— b, — a) S″
P″
F
S′ (a, b)
P′
X
O
M′ —1 M″ E

points symétriques
par rapport à la seconde bissectrice
$x' = -y''$ $y' = -x''$

FIG. 231.

née b; tous les points de la projetante S″M″ ont la même abscisse b; ces deux projetantes se coupent au point (b, b) qui appartient nécessairement à la première bissectrice. Soit H ce point.

Nous avons $\overline{HS'} = \overline{M''M'} = a - b$; $\overline{HS''} = \overline{P'P''} = a - b$.

Il en résulte que le triangle S′HS″ est isocèle. Il est d'autre part rectangle en H et admet pour bissectrice la première bissectrice.

Cette bissectrice est axe de symétrie pour le triangle.

Le lecteur énoncera et démontrera la propriété réciproque en s'inspirant du procédé du n° 305.

Pour des points symétriques par rapport à la seconde bissectrice, on utilisera un axe auxiliaire OX porté par Ox, gradué avec la même unité et dirigé en sens inverse : le second résultat se déduit immédiatement du premier.

Exercices. 1397. — Démontrer que le milieu Q d'un segment $S_1(x_1, y_1) S_2(x_2, y_2)$ a pour coordonnées $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

1398. — On considère le vecteur $\overrightarrow{OS}$, S (a, b). Montrer que si S_1 a pour coordonnées (x_1, y_1) et $S_2(x_1 + a, y_1 + b)$, $\overrightarrow{S_1S_2}$ est équipollent à $\overrightarrow{OS}$. Comment sont répartis les points :
$S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_1 + a, y_1 + b)$, $S_3(x_1 + 2a, y_1 + 2b)$,
$S_4(x_1 + 3a, y_1 + 3b)$, ...?

1399. — Démontrer que les points A (1, 2), B (3, 4), C (8, 9), D (6, 7) sont les sommets d'un parallélogramme. Quel en est le centre?

1400. — Déterminer les milieux des côtés du parallélogramme précédent. Vérifier qu'ils sont les sommets d'un autre parallélogramme.

1401. — On donne un quadrilatère $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$. Montrer que les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme. Quel est le centre de ce parallélogramme? Montrer que le segment qui joint les milieux des diagonales a pour milieu le centre du parallélogramme précédent.

1402. — On donne le point K (1, 2). Quelles sont les coordonnées (x', y') du point M′ symétrique du point M (x, y) par rapport à K? **Exercices.**

III. GRAPHES

308. Graphe d'une fonction $y = f(x)$. — Le *graphe* d'une fonction $y = f(x)$ est l'ensemble des points (x_0, y_0) tels que :

$x_0 \in \mathcal{D}$, $y_0 = f(x_0)$. $\mathcal{D}$ étant le domaine de définition de la fonction.

EXEMPLES. — 1. *Étudier dans un repère orthonormé le graphe de la fonction :*

$$y = \sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

$\mathcal{D}$: $1 \leqslant x \leqslant 2$ (*Fig. 232*).

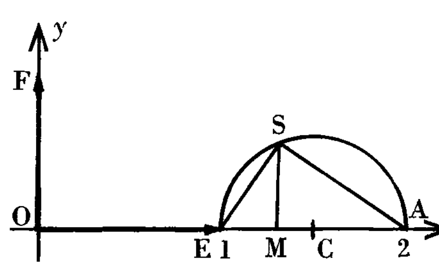


FIG. 232.

Marquons les points E(1, 0), A(2,0), M$(x_0, 0)$, S(x_0, y_0).

On a : $\overline{MS} = \sqrt{-\overline{ME}\cdot\overline{MA}}$

ou : $MS > 0$ et $MS^2 = -\overline{ME}.\overline{MA}$.

D'après le théorème réciproque d'une relation métrique dans le triangle rectangle, le triangle ESA est rectangle en S, et S se trouve sur le demi-cercle de diamètre EA du côté des $y > 0$.

On démontrera qu'inversement tout point de ce demi-cercle est un point du graphe. Le graphe cherché est le demi-cercle.

2. *Étudier le graphe de la fonction partie entière :* $y = E(x)$.

Le graphe se compose (*Fig. 233*) d'une suite de segments de longueur 1, parallèles à Ox, et privés de leur extrémité droite (ce que nous avons représenté d'une façon conventionnelle). En effet, pour $0 < x < 1$ $E(x) = 0$, même si x est très voisin de 1. Pour $x = 1$ la fonction saute brusquement de 0 à 1.

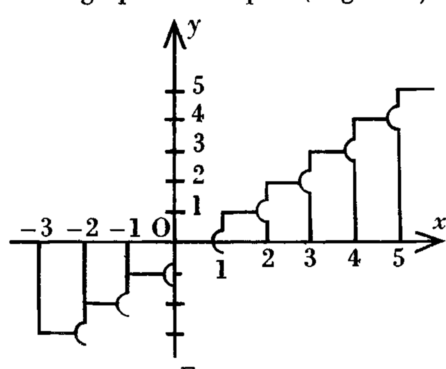


FIG. 233.

On prolonge cette fonction pour $x < 0$. Par exemple :

$x_0 = -0{,}71$ $\quad x_0 = -1 + 0{,}29$

$x_1 = -3{,}326$ $\quad x_1 = -4 + 0{,}674$

$E(x_0) = -1.$

$E(x_1) = -4.$

Exercices. *Faire le graphe des fonctions suivantes :*

1403. $y = E(x^2)$. **1404.** $y = E(\sqrt{x})$.

1405. $y = E(x) + E\left(x - \frac{1}{2}\right)$

1406. $y = E(\sqrt{x(8-x)})$, repère orthonormé.

1407. $y = x - E(x)$, repère orthonormé.

Faire le graphe de l'ensemble des points qui vérifient les relations suivantes :

1408. $x(x-1)y > 0$. **1409.** $y < E(x)$.

1410. $y < \sqrt{(x-1)(2-x)}$ et $1 < x < 2$, repère orthonormé.

1411. $y > E(x)$ et $y < E(x^2)$. **1412.** $E(x) = E(y)$.

Représenter l'ensemble des couples (x, y) dans les cas suivants :

1413. x = taille en centimètres pour chaque élève de votre classe.
y = longueur en centimètres d'une extrémité à l'autre des deux bras écartés, allongés et horizontaux.

Trouvez-vous une loi rigoureuse, c'est-à-dire une fonction, ou une loi approchée ?

N. B. Étudier la mise en page avant de faire le graphe.

1414. — Travail collectif. Relever les mots, *tous* les mots (y compris articles, conjonctions, etc.) sur quelques pages d'un texte littéraire ou scientifique. Chaque mot apparaît un certain nombre de fois. On donne à chaque mot un numéro de classement : 1 pour celui qui apparaît le plus souvent, 2 pour le suivant, etc..

x sera : le numéro dans le classement.
y : la fréquence du mot.

(De grands dépouillements de textes conduisent à la loi d'Estoup-Zipf : le produit $x.y$ est sensiblement constant.) **Exercices.**

PROBLÈMES

1415. — La fonction définie par la formule $f(x) = x + 1$ est-elle croissante? Appliquer la définition. Vérifier par le taux d'accroissement.

1416. — Même question pour la fonction $x + E(x)$.

1417. — Que peut-on dire d'une fonction $h(x)$ obtenue en ajoutant pour tout x, la valeur prise par une fonction croissante $f(x)$ et la valeur prise par une fonction croissante $g(x)$:

$$\forall x \quad f(x) + g(x) = h(x)?$$

Donner un exemple.

1418. — La fonction $f(x) = x^2$ et la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ sont croissantes pour $x > 0$, et prennent des valeurs positives.

Que peut-on dire de leur produit?

En serait-il de même pour la fonction $h(x) = (x-1)$ et $l(x) = x - 2$?

1419. — 1° Le repère étant orthonormé, placer les points suivants, définis par leurs coordonnées

A (+ 3, + 4); B (— 3, + 4);
C (+ 3, — 4); D (— 3, — 4 ;
E (+ 4, + 3); F (— 4, + 3 ;
G (+ 4, — 3); H (— 4, — 3).

Démontrer que ces 8 points sont tous sur un même cercle dont on précisera le centre. Étudier les axes de symétrie de l'octogone dont ces points sont les sommets.

1420. — Le repère étant orthonormé, que peut-on dire des coordonnées de deux points M′ et M″ tels que

$$\widehat{M'OM''} = 1 \text{ D} \quad \text{et} \quad OM' = OM''?$$

1421. — Le repère est tel que :

$$OE = OF = 1 \text{ cm} \qquad \widehat{EOF} = 60^\circ.$$

Représenter l'ensemble de tous les points dont les coordonnées $x = a$, $y = b$ sont entières et vérifient

$$0 \leqslant a \leqslant 10 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant b \leqslant 10.$$

Étudier leur disposition géométrique et le réseau des triangles obtenus en joignant des points consécutifs.

1422. — Le repère est orthonormé. On marque sur Ox le point M d'abscisse x et l'on trace le demi-cercle de diamètre OM avec $y > 0$.

On désigne par $f(x)$ le nombre des points à coordonnées entières situés à l'intérieur du demi-cercle ou sur sa périphérie.

1° La fonction $f(x)$ est paire.

2° Elle est non décroissante pour $x > 0$.

3° La représenter graphiquement.

1423. — Sur le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$, on définit une fonction par le procédé suivant :

On partage le segment $]0,1[$ en deux parties égales et sur la partie droite $\frac{1}{2} < x < 1$ la fonction est constante et égale à 1.

On partage le segment restant en deux parties égales, et sur la partie droite $\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}$ la fonction est constante et égale à $\frac{1}{2}$.

Sur $\frac{1}{8} < x \leqslant \frac{1}{4}$ la fonction a pour valeur $\frac{1}{2^2}$.

Sur $\frac{1}{16} < x \leqslant \frac{1}{8}$ la fonction a pour valeur $\frac{1}{2^3}$,

etc. Représenter cette fonction.

CHAPITRE XXI

FONCTION
$y = ax + b$

I. FONCTION $y = ax + b$

309. Le polynome du premier degré : rappel. — La fonction $f(x)$ définie par la formule :

$$\forall x_0 \quad f(x_0) = ax_0 + b$$

ne diffère pas de l'expression algébrique $ax + b$ que nous avons étudiée (au chapitre II) sous le nom de polynome du premier degré; elle est définie pour tout x.

Pour $a \neq 0$, le polynome est effectivement du premier degré. Il donne lieu à l'identité :

$$a \neq 0 \quad \forall\, x \quad ax + b \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

et, en désignant par p le nombre $-\frac{b}{a}$, racine de l'équation associée :

$$a \neq 0 \quad \exists\, x \ ? \quad ax + b = 0,$$

on peut écrire :

$$a \neq 0 \quad \forall\, x \quad ax + b \equiv a\,(x - p).$$

Nous avons étudié le signe du polynome et démontré les équivalences (pour $y = ax + b$) :

$$a \neq 0 \begin{cases} x < p & \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sgn} y = -\operatorname{sgn} a. \\ x = p & \Longleftrightarrow \quad y = 0. \\ x > p & \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sgn} y = +\operatorname{sgn} a. \end{cases}$$

Pour $a = 0$, la fonction $y = ax + b$ est toujours définie par $y = b$: c'est une constante.

310. Sens de variation. — Soit la fonction $f(x) = ax + b$ et $x_0 \neq x_1$. On a : $f(x_0) = ax_0 + b$, $f(x_1) = ax_1 + b$, $f(x_1) - f(x_0) = ax_1 - ax_0$, donc : $x_0 \neq x_1$ $\forall x_0, \forall x_1$ $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a$. Le *taux d'accroissement* est constant, d'où résulte le théorème suivant :

- THÉORÈME. — **Le sens de variation de la fonction $ax + b$ est donné par les équivalences suivantes :**

$a > 0 \iff ax + b$ **est croissante sur R.**
$a = 0 \iff ax + b$ **est constante sur R.**
$a < 0 \iff ax + b$ **est décroissante sur R.**

311. Définitions relatives à la variable.

☆ **On dit que la variable x tend vers l'infini positif, ou vers plus l'infini, et l'on écrit : $x \longrightarrow +\infty$, si, A étant un nombre positif arbitrairement grand, les valeurs numériques que l'on donne à la variable sont supérieures à A.**

Rien ne nous empêche par exemple, pour les fonctions précédentes, de donner à x des valeurs supérieures à 10^{10}, ou à 10^{100}, ou à $100^{(100^{100})}$ ... ou à tout autre nombre fixe, si grand soit-il, dont on nous donnerait la définition.

☆ **On dit que la variable x tend vers l'infini négatif, ou vers moins l'infini, et l'on écrit : $x \longrightarrow -\infty$ si, A étant un nombre positif arbitrairement grand, les valeurs numériques que l'on donne à la variable sont inférieures à l'opposé de A.**

On se souviendra que la notation $+\infty$ (ou $-\infty$) *ne désigne pas un nombre.* Si grand que soit un nombre, il reste fini. En conséquence on ne peut pas mettre un signe d'égalité entre une lettre comme x, qui est censée représenter un nombre, et le signe $+\infty$.

312. Définitions relatives à la fonction. — Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, les valeurs numériques que prend la fonction $y = \frac{x}{100} - 1$ peuvent dépasser tout nombre arbitrairement grand B donné à l'avance, il suffit de considérer des valeurs de x « assez grandes ».

Du fait que cette fonction est croissante, si elle atteint B pour une valeur x_0 donnée à x, elle dépassera B pour $x > x_0$. Mais la définition que nous allons donner ne doit pas s'associer dans l'esprit du lecteur à l'idée d'une *croissance perpétuelle.*

Tout le monde connaît le problème de l'escargot qui monte le long d'un poteau télégraphique : le jour il monte de deux mètres, la nuit il redescend d'un mètre. Le poteau mesure six mètres de haut. Quand l'escargot atteindra-t-il le sommet?

Notre propos n'est pas de résoudre ce problème mais de faire remarquer que sur une ligne illimitée Ox un point M astreint à la marche de l'escargot ne s'éloignerait pas constamment de O et que pourtant la distance OM finirait par dépasser toute longueur donnée L. Seulement on ne pourrait pas affirmer que la distance dépasserait définitivement L aussitôt après l'avoir atteinte une première fois.

Cet exemple montre que la définition suivante n'implique aucune idée de croissance continuelle.

☆ DÉFINITION. — **On dit que *la fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$* si, quel que soit le nombre positif B, il existe un nombre A tel que $x_0 > A$ implique $f(x_0) > B$.**
Cette définition se note :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \longrightarrow +\infty \\ \text{pour} \quad x \rightarrow +\infty \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B > 0 \quad \forall B \quad \exists A \\ \text{et : } x_0 > A \Longrightarrow f(x_0) > B. \end{array}\right.$$

313. Étude de la fonction $ax + b$ quand x tend vers l'infini. — Cette définition (et les définitions analogues que nous résumons plus bas) permet de décrire avec précision le comportement de la fonction pour les valeurs, grandes en valeur absolue, de la variable.

Soit donc $f(x) = ax + b$ une fonction donnée avec $a > 0$. Soit d'autre part B un nombre arbitrairement grand, mais donné et fixe. Cherchons si, pour des valeurs « assez grandes » de x, la valeur de $f(x)$ dépasse définitivement B. Nous commençons par nous poser le problème :

$$\exists x ? \quad ax + b > B.$$

La réponse est oui : $x > \dfrac{B - b}{a} \Longrightarrow ax + b > B;$

et, en vertu de cette réponse, nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — **Pour $a > 0$, la fonction $f(x) = ax + b$ tend vers l'infini positif quand x tend vers l'infini positif.**

Exemple. Soit la fonction $y = \dfrac{x}{1\,000\,000} - 50\,000\,000$

pour $x = 1\,000\,000$ $y = -49\,000\,000$
pour $x = 50\,000\,000\,000\,000$ $y = 0$
pour $x = 50\,000\,000\,000\,001$ $y = 0{,}000\,001$
pour $x = 50\,000\,010\,000\,000$ $y = 10.$

Cette fonction ne croît pas vite, mais elle croît ! Le graphe est malaisé à représenter, même en choisissant bien les vecteurs unitaires. Mais le point de vue du calcul est simple.

La fonction finit-elle par dépasser le nombre 10^{100}, par exemple?

$$\exists x ? \quad \frac{x}{10^6} - 5.10^7 > 10^{100}$$

Oui : $x > 10^6[10^{100} + 5.10^7] \Longrightarrow f(x) > 10^{100}$

Comme on ne demande qu'une condition suffisante, on peut prendre une condition plus forte, mais plus simple à écrire, par exemple

$$x > 2.10^{106} \Longrightarrow f(x) > 10^{100}.$$

AUTRES DÉFINITIONS ET THÉORÈMES. — Le tableau suivant résume les définitions relatives aux fonctions qui tendent vers $\pm\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$.

$f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \to +\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} B>0\ \forall B\ \exists A \\ x > A \Rightarrow f(x) > B \end{cases}$	$f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \to -\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} B>0\ \forall B\ \exists A \\ x < -A \Rightarrow f(x) > B \end{cases}$
$f(x) \longrightarrow -\infty$ quand $x \to +\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} B>0\ \forall B\ \exists A \\ x > A \Rightarrow f(x) < -B \end{cases}$	$f(x) \longrightarrow -\infty$ quand $x \to -\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} B>0\ \forall B\ \exists A \\ x < -A \Rightarrow f(x) < -B \end{cases}$

Le tableau suivant résume les théorèmes relatifs au comportement de la fonction $ax + b$ pour les valeurs infiniment grandes en valeur absolue de la variable.

▪ **THÉORÈME. — Le comportement de $y = ax + b$ pour $x \longrightarrow +\infty$ est donné par les implications :**

$a>0$ $ax+b \to +\infty$ quand $x \to +\infty$	$a<0$ $ax+b \to -\infty$ quand $x \to +\infty$
$a>0$ $ax+b \to -\infty$ quand $x \to -\infty$	$a<0$ $ax+b \to +\infty$ quand $x \to -\infty$

Tous ces théorèmes se démontrent comme le premier d'entre eux.

Nous traitons directement un cas, avec des données numériques.

EXEMPLE. — Étudier le comportement de $f(x) = -3x - 10\,000$ quand $x \longrightarrow -\infty$. On présume que $f(x) \to +\infty$.

Soit B, arbitraire, très grand, fixe.

$$\exists x? \quad -3x - 10\,000 > B$$

ou :

$$\exists x? \quad -3x > B + 10\,000$$

Réponse : Oui, $x < -\dfrac{B + 10\,000}{3}$, ce qui veut dire que tous les nombres négatifs dont la valeur absolue dépasse $\dfrac{B+10000}{3}$ conviennent.

Exercices. *Les fonctions suivantes sont-elles croissantes ou décroissantes?*

1424. $y = (x + 3)(x - 7) - (x - 1)(x + 8)$.

1425. $y = 2(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x - 7) - (x - 4)(x + 1)$.

1426. — Démontrer directement que la fonction :

$y = -\dfrac{x}{10} + 1$ tend vers $+\infty$, quand x tend vers $-\infty$.

Trouver une condition suffisante pour que $f(x) > 100\,000$.

1427. — Démontrer directement que la fonction, $y = -\dfrac{x}{7} + 2$ tend vers $-\infty$, quand x tend vers $+\infty$.

Trouver une condition suffisante pour que $f(x) < -1\,000$.

1428. — On rappelle que $E(x)$ désigne le plus grand entier $\leqslant x$.
Démontrer que la fonction $E(x)$ tend vers $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$.
Même question pour les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = E(x^2)$.

1429. — On considère la fonction définie, pour $x > 0$, par les conditions suivantes :
Si $E(x)$ est multiple de 4, $f(x) = x$.
Si $E(x)$ est multiple de 4, augmenté de 1, $f(x) = x + 1$.
Si $E(x)$ est multiple de 4, augmenté de 2, $f(x) = x + 2$.
Si $E(x)$ est multiple de 4, augmenté de 3, $f(x) = x + 3$.
Démontrer que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
A-t-on le droit de dire que $f(x)$ augmente indéfiniment, ou croît indéfiniment?

1430. — Étudier pour $x \to +\infty$ le comportement de la fonction :

$$f(x) = x - \frac{1}{10}E(x).$$

1431. — Étudier pour $x \to +\infty$ le comportement de la fonction $f(x)$ obtenue à partir de x en remplaçant dans l'écriture décimale de x tout chiffre de x par le chiffre 1. **Exercices.**

II. GRAPHE DE LA FONCTION $y = ax + b$

314. Graphe de la fonction $y = ax$. — Si $a = 0$, on a, quel que soit a, $y = 0$. Le graphe coïncide avec l'axe $x'Ox$.

Pour $a \neq 0$, le graphe contient l'origine car si $x_0 = 0$, alors $y_0 = 0$. Le graphe contient aussi le point A ($x_1 = 1, y_1 = a$).

Soit M ($x_2 = \lambda$, $y_2 = a\lambda$) avec $\lambda \neq 0$ un autre point du graphe, distinct de O et de A.

D'après la condition ($\mathcal{A}$) du n° **305** (*Fig. 234*) :

$\forall \lambda$, $(x_1y_2 - x_2y_1) = (1.a\lambda - a.\lambda) = 0$
$\Longrightarrow$ $\forall$M O, A et M alignés.

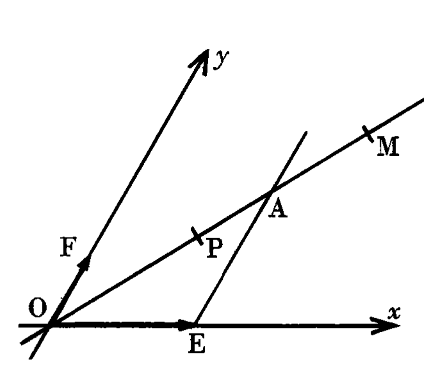


Fig. 234.

Si (D) désigne la droite (OA),
$\forall$M M $\in$ (D).

Le graphe est porté par (D).

Réciproquement, soit P $(x_3, y_3) \in$ (D). D'après la condition ($\mathcal{A}$) :

O, A et P alignés $\Longrightarrow$ $\begin{cases} (1.y_3 - a.x_3) = 0 \\ \text{ou } \ y_3 = ax_3. \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ P $\in$ au graphe.

Le graphe contient la droite (D).

- **THÉORÈME. — Le graphe de la fonction $y = ax$ est une droite passant par l'origine.**

315. Coefficient directeur. — Puisqu'il est une droite, le graphe de $y = ax$ est déterminé par deux points, l'origine et un point P différent de l'origine. Pratiquement on prendra P aussi loin que possible sur la feuille pour obtenir le maximum de précision.

Théoriquement on peut prendre le point A (1, a).

Pour un repère donné, quand a varie, l'ensemble de tous les graphes de toutes les fonctions $y = ax$ *appartient* au faisceau des droites passant par l'origine. Le lieu du point A est la droite (Δ) dont tous les points ont comme abscisse 1 : à tout point A $\in$ (Δ) correspond *une* valeur de a et *une* droite (OA) graphe de $y = ax$; à tout graphe correspond *un* point (1, a) sur (Δ).

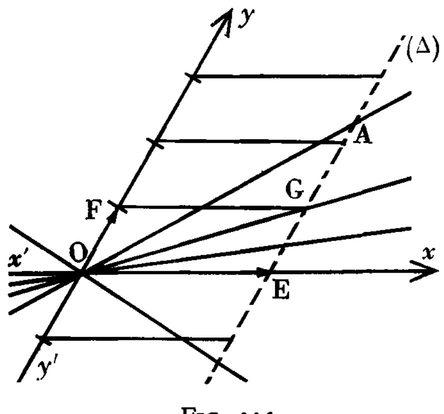


FIG. 235.

Il en résulte que l'ensemble des graphes coïncide avec le faisceau de sommet O *privé de l'axe* $y'Oy$ (*Fig. 235*).

Le coefficient a caractérise la direction du graphe par rapport au repère : c'est son ***coefficient directeur***. La droite (Δ), orientée et graduée comme $y'Oy$, constitue une ***échelle des directions*** pour l'ensemble des graphes. On peut ordonner cet ensemble en accord avec l'ordre des points sur (Δ).

316. Graphe de la fonction $y = ax + b$. — Nous avons maintenant à étudier l'ensemble des points ($x = \lambda$, $y = a\lambda + b$). Le point B ($x = 0$, $y = b$) fait partie du graphe. Prenons ce point comme nouvelle origine avec des axes gradués qui se déduisent des anciens par la translation $\overrightarrow{OB}$. On a, d'après le n° **306** (*Fig. 236*) :

$$\begin{cases} x = 0 + x_1 \\ y = b + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x. \\ y_1 = y - b. \end{cases}$$

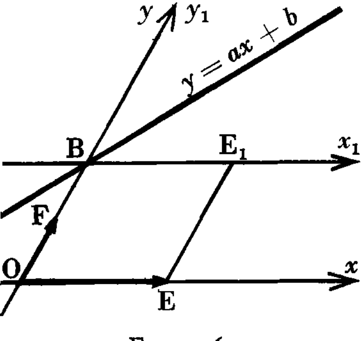


FIG. 236.

L'ensemble caractérisé dans l'ancien repère par ($x = \lambda$, $y = a\lambda + b$) est caractérisé dans le nouveau par ($x_1 = \lambda$, $y_1 = a\lambda$). C'est le graphe de la fonction $y_1 = ax_1$; c'est donc une droite passant par B, ayant a comme coefficient directeur par rapport au nouveau repère, comme par rapport à l'ancien.

Revenons au repère initial. Le graphe de $y = ax + b$ est une droite ayant a comme coefficient directeur et passant par le point (0, b) de l'axe $y'Oy$. Le nombre b, ordonnée correspondant au point d'abscisse 0, s'appelle ***l'ordonnée à l'origine*** du graphe. Le graphe de $ax + b$ est parallèle au graphe de ax.

■ **THÉORÈME. — Le graphe de la fonction $y = ax + b$ est une droite passant par le point (0, b) et parallèle au graphe de $z = ax$.**

Parce que son graphe est une droite, on dit parfois[1] que la fonction $y = ax + b$ est une fonction linéaire. Pour $b \neq 0$ elle n'est pas homogène.

317. Construction. Points remarquables. — **Puisque le graphe est une droite, deux points, en principe, suffisent pour le construire. Pratiquement, pour augmenter la précision du tracé on choisira :**

1° deux points aussi éloignés que possible (pour mieux guider la règle);

2° si possible, des points à coordonnées entières (pour diminuer l'erreur graphique);

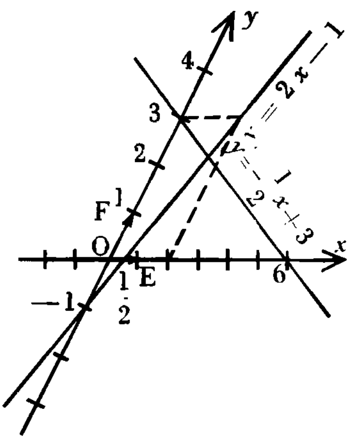


Fig. 237.

3° enfin, on *vérifiera après coup* que le graphe contient bien les points remarquables qui sont :

1. le point $x = 0$, $y = b$, où le graphe coupe $y'Oy$;

2. le point où le graphe coupe $x'Ox$. Ce point a une ordonnée nulle, il a donc pour abscisse la solution de l'équation :

$$\exists\, x ? \qquad ax + b = 0.$$

Il existe pour $a \neq 0$ et a pour abscisse

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Exemples (*Fig. 237*).

$y = 2x - 1$. Le graphe déterminé par : $(x = 0,\ y = -1)$ et $(x = 1,\ y = 1)$, contient le point remarquable $\left(x = \frac{1}{2},\ y = 0\right)$.

$y = -\frac{1}{2}x + 3$. Le graphe, déterminé par $(x = 0,\ y = 3)$ et $(x = 6,\ y = 0)$, contient d'autres points à coordonnées entières comme $(x = 2, y = 1)$.

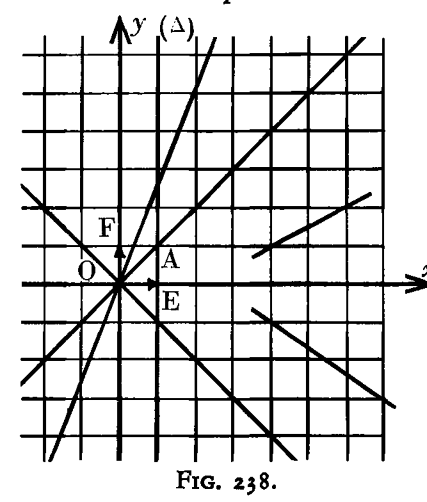


Fig. 238.

318. Cas d'un repère orthonormé — Dans le cas d'un repère orthonormé le coefficient de direction du graphe de la fonction $y = ax + b$ prend une signification particulière.

Marquons encore (*Fig. 238*) le point A $(x = 1, y = a)$ et la droite (Δ) lieu des points A; le graphe de $y = ax$ est la droite (OA).

$$\text{On a :} \quad a = \frac{\overline{EA}}{\overline{OF}} \quad \text{et} \quad 1 = \frac{\overline{OE}}{\overline{OE}}\,;$$

$$\text{donc :} \quad \frac{a}{1} = \frac{\overline{EA}}{\overline{OF}} \times \frac{\overline{OE}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{OE}} \times \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}}$$

1. Certains auteurs qualifient la fonction $y = ax$ de linéaire et homogène, et la fonction $y = ax + b$ de linéaire. D'autres réservent l'épithète de linéaire à la seule fonction $y = ax$, et appellent fonction *affine* la fonction $y = ax + b$.

Mais dans le cas présent $\overline{OE} = \overline{OF}$ (même longueur des vecteurs unitaires)

et $\widehat{EOF} = 1$ D **(axes rectangulaires)**

donc $$|a| = \frac{EA}{OE} = \text{tg}\,\varphi$$

en appelant φ l'angle aigu des droites (OA) et $x'Ox$.

***a* est *la pente* du graphe relativement à $x'Ox$. Ce mot a le sens qu'il a dans le langage courant (une route ayant une pente de 7 %) précisé par l'emploi d'un signe selon que le graphe « monte » ou « descend » quand on le décrit dans le sens des x croissants.**

Exercices. *Construire un repère* (Σ) *pour lequel* OE = 2 *cm*, OF = 1 *cm et* $\widehat{EOF} = 60°$. *Construire un repère orthonormé* (Σ') *pour lequel :*

OE = OF = 2 *cm*.

Dans chacun de ces repères construire les graphes des fonctions :

1432. $y = -x + 3$ et $y = x - 1$.

1433. $y = 2x - 3$ et $y = -\frac{x}{3} + 1$.

Construire, pour un repère orthonormé tel que OE = OF = 1 *cm, le graphe des fonctions suivantes :*

1434. $y = x + |x|$.

1435. $y = x + |x| + x - 1 + |x - 1|$.

1436. $y = x + |x| + x - 1 + |x - 1| + x - 2 + |x - 2|$.

1437. $y = |2x - 3| + |x - 5|$.

1438. $y = \big|(2x - 1) + |x - 3|\big|$.

1439. $y = \sqrt{(x - 1)^2} + x$.

1440. $y = x - E(x)$. $E(x)$ partie entière de $x > 0$.

1441. $\begin{cases} y = x & \text{pour } E(x) \text{ pair} \\ y = x + 1 & \text{pour } E(x) \text{ impair.} \end{cases}$

1442. $y = x - \frac{1}{2}E(x)$.

1443. $y = x - E(2x)$.

1444. — On sait que la fonction $f(x)$ est une fonction linéaire, mais on ne connaît a et b que par un encadrement

$$0{,}6 < a < 0{,}7 \qquad 1{,}2 < b < 1{,}3.$$

Que peut-on dire du graphe de cette fonction?

1445. — 1° Représenter graphiquement, sur les mêmes axes de coordonnées, les fonctions :

$$y = 3x - 1 \quad \text{et} \quad y = 5 - x.$$

2° Résoudre les inégalités simultanées :

$$3x - 1 > 1 \quad \text{et} \quad 5 - x > 1.$$

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3° Pour quelles valeurs de m peut-on avoir simultanément :

$$3x - 1 > m \quad \text{et} \quad 5 - x > m?$$

A partir de quelle valeur de m ces deux conditions sont-elles incompatibles? Interprétation graphique.

Exercices.

III. ÉQUATION D'UNE DROITE RELATIVEMENT A UN REPÈRE CARTÉSIEN DONNÉ.

319. Ensemble des graphes des fonctions $y = ax + b$. — Considérons un plan (π) et, dans ce plan, un repère fixe et donné, (Σ). De l'étude faite dans la section II de ce chapitre il résulte que l'ensemble de tous les graphes de toutes les fonctions linéaires $y = ax + b$, comprend toutes les droites de (π), à l'exception de celles qui sont parallèles à la direction de $y'Oy$. Les droites de (π) se répartissent donc en deux ensembles disjoints :

1° l'ensemble $\mathcal{G}$ des droites qui coupent $y'Oy$ et qui sont des graphes;

2° l'ensemble $\mathcal{Y}$ des droites parallèles à $y'Oy$ qui ne sont pas des graphes.

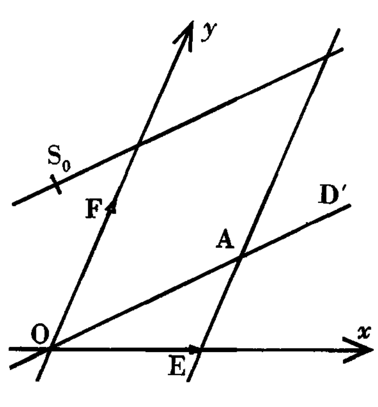


FIG. 239.

320. Déterminer la fonction dont le graphe passe par un point donné et possède une direction donnée. — Soit S_0 le point donné. S_0 est l'image d'un couple (x_0, y_0). Traçons par O la droite (D') parallèle à la direction du graphe. Comme nous supposons que le graphe donné appartient à $\mathcal{G}$, (D') coupe en A la droite (Δ) dont tous les points ont pour abscisse 1. Soit a l'ordonnée de A; a est le coefficient directeur de la droite (*Fig. 239*).

On pourrait d'ailleurs considérer que se donner la direction du graphe revient à se donner a. La fonction cherchée est de la forme : $y = ax + b$, où a est connu.

Le graphe contient (x_0, y_0), donc : $y_0 = ax_0 + b$

d'où : $b = y_0 - ax_0$.

La fonction cherchée est donc : $y = ax + (y_0 - ax_0)$.

321. Déterminer la fonction dont le graphe passe par deux points donnés distincts. — Soit S_1 (x_1, y_1) et S_2 (x_2, y_2) les deux points. Comme il s'agit d'un graphe $x_1 \neq x_2$.

La fonction cherchée est de la forme : $y = ax + b$.

Son graphe contient les points donnés; a et b vérifient donc le système :

$$\exists\,(a, b)? \quad \begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

qui admet toujours la solution unique :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

EXEMPLE. $S_1(2, 5)$ et $S_2(6, -1)$ conduit à : $y = -\frac{3}{2}x + 8$ par un calcul que l'on fera *directement*, car les formules générales n'ont pas à être sues par cœur.

322. Équation d'une droite. — Si une droite (D) est le graphe de la fonction $y = ax + b$, les coordonnées de ses points vérifient l'équation :

$$\exists\,(x, y)? \qquad ax - y + b = 0. \tag{1}$$

Si (D) est parallèle à la direction de $y'Oy$, les coordonnées de ses points vérifient une équation de la forme :

$$\exists\,(x, y)? \quad x - \alpha = 0. \tag{2}$$

Ces deux équations entrent dans la catégorie générale :

$$\exists\,(x, y)? \quad Ax + By + C = 0 \tag{3}$$

avec A et B non nuls tous les deux, la restriction pouvant s'écrire sous la forme $(A; B) \neq (0; 0)$.

Il convient d'examiner si, *inversement*, les points dont les coordonnées (x, y) vérifiant (3) sont les points d'une droite.

Partons donc d'une équation :

$\exists\,(x, y)?\ Ax + By + C = 0$ (3) avec A et B non nuls tous les deux.

L'étude d'une telle équation a été faite de façon détaillée au n° 158.

Si $B \neq 0$, l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples :

$$\left(\lambda, \ -\frac{A\lambda + C}{B}\right), \qquad \lambda \text{ arbitraire dans } R.$$

L'image de cet ensemble est donc le graphe de la fonction :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Si $B = 0$, alors $A \neq 0$, et l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples :

$$\left(-\frac{C}{A}, \mu\right), \quad \mu \text{ arbitraire dans } R.$$

L'image est donc la droite dont tous les points ont l'abscisse $-\frac{C}{A}$, droite que nous appellerons *la droite d'abscisse* $-\frac{C}{A}$. Dans tous les cas, nous dirons que (3) est l'*équation d'une droite*. Nous énoncerons.

▪ THÉORÈME. — **Toute équation $\exists\, x?\ \exists\, y?\ Ax + By + C = 0$ à coefficients A et B non tous deux nuls, admet pour ensemble représentatif une droite. Toute droite admet des équations de la forme $\exists\, x?\ \exists\, y?\ Ax + By + C = 0$, à coefficients A et B non tous deux nuls.**

Remarque sur les équations d'une droite. — Si l'équation :
$x \in R \quad y \in R \quad \exists\, x? \quad \exists\, y? \quad Ax + By + C = 0 \quad (A, B) \neq (0, 0) \quad (1)$
est une équation d'une droite (D), on obtient une autre équation de la même

droite en multipliant le polynome figurant au premier membre par un nombre, constant, non nul.

EXEMPLE. $\exists x? \ \exists y? \quad \frac{x}{3} - y + 1 = 0$

$\exists x? \ \exists y? \quad x - 3y + 3 = 0$

ont le même ensemble représentatif, le graphe de la fonction $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Plus généralement, on obtiendrait une autre équation de la même droite en multipliant le premier membre de l'équation par une expression algébrique toujours définie et jamais nulle; par exemple :

$$\exists x? \quad \exists y? \qquad (x^2 + y^2 + 1)\left(\frac{x}{3} - y + 1\right) = 0$$

admet comme ensemble représentatif le graphe de $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Pour des raisons de simplicité et pour d'autres raisons que nous ne pouvons pas donner dans le cadre des mathématiques élémentaires, on réserve l'expression « équation d'une droite » au cas où le premier membre est un polynome du premier degré en x et y.

323. Équation de la droite passant par deux points donnés. — Soit (D) la droite définie par $S_1(x_1, y_1)$ et $S_2(x_2, y_2)$, distincts. L'équation dont le premier membre est le polynome $Ax + By + C$, A et B non tous deux nuls, a pour ensemble représentatif une droite (D'). Pour que (D') coïncide avec (D) il faut et il suffit que (D') contienne S_1 et S_2, autrement dit, que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) soient deux solutions de l'équation (1). Nous obtenons donc, relativement aux coefficients A, B et C, le problème :

$$\begin{matrix} A \in R \quad B \in R \quad C \in R \\ (A, B) \neq (0, 0) \end{matrix} \quad \exists (A, B, C)? \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \end{cases} \quad (S)$$

c'est-à-dire un système homogène de deux équations à trois inconnues.

Si $x_1 \neq x_2$, on peut donner à B une valeur arbitraire mais non nulle et résoudre le système par rapport à A et C, son déterminant étant :

$$(x_1 . 1 - 1 . x_2) = x_1 - x_2 \neq 0.$$

On obtient pour solution unique :

$$A = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} B, \qquad C = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_2 - x_1} B.$$

Le premier membre de l'équation de la droite est donc défini à un facteur près. On peut l'écrire, en posant $B = K(x_2 - x_1)$, $K \neq 0$

$$K[(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1 y_2 - y_1 x_2] \qquad \text{(E)}$$

Si $x_1 = x_2$, alors $y_1 - y_2 \neq 0$ et l'on intervertit les rôles de A et de B. On aboutit à la forme (E), avec la particularité $(x_2 - x_1) = 0$.

La forme (E) est donc générale. Il est tout à fait inutile de la retenir. On fera le calcul directement dans chaque cas particulier, en s'inspirant du paragraphe n° 168 (Équations homogènes).

EXEMPLE. — Équation de la droite M_1M_2 pour :

$$M_1(x_1 = 7,\ y_1 = -11) \quad M_2(x_2 = 13,\ y_2 = 5)$$

$$\begin{cases} 7\,A - 11\,B + C = 0 \\ 13\,A + 5\,B + C = 0 \end{cases} \qquad \text{Tableau} \begin{bmatrix} 7 & -11 & 1 \\ 13 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où $\quad A = \rho\begin{vmatrix} -11 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad B = \rho\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 13 \end{vmatrix}; \quad C = \rho\begin{vmatrix} 7 & -11 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}$

On peut prendre : $\quad -16\,x + 6\,y + 178 = 0$

ou mieux : $\quad -\ 8\,x + 3\,y + 89 = 0.$

324. Intersection de deux droites. Parallélisme. — Pour abréger le langage et l'écriture nous emploierons, au lieu de l'expression « la droite (D), ensemble représentatif de l'équation $x \in R\ y \in R\ Ax + By + C = 0$ » la tournure plus simple : « la droite (D), d'équation $Ax + By + C = 0$ ».

Le problème de l'intersection de la droite (D) d'équation $Ax + By + C = 0$, avec la droite (D') d'équation $A'x + B'y + C' = 0$, est identique à :

$$x \in R \quad y \in R \quad \exists x ? \exists y ? \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0. \end{cases} \qquad (S)$$

Nous retrouvons un système de deux équations à deux inconnues (nº 160).

Le déterminant du système est $AB' - BA'$ avec la restriction $(A, B) \neq (0,0)$ et $(A', B') \neq (0,0)$. En particulier si $AB' - BA' = 0$ et $A \neq 0$, on ne peut pas avoir $A' = 0$ car $AB' = 0$ entraînerait $B' = 0$, cas écarté.

<table>
<tr><td colspan="2">$AB' - BA' \neq 0$</td><td>⟺</td><td>Solution unique.</td><td>(D) et (D') se coupent en un point</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$AB' - BA' = 0$</td><td>$CA' - AC'$, $CB' - BC'$ non nuls tous les deux</td><td>⟹</td><td>Pas de solution.</td><td>(D) // (D')</td></tr>
<tr><td>$A' = \lambda A$
$B' = \lambda B$
$C' = \lambda C$
(coefficients proportionnels)</td><td>⟹</td><td>Indétermination du premier ordre</td><td>(D) et (D') sont confondues.</td></tr>
</table>

Exemple. — *Résoudre, discuter et interpréter graphiquement, le système :*

$$x \in R \quad y \in R \quad \exists (x, y)? \quad \begin{cases} (1 + 2m)x + y = 1 & (1) \\ x + (1 - m)y = 1 & (2) \end{cases}$$

Le déterminant est :

$$\begin{vmatrix} 1 + 2m & 1 \\ 1 & 1 - m \end{vmatrix} = (1 + 2m)(1 - m) - 1 = m(1 - 2m)$$

Pour $m \neq 0$ et $m \neq \frac{1}{2}$ solution unique : $x = \frac{1}{2m - 1}$, $y = \frac{-2}{2m - 1}$.

$\Longrightarrow$ Droites sécantes.

Pour $m = \frac{1}{2}$: $\exists (x, y)?$ $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ impossible.

$\Longrightarrow$ Droites parallèles: $\begin{array}{ll} y = -2x + 1 & (D_1) \\ y = -2x + 2 & (D_2). \end{array}$

Pour $m = 0$: $\exists (x, y)?$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ indétermination du 1er ordre.

$\Longrightarrow$ Droites confondues : $y = -x + 1$ (D_1) ou (D_2).

Remarque. — L'équation de la première droite s'écrit :

$$(x + y - 1) + 2mx = 0 \qquad (1)$$

Quel que soit m, elle passe par le point qui vérifie : $x_0 + y_0 - 1 = 0$, $x_0 = 0$; c'est-à-dire le point A (0, 1).
La seconde droite, d'équation :

$$(x + y - 1) - my = 0 \qquad (2)$$

passe par le point fixe B(1, 0).

Pour $m = 0$ toutes deux se confondent avec AB. Pour $m = \frac{1}{2}$ elles sont parallèles. On montrera que pour $m \neq 0$ et $m \neq \frac{1}{2}$, leur point d'intersection décrit la droite (Δ) d'équation, $y = -2x$, privée d'un point.

Exercices. *Préparer deux repères : l'un orthonormé avec* OE = OF = 1 *cm; l'autre avec* OE = 2 *cm*, OF = 1 *cm et* $\widehat{EOF} = 66^\circ$. *Marquer sur chacun, les points* $S_1(x_1, y_1)$ *et* $S_2(x_2, y_2)$, *former l'équation de la droite* (S_1S_2), *chercher ses points d'intersection avec les axes. Vérifier sur le graphe.*

1446. $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 5$, $y_2 = 7$.

1447. $x_1 = -2$, $y_1 = 2$; $x_2 = 0$, $y_2 = 3$.

1448. $x_1 = 3$, $y_1 = -3$; $x_2 = 1$, $y_2 = -1$.

1449. $x_1 = -2$, $y_1 = 5$; $x_2 = -3$, $y_2 = -1$.

1450. $x_1 = 1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 3$, $y_2 = -4$.

1451. — Vérifier que les droites d'équation :

$$6x - 9y + 9 = 0.$$
$$3x + 2y - 2 = 0.$$

sont concourantes sur Oy. En quels points coupent-elles $x'Ox$?
On suppose le repère orthonormé; étudier le triangle formé par les trois points précédents.

1452. — Quel est l'ensemble représentatif correspondant à l'équation :

$$\exists (x, y)? \quad x^2 - 4y^2 = 0?$$

1453. — On donne les points A $(a, 0)$ et B $(0, b)$; $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
1° Montrer que l'on peut écrire l'équation de la droite AB sous la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

2° On prend $b = 3a$, comment se déplace la droite AB lorsque a varie? Quel est l'ensemble des milieux de AB? Solution géométrique et solution par le calcul.

1454. — Un triangle a pour sommets :

$$A(5, 4); \quad B(-1, 3); \quad C(0, -4).$$

1° Trouver les équations des droites qui portent les côtés de ce triangle.
2° Quelles sont les coordonnées des milieux des côtés?
3° Quelles sont les équations des médianes du triangle?
4° Coordonnées du centre de gravité.

1455. — Déterminer a pour que les trois droites :

$$x + 2y + 1 = 0$$
$$2x + 3y - 4 = 0$$
$$ax + y - 5 = 0$$

soient concourantes.

1456. — Reconnaître, suivant les valeurs de m et de p, si les droites d'équations :

$$x + my + 2 = 0$$
$$4x + y + p = 0$$

sont parallèles, confondues, ou sécantes.

1457. — 1° Déterminer les sommets du triangle ABC sachant que les équations de ses côtés sont

$$\text{AB :} \quad y = x + 3$$
$$\text{AC :} \quad y = -x + 5$$
$$\text{BC :} \quad y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}.$$

Résoudre cette question par le calcul et à l'aide de graphes sur un repère *orthonormé* (unité : 1 cm).
2° Trouver les équations des côtés du triangle A'B'C' obtenu en menant par A, B et C, les parallèles aux côtés opposés.
3° Quelle est la nature des triangles ABC et A'B'C'? Pourquoi?
4° Déterminer la longueur des côtés AB, BC et CA et vérifier la relation numérique que l'on peut déduire de la réponse à la troisième question.

1458. — On considère l'équation :

$$x - y + 1 + m(x + y) = 0 \qquad (1)$$

dans laquelle m est un paramètre variable.
1° Pour quelle valeur de m la droite correspondante passe-t-elle par le point A $(x = 2, \ y = 5)$?
2° Pour quelle valeur de m la droite correspondante est-elle parallèle à la droite :

$$y = 3x + 1?$$

3° Démontrer que toutes les droites obtenues en donnant à m des valeurs quelconques passent par un point fixe, qu'on déterminera.

Résoudre, discuter et interpréter graphiquement les systèmes :

$$x \in \mathrm{R} \quad y \in \mathrm{R} \quad \exists\, (x, y)?$$

1459.
$$(1 + m)x + (2 - m)y - 1 + 2m = 0;$$
$$(1 + m)x + (5m + 2)y + 6m - 1 = 0.$$

1460.
$$(3 - y) + m(x + 2y) = 0;$$
$$-2x + 2y + 5 + m(3x - y - 2) = 0.$$

IV. APPLICATION AUX ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

325. Signe du polynome $Ax + By + C$. — Le polynome du premier degré $P(x, y) = Ax + By + C$ avec $(A, B) \neq (0, 0)$ a figuré dans nos recherches au titre de premier membre de l'équation d'une droite.

Nous nous proposons, d'une façon plus générale, d'étudier pour tout couple (x, y) le signe que prend la valeur numérique du polynome $P(x, y)$. On peut raisonnablement penser que l'emploi d'un repère cartésien facilitera cette étude. On connaît l'ensemble représentatif de la relation $P(x, y) = 0$: c'est une droite. On peut chercher l'ensemble représentatif de la relation $P(x, y) > 0$ et celui de la relation $P(x, y) < 0$. On s'attend à trouver 3 ensembles deux à deux disjoints.

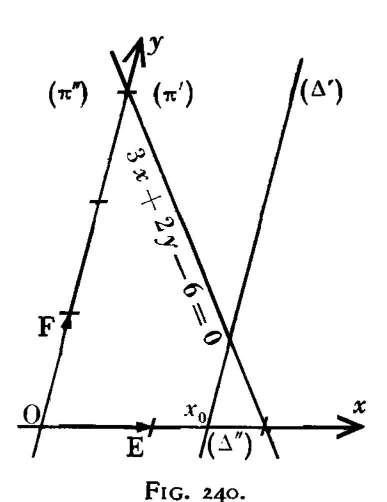


FIG. 240.

Étudions un exemple numérique :

$$P = 3x + 2y - 6.$$

La droite d'équation $P = 0$ coupe $x'Ox$ au point $x = 2$, $y = 0$; et l'axe $y'Oy$ au point $x = 0$, $y = 3$ (*Fig. 240*); on la trace.

La droite d'équation $P = 0$ partage le plan en deux demi-plans que nous supposons privés de leur frontière commune; soit (π') celui qui contient la partie $y > 3$ sur l'axe Oy, soit (π'') l'autre.

Toute droite (Δ) d'abscisse $x = x_0$ coupe la frontière au point $y_0 = 3 - \frac{3}{2} x_0$ et se trouve partagée en une demi-droite (Δ') et une demi-droite (Δ''). Sur (Δ') on a $y > y_0$, ou $y = y_0 + h$ avec $h > 0$. Or :

$P(x_0, y_0) = 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0$; donc :

$P(x_0, y) = 3x_0 + 2(y_0 + h) - 6 = (3x_0 + 2y_0 - 6) + 2h = 2h > 0$

On voit que les points de (π') rendent P positif.

On voit de même que les points de (π''), pour lesquels $y = y_0 - h$, $h > 0$, rendent P négatif.

Comme P ne peut être que nul, négatif ou positif, on est dispensé d'étudier les réciproques.

Conclusion : La droite d'équation $P = 0$ partage le plan en deux demi-plans. Sur l'un, les couples (x, y) rendent P positif, sur l'autre, ils rendent P négatif. Il suffit d'un essai pour déterminer le signe de P.

REMARQUE IMPORTANTE. — On pourrait être tenté de croire que le demi-plan « supérieur » rend tous les polynomes positifs; on se convaincra de la fausseté d'une telle proposition en étudiant le signe du polynome

$$Q = -3x - 2y + 6.$$

La frontière reste celle de l'exemple précédent, mais (π') et (π'') échangent leurs signes.

Le raisonnement conduit sur l'exemple numérique, a une portée générale : il s'applique à tous les cas où la droite d'équation $P = 0$ n'est pas parallèle à l'un des axes. Ces cas particuliers s'étudient aisément.

L'inéquation

$$\exists\,(x,\ y)?\qquad y > 2$$

est vérifiée par tous les points situés dans le demi-plan supérieur que délimite la droite $y = 2$; et par ces points seulement.

L'ensemble représentatif de l'inéquation :

$$\exists\,(x_2 y)?\quad x < -3$$

est le demi-plan que délimite la droite $x = -3$ et qui contient par exemple le point $(x = -4,\ y = 0)$.

326. Inéquations du premier degré à deux inconnues. — Sachant étudier le signe du polynome du premier degré à deux inconnues, on sait résoudre graphiquement les inéquations du premier degré à deux inconnues.

EXEMPLE 1. — *Résoudre graphiquement le système d'inéquations :*

$$\exists\,(x, y)?\quad \begin{cases} x - 3 < 0 & (1) \\ x - 2y + 5 > 0 & (2) \\ 3x - y - 1 > 0 & (3) \end{cases}$$

en déterminant son ensemble représentatif.

On a tracé (*Fig. 241*) la droite (D_1) d'équation :

$$x - 3 = 0$$

et pour tenir compte de (1), on supprime la région située à droite de (D_1).

On a tracé la droite (D_2) d'équation :

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Elle partage le plan en deux demi-plans, celui qui contient l'origine donne au polynome le même signe que celui du nombre

$$0 - 2.0 + 5 = 5 ;$$

on le gardera donc pour tenir compte de (2).

On a enfin tracé (D_3) d'équation :

$$3x - y - 1 = 0$$

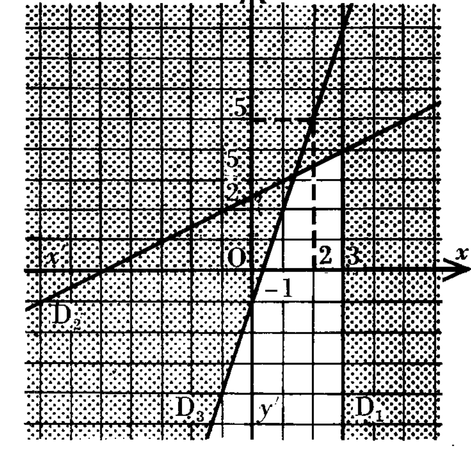


FIG. 241.

et gardé la région qui contient le point $(x = 1,\ y = 0)$, car elle vérifie (3).

L'ensemble représentatif de l'ensemble des solutions apparaît alors en blanc sur le graphique.

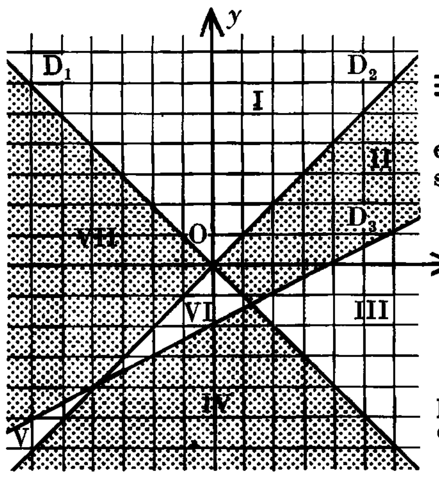


FIG. 242.

EXEMPLE 2. — ***Résoudre l'inéquation :***

$$\exists (x,y)?\ (x+y)(x-y)(x-2y-4) > 0$$

en déterminant son ensemble représentatif.

Chacune des droites (*Fig. 242*) :

$$x + y = 0 \qquad (D_1)$$
$$x - y = 0 \qquad (D_2)$$
$$x - 2y - 4 = 0 \qquad (D_3)$$

partage le plan en deux régions. On obtient ainsi 7 régions du plan.

Nous pouvons dresser le tableau des signes pris par chacun des facteurs, dans chacune des régions :

Régions	1	2	3	4	5	6	7
$x+y$	+	+	+	—	—	—	—
$x-y$	—	+	+	+	—	+	—
$x-2y-4$	—	—	+	+	+	—	—
Produit	+	—	+	—	+	+	—

L'inéquation est donc vérifiée par les coordonnées des points des régions 1, 3, 5 et 6, non grisées sur la figure.

Exercices. ***Résoudre les systèmes suivants en déterminant graphiquement leur ensemble représentatif :***

$$x \in R \quad y \in R \quad \exists (x, y)?$$

1461. $\begin{cases} x + y - 5 < 0 \\ 3x - y - 1 < 0. \end{cases}$ **1462.** $\begin{cases} (x+y)(x-2y) < 0 \\ x + y - 1 < 0. \end{cases}$

1463. $\begin{cases} x + y - 3 > 0 \\ 3x + y - 5 < 0 \\ 2x - y - 1 > 0. \end{cases}$ **1464.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 9 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ y - 3x + 1 = 0. \end{cases}$

1465. — **On donne trois polynomes du premier degré :**

$$P = Ax + By + C$$
$$P' = A'x + B'y + C'$$
$$P'' = A''x + B'' + C''.$$

1° Combien peut-on poser de systèmes d'inéquations simultanées ayant pour premiers membres P, P', P''?

2° Combien de régions différentes obtient-on, au maximum, dans un plan, avec trois droites?

3° En déduire que l'un des systèmes est impossible.

Application :

$$P = 3x - y + 5$$
$$P' = x + y - 1$$
$$P'' = 2x + 3y - 6.$$

1466 — *Déterminer, parmi les solutions du système suivant, celle dont la coordonnée y est la plus grande.*

$$x \in \mathbf{R}, \quad y \in \mathbf{R} \quad \exists (x, y)?$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 15x + 14y - 13 \leqslant 0 \\ 29x + 28y - 26 \leqslant 0 \\ 31x + 29y - 27 \leqslant 0. \end{cases}$$

1467. — Illustrer graphiquement $|x| + |y| < 1$.

1468. — L'inégalité $|x| + |y| > 0$ est-elle toujours satisfaite? **Exercices.**

PROBLÈMES

1469. — Quelle est la pente de la bissectrice de l'angle xOy? Que peut-on dire de la pente d'une droite qui forme avec Ox un angle compris entre 0 et 45°? un angle compris entre 45° et 90°?

1470. — Quelle est la pente de la bissectrice de l'angle yOx'? Que peut-on dire de la pente d'une droite qui forme avec Ox un angle compris entre 0° et — 45°? un angle compris entre — 45° et — 90°?

1471. — Construire la droite (D) ayant pour équation :

$$2x - 3y + 6 = 0.$$

Quelle est sa pente? Quelle est l'ordonnée à l'origine? Construire ensuite la droite symétrique de la précédente par rapport à Ox, et trouver son équation.

Construire la droite symétrique de (D) par rapport à Oy, et trouver son équation.

Construire la droite symétrique de (D) par rapport à O, et trouver son équation.

1472. — Construire la droite de coefficient directeur 3, d'ordonnée à l'origine + 1. Quelle est son équation?

1473. — Mêmes questions si :

b) coefficient directeur : $\sqrt{3}$;
ordonnée à l'origine + 1;

a) coefficient directeur : $-\sqrt{3}$;
ordonnée à l'origine — 1.

Comment sont placées ces deux droites?

1474. — Construire la droite qui a pour équation :

$$\sqrt{2}\,x + 2y - 1 = 0,$$

puis la droite parallèle à celle-ci, et dont l'ordonnée à l'origine est — 1. Trouver son équation.

1475. — La droite (D) fait un angle aigu positif de 60° avec Ox. Elle coupe Oy au point H (0, — 2). Quelle est son équation? En quel point coupe-t-elle $x'Ox$?

1476. — Les coordonnées d'un point M sont :

$$x = 3t - 5; \qquad y = 2t + 1.$$

Trouver, entre x et y, une relation indépendante de t. En déduire l'ensemble des points M :
1° quand t prend toutes les valeurs possibles;
2° quand t varie de — 1 à + 5.

1477. — On donne l'équation :

$$(m - 3)x + (2m - 1)y + m + 1 = 0.$$

Pour quelles valeurs de m cette équation est-elle :

1° celle d'une droite passant par l'origine?
2° celle d'une droite parallèle à Ox; à Oy?
3° celle d'une droite parallèle à la bissectrice de xOy?
4° celle d'une droite de pente $-\frac{1}{4}$?
5° celle d'une droite de pente $-\frac{1}{2}$?

1478. — On donne deux axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$, un point A sur Oy ayant pour ordonnée a; un point B sur Ox, tel que l'angle OAB soit égal à 60°. On construit sur AB comme côté le triangle équilatéral ABC, C et O étant de part et d'autre de AB.

1° Trouver les coordonnées de C en fonction de a.

2° Établir, en fonction de a, l'équation de AC. Démontrer que, si a varie, AC garde une direction fixe.

3° Lieu de C (établir entre ses coordonnées une relation indépendante de a).

1479. — Deux villes A et B sont distantes de 30 kilomètres. Une navette part de A à 12 heures à une vitesse de 40 kilomètres à l'heure. Arrivée en B, elle s'arrête 15 minutes et repart pour A à la même vitesse, s'arrête en A 15 minutes, repart vers B et ainsi de suite.

Une automobile part de A à 12 h 50 mn à une vitesse de 84 kilomètres à l'heure, allant vers B. Quand croisera-t-elle la navette? (Solution graphique.)

1480. — On donne les trois droites :

(1) $y = x + m$; (2) $y = -\frac{2x}{3} - 1$;

(3) $y = -4x + 9$,

m étant une valeur positive.

1° Construire ces droites si $m = 2$.

2° m étant quelconque, les trois droites forment un triangle variable BMN. B intersection de (2) et (3), M de (3) et (1), N de (1) et (2).

Trouver en fonction de m les coordonnées de M et N, et du milieu P de MN. Donner les particularités géométriques des triangles obtenus en faisant varier m. Ensemble des points P quand m varie.

1481. — Ox et Oy sont deux axes rectangulaires. On prend sur Ox le point A d'abscisse a, sur Oy le point B d'ordonnée $2a$.

1° Former l'équation de la droite AB.

2° Calculer les coordonnées des points M et M′ de la droite AB tels que :

$3\,\overline{MA} + \overline{MB} = 0$; $\quad 3\,\overline{M'A} - \overline{M'B} = 0$.

3° Former les équations des droites OM et OM′. Que peut-on dire de la disposition de ces droites par rapport aux axes? Si a varie, quels sont les ensembles décrits par M et M′?

1482. — La température t en degrés centigrades est donnée par une échelle où la glace fondante correspond à 0 et l'eau en ébullition (conditions normales) à 100.

La température Réaumur t' est donnée par une échelle où les mêmes repères correspondent à 0 et 80. La température Fahrenheit enfin, t'', est donnée par une échelle où ces repères correspondent à 32 et 212, respectivement.

1° Calculer les coefficients des fonctions linéaires

$$t' = a't + b'$$
$$t'' = a''t + b''.$$

2° Calculer les coefficients de la fonction

$$t'' = \alpha t' + \beta$$

par un calcul direct.

3° Vérifier qu'en utilisant

$$t'' = \alpha t' + \beta \quad \text{et} \quad t' = a't + b'$$

on retrouve bien $t'' = a''t + b''$.

4° Reprendre des calculs analogues en utilisant la température absolue

$$T = 273 + t$$

comme température de référence

$$t = AT + B$$
$$t' = A'T + B'$$
$$t'' = A''T + B''.$$

1483. — y est une fonction linéaire de x,

$$y = 3x - 5,$$

mais x est une fonction linéaire du temps

$$x = 2t + 1.$$

Exprimer y en fonction du temps. Faire un graphe combiné, avec axe du temps, axe Ox, axe Oy.

1484. — x est une fonction linéaire du temps :

$$x = at + b,$$

y est une fonction linéaire de x :

$$y = \alpha x + \beta,$$

enfin z est une fonction linéaire de y :

$$z = Ay + B.$$

1° Calculer y comme fonction de t.

2° Calculer z comme fonction de x.

3° Calculer z comme fonction de t de deux manières différentes.

1485. — 1° Un ressort à boudin a une longueur de 13 cm. Tendu par des poids, il prend les longueurs suivantes :

Poids : 5 g 10 g 15 g 20 g 25 g 50 g 100 g 150 g.

Longueur : 14,2 cm 15,4 cm 16,6 cm 17,8 cm 19 cm 25 cm 37 cm 49 cm.

Tracer le graphique de la variation de longueur de ce ressort.

L'accroissement de longueur est-il proportionnel à l'accroissement de poids? Quelle longueur aurait le ressort tendu par un poids de 35 g? Quel est le poids qui fait prendre au ressort une longueur de 22 cm?

2° On fabrique avec ce ressort un dynamomètre (utilisable au lieu où le ressort a été étalonné).

Tracer le graphique qui donne la force à évaluer en fonction de l'allongement mesuré.

1486. — Le mouvement d'un point sur un axe est donné par la formule :

$$x = -2 + 3t$$

(x en cm et t en s).

1° Graphe en axes orthonormés (unité : 1 cm).

2° A quelle date le mobile passe-t-il aux points

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9?$$

3° La date du passage est une fonction de l'abscisse. Déterminer cette fonction et la représenter sur le même repère.

1487. — Déterminer, parmi les solutions du système :

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbf{R} \\ y \in \mathbf{R} \end{array}\right\} \exists (x, y)? \left\{\begin{array}{l} 2x + y - 1 \leqslant 0 \\ x + 2y - 1 \leqslant 0 \\ x + y - 1 \leqslant 0 \end{array}\right.$$

celle qui donne à l'expression $3x + 5y$ la plus petite valeur possible.

CHAPITRE XXII

FONCTION $y = ax^2 + c$

I. FONCTION $y = x^2$

327. Fonction définie par l'opération « élévation au carré ». — Quel que soit le nombre x, il est possible de calculer le nombre $y = x.x = x^2$. La fonction f qui fait correspondre à tout nombre son carré :

$$\forall x \quad f(x) = x^2$$

ou, en d'autres termes, la fonction **définie par la formule** :

$$y = x^2$$

est donc définie sur R. Cette fonction prend la même valeur quand on donne à x deux valeurs opposées : c'est une *fonction paire.*

328. Sens de variation. — Des propriétés de la relation $<$, il résulte les implications :

$$0 < x_0 < x_1 \implies 0 < x_0^2 < x_1^2$$
$$x_0 < x_1 < 0 \implies 0 < x_1^2 < x_0^2$$

qui démontrent que la fonction $y = x^2$ est croissante pour $x > 0$, décroissante pour $x < 0$.

On peut d'ailleurs présenter ce résultat sous une forme qui utilise les définitions générales de la croissance et de la décroissance; rappelons-les :

$$x_1 \neq x_0, \quad a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b$$

et $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0 \iff f(x)$ croissante pour $a < x < b$.

$$x_1 \neq x_0, \quad a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b$$

et $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0 \iff f(x)$ décroissante pour $a < x < b$.

On a ici, pour $x_1 \neq x_0$: $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$

donc : $x_0 < 0 \quad \text{et} \quad x_1 < 0 \implies \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0;$

$$x_0 < 0 \quad \text{et} \quad x_1 < 0 \implies \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0.$$

▪ THÉORÈME. — **La fonction $y = x^2$ est décroissante sur l'ensemble $(-\infty, 0)$, croissante sur $(0, +\infty)$.**

La valeur remarquable $x = 0$ correspond pour la fonction à la plus petite de toutes les valeurs qu'elle prend; c'est son ***minimum absolu.***

329. Étude pour $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. — Il est facile de démontrer que, pour x positif, x^2 est inférieur ou supérieur à x selon que x est inférieur ou supérieur à 1. En effet l'expression : $x^2 - x = x(x - 1)$ est positive pour $x > 1$.

Il en résulte que x^2 tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, car :

$$B > 1 \quad \forall B \quad x > B \implies x^2 > B.$$

EXEMPLE. — Si l'on veut réaliser $x^2 > 10^7$ il suffit de prendre $x > 10^7$.

REMARQUE. — La définition précise de la proposition :

$$f(x) \to +\infty \quad \text{quand} \quad x \to +\infty,$$

ne fait appel qu'à une condition SUFFISANTE :

$$B > 1, \quad \forall B, \quad \exists A \quad \text{et} \quad x > A \implies f(x) > B.$$

Nous nous sommes conformés à cette définition en montrant l'existence d'une condition suffisante pour que x^2 dépasse B.

La question de savoir si la condition donnée est « économique » n'entre pas dans le sujet traité, mais elle est intéressante, et on peut la poser en marge.

On dira : pour que x^2 dépasse 10^7, avec x positif, il *faut et il suffit* que x dépasse

$$\sqrt{10^7} = \sqrt{10^6 . 10} = 10^3\sqrt{10}.$$

Pratiquement on formera une condition *suffisante* en prenant une valeur approchée par *excès* de $\sqrt{10}$. On ne peut pas donner sous forme décimale la condition la plus « économique ».

$$x > 4.10^3 \quad \text{ou} \quad x > 3{,}2.10^3 \quad \text{ou} \quad x > 3{,}17.10^3 \; \ldots.$$

sont des conditions suffisantes... et de plus en plus « économiques ».

La fonction $y = x^2$ étant paire, on voit qu'elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$:

$$B > 1 \quad \forall B \quad x < -B \implies x^2 > B.$$

▪ THÉORÈME. — **La fonction $y = x^2$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$.**

I bis. GRAPHE DE LA FONCTION $y = x^2$

330. Limitation. Symétrie. — La fonction $y = x^2$ étant définie sur R, on n'en pourra tracer que des graphes partiels pour lesquels x décrira un intervalle limité.

Pour un intervalle du type $-\alpha < x < \alpha$, les points représentatifs se répartissent par couples ayant, avec la même ordonnée, des abscisses opposées.

Afin de tirer parti de cette propriété (commune aux graphes de toutes les fonctions paires) nous utiliserons des axes rectangulaires, *pas nécessairement normés* : le graphe admettra $y'Oy$ comme axe de symétrie.

Après avoir fait choix pour x d'un intervalle nécessairement limité, on rencontre une limitation d'une autre sorte : le nombre des points dont on aura calculé l'ordonnée, si grand soit-il, restera fini.

Le travail de report terminé, on se trouvera devant un pointillé analogue à celui de la *figure 243*.

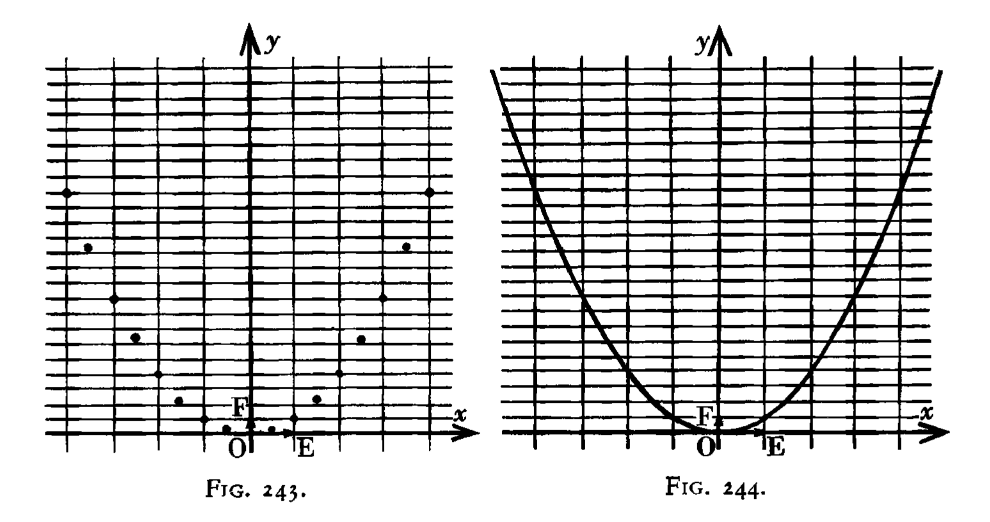


FIG. 243. FIG. 244.

Il conviendra donc de joindre ces points par une ligne continue en tenant compte de tout renseignement obtenu par voie théorique. Par exemple, du fait que la fonction est croissante pour $x > 0$, résulte que le trait correspondant doit monter de la gauche vers la droite.

Nous démontrerons plus tard que la courbe admet en chaque point une tangente. Enfin on consultera l'exercice n° **1502** pour démontrer que la courbe partage le plan en deux régions dont l'une est convexe.

331. Tracé définitif. — La *figure 244* représente le tracé obtenu en joignant les points marqués sur la *figure 243* par une ligne continue et en se conformant aux exigences théoriques.

Pour compléter, traitons le problème de la tangente dans le cas particulier de l'origine.

Soit $M_0(x_0, y_0 = x_0^2)$ un point du graphe, autre que O. La sécante OM_0 a pour coefficient directeur $\frac{y_0}{x_0} = x_0$.

Faisons varier M_0 sur le graphe de telle sorte qu'il se rapproche de O jusqu'à se confondre avec lui, l'abscisse x_0 devient arbitrairement voisine de 0 et, à la limite, nulle. Le coefficient directeur de la sécante devient arbitrairement voisin de 0 et, à la limite, nul. L'axe Ox, position limite de la sécante, est donc la tangente en O au graphe.

On démontre que les graphes de la fonction $y = x^2$, quels que soient les vecteurs unitaires choisis, sont des arcs de ces courbes que l'on définit et étudie en géométrie sous le nom de *paraboles*.

Exercices. 1488. — Tracer le graphe de la fonction $y = x^2$ pour $-1 < x < +1$ en utilisant un repère orthonormé (papier millimétrique).

$$OE = OF = 8 \text{ cm}.$$

Donner à x des valeurs du type $\pm \frac{n}{8}$, n entier, $0 < n < 8$.

1489. — Tracer le graphe de la fonction $y = x^2$ pour $10 < x < 11$ en utilisant une feuille de papier millimétrique dont la partie quadrillée mesure 20 cm sur 25 cm.

On utilisera au mieux toute la feuille, les axes ne sont pas sur la feuille, mais les bords gauche et inférieur de la feuille seront cotés de 10 à 11 et de 100 à 121.

Comparer l'arc de graphe et la corde joignant les points extrêmes.

Se servir de ce graphe pour comparer la valeur vraie de $(10{,}8)^2$ à sa valeur interpolée entre les couples (10, 100) et (11, 121).

1490. — Résoudre graphiquement, en déterminant son ensemble représentatif, l'inéquation :

$$x \in R \quad y \in R \quad \exists\,(x, y)? \qquad (y - x^2)(y - x) < 0.$$

1491. — Même question pour :

$$\exists\,(x, y)? \qquad (y - x^2)(y + x) > 0.$$

1492. — Tracer sur la même feuille le graphe de $y_1 = x^2$ et le graphe de $y_2 = x^4$ en repère rectangulaire. Utiliser une feuille de papier millimétrique.

$$-2 \leqslant x \leqslant +2 \qquad OE = 5 \text{ cm} \qquad OF = 1{,}5 \text{ cm}.$$

1493. — Tracer sur une même feuille le graphe de la fonction $y_1 = x^2$ et celui de la fonction $y_2 = |x|$.

Retrouver sur les graphes les résultats relatifs à la grandeur comparée de $|x|$ et de x^2 et à la croissance des deux fonctions.

1494. — Calculer le coefficient directeur m de la sécante AM au graphe de la fonction $y = x^2$, pour A (1, 1) et M (x_0, x_0^2). Que devient m quand le point M se rapproche indéfiniment du point A jusqu'à se confondre avec lui? En déduire l'existence et la position de la tangente au graphe au point A.

Exercices.

II. FONCTION $y = ax^2$

332. Sens de variation de la fonction $y = ax^2$. — La fonction définie par la formule : $y = ax^2$ est définie sur R.

Pour deux valeurs distinctes x_0 et x_1, auxquelles correspondent les valeurs x_0 et y_1 de la fonction, on obtient :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1^2 - ax_0^2}{x_1 - x_0} = a\,(x_1 + x_0)$$

résultat qui conduit à distinguer plusieurs cas selon le signe de a. Les conclusions, faciles à dégager, sont données dans le tableau ci-après.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$a < 0$	fonction croissante	$y = 0$	fonction décroissante
$a > 0$	fonction décroissante	$y = 0$	fonction croissante
$a = 0$	fonction constante : $y = 0$		

Notons enfin que la fonction $f(x) = ax^2$ est *paire* : $f(-x_0) = f(+x_0) = ax_0^2$.

333. Étude pour $x \to +\infty$ et $x \to +\infty$. — Il faut donc, là encore, distinguer selon le signe de a.

Supposons d'abord $a > 0$ et vérifions le résultat dont nous avons l'intuition, à savoir que la fonction $y = ax^2$ tend vers plus l'infini quand x tend vers l'infini par valeurs positives ou par valeurs négatives.

Soit donc B un nombre positif donné, arbitrairement grand; est-il possible de déterminer un nombre positif A tel que les conditions :

$$x < -\text{A} \qquad \text{et} \qquad x > +\text{A}$$

soient suffisantes pour que l'on ait : $ax^2 > \text{B}$?

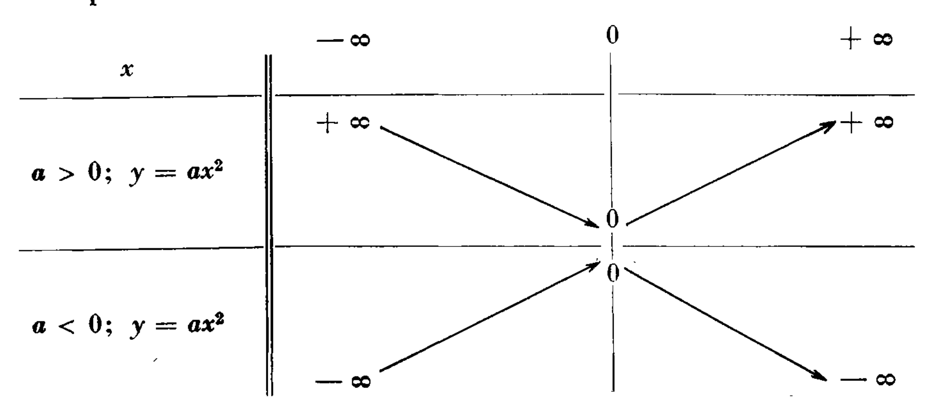
Nous savons que : $a > 0 \quad ax^2 > \text{B} \iff a > 0 \quad x^2 > \dfrac{\text{B}}{a}\cdot$

Or si nous désignons par A le plus grand des deux nombres 1 et $\dfrac{\text{B}}{a}$, il est clair que :

$$x > \text{A} \implies x^2 > \frac{\text{B}}{a}\cdot$$

Supposons maintenant $a < 0$. Posons $a = -b$, $b > 0$. De l'étude précédente il ressort que $bx^2 \to +\infty$ quand $x \to \mp\infty$, donc ax^2, nombre opposé à bx^2, tendra vers $-\infty$ pour $x \to \mp\infty$.

On peut résumer tous les résultats dans le tableau suivant :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$a > 0;\ y = ax^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$a < 0;\ y = ax^2$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

La flèche ↗ signifie : croît. Le flèche ↘ signifie : décroît.

Pour $a > 0$ la valeur 0 est un *minimum absolu*, pour $a < 0$ c'est un *maximum absolu*.

II bis. GRAPHE DE LA FONCTION $y = ax^2$

334. Exemples numériques. — Le cas où $a = 1$ a été traité.

Le cas où $a = 0$ est évident : le graphe coïncide avec $x'Ox$.

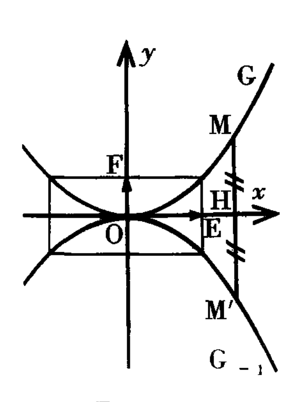


FIG. 245.

Le cas où $a = -1$ se traite facilement, en axes rectangulaires, à partir du cas $a = 1$, le graphe (G_{-1}) de $y = -x^2$ est le symétrique par rapport à $x'Ox$ du graphe (G) de $y = x^2$ (*Fig. 245*).

Traitons le cas de $a = 2$.

Le graphe (G_2) de la fonction $y_2 = 2\,x^2$ s'obtient à partir du graphe (G) de la fonction $y = x^2$ en doublant toutes les ordonnées.

On dit que l'on fait subir à (G) une *affinité* de rapport $+\,2$, d'axe $x'Ox$ et de direction $y'Oy$. Les points figuratifs appartiennent tous à la région supérieure que délimite (G) et l'on s'attend à les voir dessiner une courbe de « même nature »; nous préciserons plus loin cette impression.

Traitons maintenant le cas de $a = \frac{1}{2}$ et affectons de l'indice $\frac{1}{2}$ les êtres mathématiques obtenus dans ce cas.

Le graphe $\left(G_{\frac{1}{2}}\right)$ de $y_{\frac{1}{2}}$ se déduit de (G) par l'affinité de rapport $+\,\frac{1}{2}$, d'axe $x'Ox$ et de direction $y'Oy$ (*Fig. 246*). Il se situe dans la région inférieure que délimite (G) et l'on s'attend encore à trouver une courbe de même nature.

Envisageons maintenant des valeurs négatives de a. Nous avons construit le graphe (G_{-1}) de $y = -x^2$.

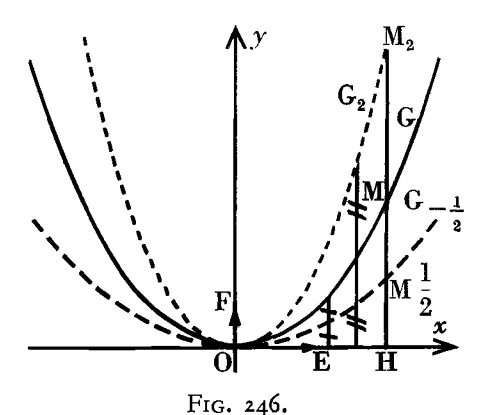


Fig. 246.

Pour $a = -2$, (G_{-2}) provient de (G_{-1}) par l'affinité de rapport 2, on pourrait d'ailleurs l'obtenir à partir de (G) par une affinité de rapport — 2.

On construirait de même $\left(G_{-\frac{1}{2}}\right)$ etc. L'ensemble des graphes est une famille de paraboles tangentes en O à l'axe $x'Ox$ et admettant $y'Oy$ comme axe de symétrie. Les paraboles, deux à deux symétriques pour deux valeurs opposées de a, se trouvent au-dessus ou au-dessous de $x'Ox$ selon que a est positif ou négatif et sont d'autant plus serrées sur $y'Oy$ que la valeur absolue de a est plus grande.

335. Changements de vecteurs unitaires. — La construction soignée d'un graphe demande du temps et de la minutie, aussi paraît-il souhaitable d'apprendre à utiliser un bon graphe à des fins diverses et dans des circonstances différentes.

Nous allons d'abord essayer de tirer parti d'un changement de vecteur unitaire sur l'axe $y'Oy$.

Construisons le graphe (G) de la fonction $y = x^2$ avec les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$; les axes portent des graduations (*Fig. 247*). Barrons les graduations portées sur Oy et *doublons* toutes les anciennes indications.

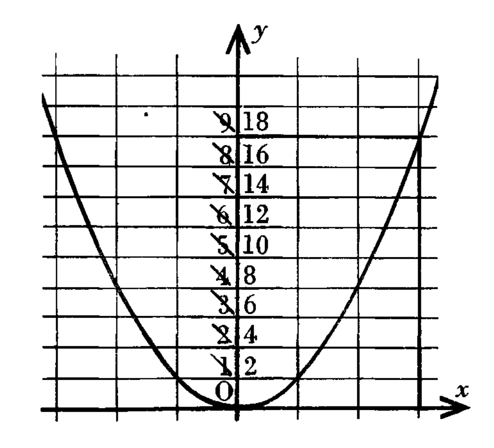


Fig. 247.

Avant l'opération, la droite $x = 3$ coupait le graphe en un point d'ordonnée $3^2 = 9$; 9 étant l'ancienne ordonnée y_A.

Après l'opération, la nouvelle ordonnée y_N se lit $18 = 2 \times 3^2$.

D'une façon générale, le graphe (G), lu avec la nouvelle échelle des y, traduit maintenant la relation : $y_N = 2\,y_A = 2\,x^2$.

Un changement d'échelle transforme le graphe de la fonction $y = x^2$ en graphe de la fonction $y = 2\,x^2$.

Naturellement, en même temps que nous avons barré l'ancienne graduation 1 pour la remplacer par 2, nous avons barré la lettre F. L'indication F′ de l'extrémité du *nouveau* vecteur unitaire doit se trouver en regard de la nouvelle graduation 1, c'est-à-dire au milieu de OF.

Doubler les valeurs de la graduation revient à prendre un vecteur unitaire *moitié du précédent.*

336. Cas général : changement simultané en x et y. — Traitons maintenant la question d'une façon générale, en supposant construit relativement au repère $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ le graphe de la fonction $y = ax^2$.

Repère $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ (ancien) Repère $\overrightarrow{OE'}$, $\overrightarrow{OF'}$ (nouveau)
le passage de l'ancien au nouveau
est assuré par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} k\,\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OE'}, & k \neq 0. \\ l\,\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OF'}, & l \neq 0. \end{cases}$$

On avait : $$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OE}} \\ y = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OF}} \end{cases}$$ On a : $$\begin{cases} x' = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OE'}} \\ y' = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OF'}} \end{cases} \quad (3)$$

De (1), (2) et (3) il résulte :

$$\frac{x'}{x} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OE'}} \times \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OE'}} = \frac{\overline{OE}}{k\,\overline{OE}} = \frac{1}{k}$$

donc : $$(4) \quad \begin{cases} x = kx' \\ y = ly' \end{cases}$$

alors : $$y = ax^2 \iff ly' = ak^2x'^2$$

$$y = ax^2 \iff y' = a\frac{k^2}{l}x'^2.$$

Si l'on veut que l'ancien graphe représente maintenant : $y' = bx'^2$ il faut et il suffit que les indicateurs de changements d'échelles, k et l, vérifient :

$$\frac{k^2}{l} = \frac{b}{a}.$$

Comme on obtient une seule relation pour déterminer deux coefficients, on peut se poser une condition supplémentaire inspirée par des conditions pratiques : mise en page, ordre de grandeur des couples (x', y') que l'on désire utiliser, etc.

Exemple. $OE = 2$ cm $OF = 3$ cm $y = \frac{5}{4}x^2$.

On veut que le graphe représente $y' = x'^2$ en repère orthonormé.

Condition générale : $\frac{b}{a} = \frac{k^2}{l}$ donne : $\frac{4}{5} = \frac{k^2}{l}$

Condition supplémentaire $OE' = OF'$; $|k|OE = |l|OF$

$$|k|2 = |l|3 = 3 \times \frac{5}{4}k^2 = 3 \times \frac{5}{4}|k| \times |k|$$

$k \neq 0$; donc $|k| = \frac{8}{15}$ et : $l = \frac{16}{45}$.

Exercices. 1495. — Tracer sur une feuille de papier millimétrique dont la partie quadrillée mesure 20 cm sur 25 cm les graphes des fonctions $y = ax^2$ pour :

$$a = \pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm \frac{1}{3}.$$

Choisir au mieux les vecteurs unitaires.

1496. — On a construit dans un repère orthonormé $OE = OF = 1$ cm le graphe de la fonction $y = x^2$.
Trouver $OE' = OF'$ pour que ce graphe représente :
1° la fonction $y = 100\,x^2$.
2° la fonction $y = \frac{x^2}{100}$.

1497. — On a construit le graphe de $y = x^2$ avec $OE = 2$ cm, $OF = \frac{1}{2}$ cm.
Trouver tous les choix possibles de OE' et de OF' pour lesquels le même graphe continue à représenter $y = x^2$.
L'un des choix correspond-il à un repère orthonormé? Pouvait-on résoudre graphiquement cette dernière question?

Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
$x \in R$ $y \in R$ $\exists (x, y)$?

1498. $(2y - x^2)(2y + x) > 0$

1499. $(9y^2 - x^4)(x^2 - y^2) < 0$.

1500. $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(y^2 - x^4) > 0$

1501. — On a tracé la courbe (C) représentant la fonction :

$$y = x^2$$

pour les valeurs positives de x.
On se propose d'étudier la courbe (C′) représentant la fonction :

$$y = \sqrt{x}.$$

Démontrer qu'à tout point M de coordonnées (α, α^2) de la courbe (C) correspond un point M′ de coordonnées (α^2, α) de la courbe C′, α étant positif. En déduire la position remarquable des points M et M′, et le tracé de la courbe (C′).
Que pourrait-on dire de la courbe (C″) représentant la fonction :

$$y = -\sqrt{x}?$$

1502. *Convexité du domaine défini par* $y > x^2$. — Un domaine ($\mathcal{D}$) du plan limité par une courbe (C) est dit convexe si, quels que soient les points M_0 et M_1 appartenant au domaine, celui-ci contient le segment M_0M_1.

1° Démontrer que la courbe représentative de la fonction $y = x^2$ partage le plan en deux régions. Nous préciserons que la région supérieure ($\mathcal{D}$) est caractérisée par $y \geqslant x^2$.

2° Examiner le cas où M_0 et M_1, appartenant à ($\mathcal{D}$), ont la même abscisse.

3° Étudier le cas où M_0 et M_1 sont deux points du graphe (G) de la courbe $y = x^2$. La droite M_0M_1 est le graphe d'une fonction linéaire $Y = ax + b$. Que représentent les abscisses x_0 et x_1 de M_0 et M_1 pour l'équation :

$$x^2 - ax - b = 0?$$

Étudier le signe du polynome $x^2 - ax - b$ et l'interpréter graphiquement.

4° Étudier le cas où M_0 et M_1 sont quelconques dans ($\mathcal{D}$). **Exercices.**

III. FONCTION $y = ax^2 + c$. GRAPHE

337. Fonction du type $y = ax^2 + c$. — Nous avons étudié la fonction $y = ax^2$ et son graphe. En ajoutant à cette fonction un nombre relatif constant c on obtient une nouvelle fonction définie par la formule :

$$y = ax^2 + c.$$

On voit immédiatement que la modification due à la constante c n'altère pas les propriétés fondamentales que nous avons reconnues à la fonction $y = ax^2$: domaine de définition, parité, sens de variation. Quant au graphe de la nouvelle fonction, il se déduira de l'ancien par une translation.

EXEMPLE 1. — *Soit à étudier la fonction* $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Cette fonction, définie sur R, varie dans le même sens que la fonction $z = \frac{1}{2}x^2$ dont elle ne diffère que par une constante. En effet :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\left(\frac{1}{2}x_1^2 - 2\right) - \left(\frac{1}{2}x_0^2 - 2\right)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{1}{2}(x_1 + x_0).$$

Nous savons que, quand x tend vers l'infini, $z = \frac{1}{2}x^2$ tend vers plus l'infini. Il en va de même pour $y = z - 2$, car si z dépasse pour $|x|$ assez grande tout nombre fixé à l'avance, $z - 2$ devient aussi arbitrairement grand.

D'une façon détaillée, soit B un nombre positif donné, fixe, arbitrairement grand. Cherchons s'il existe une condition suffisante, du type $|x| > A$, pour que $\frac{1}{2}x^2 - 2$ dépasse B. Or :

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 > B \iff x^2 > 2B + 4$$

$2B + 4 > 1$ et : $\quad x > 2B + 4 \implies x^2 > 2B + 4$

on a donc trouvé un nombre A tel que : $|x| > A \implies \frac{1}{2}x^2 - 2 > B$.

Les renseignements obtenus permettent de dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.	$+\infty$ ↘	-2	↗ $+\infty$

On peut remarquer que la fonction y prend la valeur 0 si l'on donne à x une valeur numérique égale à l'une ou l'autre des racines de l'équation :

$$\exists x? \quad \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0, \quad \text{c'est-à-dire } x = -2 \quad \text{ou} \quad x = +2.$$

La valeur $y = -2$ est le *minimum* de la fonction.

Graphe. Nous savons tracer le graphe (Γ) de la fonction $z = \frac{1}{2}x^2$; pour avoir le graphe (G) de la fonction $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ on peut faire correspondre à tout point, d'abscisse x_0 et d'ordonnée $z_0 = \frac{1}{2}x_0^2$, sur (Γ), le point $(x_0, y_0 = z_0 - 2)$ qui appartiendra à (G).

(G) se déduit de (Γ) par la translation qui a pour vecteur $-2\overrightarrow{OF}$ (*Fig. 248*), on peut donc présumer que (G) est une parabole.

Considérons les axes gradués $x_1'O_1x_1$, $y_1'O_1y_1$ qui se déduisent par translation des axes $x'Ox$, $y'Oy$, la nouvelle origine O_1 ayant par rapport aux anciens axes les coordonnées (α, β) :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2. \end{cases}$$

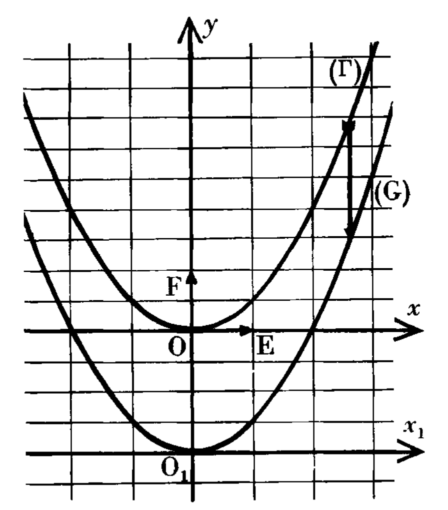


FIG. 248.

D'après le n° **306**, les coordonnées anciennes (x, y) et nouvelles (x_1, y_1) se correspondent selon les formules :

$$\begin{cases} x = 0 + x_1 \\ y = -2 + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + 2. \end{cases}$$

La relation $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ ou $y + 2 = \frac{1}{2}x^2$, entraîne pour les couples (x_1, y_1) la relation $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$; et réciproquement.

(G), ensemble représentatif de la relation $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ pour les axes $x'Ox$, $y'Oy$, est donc l'ensemble représentatif de la relation $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$ pour les axes $x_1'O_1x_1$, $y_1'O_1y_1$.

On construira donc (G) directement en construisant, dans les nouveaux axes, le graphe $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$.

REMARQUE. — Le signe de la fonction $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, par conséquent le signe du polynome incomplet $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, apparaît sur le graphe : c'est le signe de $\frac{1}{2}$, le signe +, à l'extérieur des racines -2 et $+2$; c'est le signe de $-\frac{1}{2}$, le signe —, à l'intérieur des racines, le long de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

EXEMPLE 2. — Soit à étudier la fonction $y = -3x^2 + 1$.

Cette fonction paire toujours définie varie comme la fonction $z = -3x^2$ et, comme elle, tend vers $-\infty$ pour $x \to \pm\infty$. Pour $x = 0$ elle passe par le maximum $+1$.

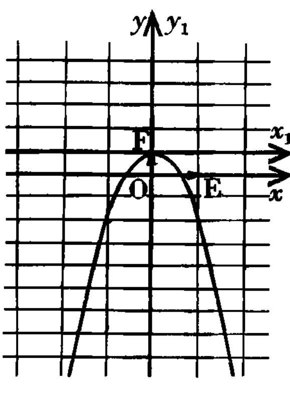


FIG. 249.

Le lecteur pourra faire le tableau de variation.

Soit F(0, + 1) la nouvelle origine. La translation $\overrightarrow{OF}$ définit de nouveaux axes. Relativement à ces axes le graphe de la fonction devient le graphe de $y_1 = -3x_1^2$ (*Fig. 249*).

On construit ce graphe. On vérifie en calculant directement les coordonnées de quelques points figuratifs; en particulier :

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \iff y = 0.$$

Exercices. Construire en repère orthonormé, OE = OF = 1 cm les graphes des fonctions suivantes :

1503. $y = -x^2 + 1 \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 \quad y = \frac{1}{3}x^2 + 1$

1504. $y = -x^2 + \frac{1}{2} \quad y = -x^2 + \frac{3}{2} \quad y = -x^2 + \frac{5}{2}$

1505. $y = x^2 + \frac{1}{2} \quad y = \frac{x^2}{2} + 1 \quad y = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}$

1506. $y = -\frac{x^2}{3} + 3 \quad y = \frac{x^2}{3} - 3$

1507. — On a construit dans un repère orthonormé le graphe de la fonction $y = 1 - \frac{x^2}{3}$. Est-il possible de déterminer de nouveaux vecteurs unitaires pour que ce graphe représente $z = 2 - x^2$?

1508. — Même question avec $y = \frac{x^2}{2} + 1, \quad z = x^2 + 3.$ **Exercices.**

PROBLÈMES

1509. — 1° Construire en repère orthonormé OE = OF = 1 cm le graphe de la fonction $y = x^2 - 1$.

2° En déduire, par un procédé géométrique simple, le graphe de la fonction $z = |x^2 - 1|$, puis la façon dont varie la fonction z.

3° Résoudre graphiquement l'équation :

$$\exists x? \quad |x^2 - 1| = \frac{16}{25}.$$

1510. — 1° Construire le graphe de la fonction :

$$y = |2x^2 - 5| - |x^2 - 1|$$

On choisira les axes. On pourra commencer par tracer les graphes de :

$$z = 2x^2 - 5 \quad \text{et} \quad u = x^2 - 1.$$

2° Résoudre l'équation

$$\exists x? \quad |2x^2 - 5| - |x^2 - 1| = \frac{15}{4}.$$

1511. — 1° Construire le graphe de la fonction :

$$y = \big||3x^2 - 1| - |x^2 - 1|\big|$$

2° Résoudre l'équation $\exists x? \quad y = \frac{2}{9}$.

CHAPITRE XXIII

FONCTION $y = ax^2 + bx + c$.

I. FONCTION $y = (x - k)^2$

338. La fonction $y = (x - k)^2$. — Une fonction se définit comme une correspondance : à une valeur numérique donnée à la variable on fait correspondre la valeur prise par la fonction.

Pour obtenir cette correspondance on se donne « une règle du jeu ».

Nous avons étudié la fonction particulière où la « règle du jeu » s'énonce : « *Prendre la valeur numérique donnée à la variable et l'élever au carré.* »

Cette fonction est la fonction f définie par la règle :

$$\forall x \quad f(x) = x^2 \text{ ou par la formule : } y = x^2.$$

Les fonctions $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$ découlent de la fonction $y = x^2$ par des modifications qui en respectent les propriétés essentielles, et l'analogie des graphes traduit cette permanence.

Nous allons maintenant étudier la fonction y définie par la règle :

$$\forall x \quad f(x) = (x - k)^2, \quad \text{ou par la formule :} \quad y = (x - k)^2.$$

Exemple 1. — *Soit à étudier la fonction* $y = (x - 1)^2$.

Formons le rapport dont le signe donne le sens de variation :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1 - 1)^2 - (x_0 - 1)^2}{x_1 - x_0} = \frac{[(x_1 - 1) - (x_0 - 1)]\,[(x_1 - 1) + (x_0 - 1)]}{x_1 - x_0}$$
$$= (x_1 - 1) + (x_0 - 1).$$

Il en résulte, les implications :

$$x_1 < 1 \text{ et } x_0 < 1 \implies y \text{ fonction décroissante.}$$
$$x_1 > 1 \text{ et } x_0 > 1 \implies y \text{ fonction croissante.}$$

Pour $x = 1$ la fonction passe par un *minimum*.

Étudions le comportement de y lorsque x tend vers l'infini.

L'étude de la fonction linéaire nous apprend que :

$$x \to +\infty \implies x - 1 \to +\infty$$

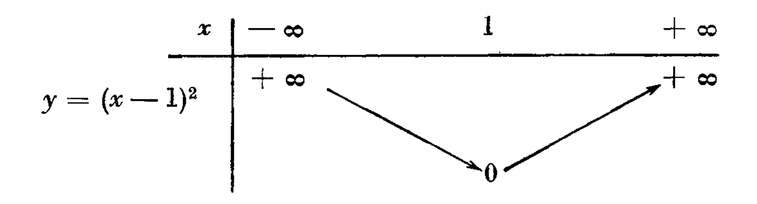
et : $$x \to -\infty \implies x - 1 \to -\infty$$

Nous savons aussi que : $X \to \mp\infty \implies X^2 \to +\infty$.

En posant $x - 1 = X$ nous pourrons enchaîner les implications précédentes et en tirer cette conclusion :

$$x \longrightarrow \mp\infty \implies (x-1)^2 \longrightarrow +\infty.$$

Nous dressons le tableau :



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$y = (x-1)^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Graphe. L'étude précédente laisse pressentir que le graphe de la fonction $y = (x-1)^2$ se déduit du graphe de la fonction $z = x^2$ par la translation définie par le vecteur $1.\overrightarrow{OE}$.

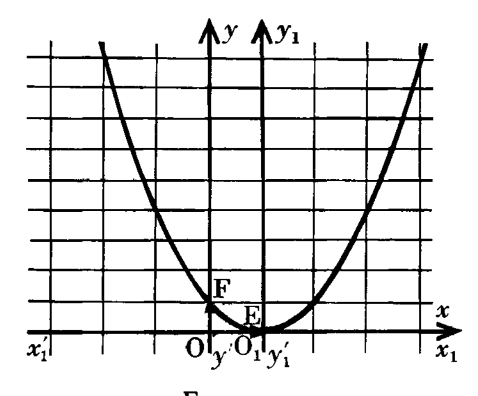


FIG. 250.

Soit O_1 le point $(1, 0)$. La translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ détermine deux nouveaux axes gradués $x_1'O_1x_1$, $y_1'O_1y_1$. Les formules de changement de coordonnées sont :

$$\begin{cases} x = 1 + x_1 \\ y = 0 + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y. \end{cases}$$

On a donc :

$$y = (x-1)^2 \iff y_1 = x_1^2.$$

Ce qui prouve que le graphe de la fonction représente, par rapport aux nouveaux axes, la relation $y_1 = x_1^2$.

Nous retrouvons encore la parabole (*Fig. 250*). Les points $(x = 0, y = 1)$ et $(x = 1, \; y = 0)$ permettent un contrôle.

EXEMPLE 2. — *Soit à étudier la fonction* $y = (x+3)^2$.

Nous donnerons quelques indications :

a) $$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1+3)^2 - (x_0+3)^2}{x_1 - x_0} = (x_1 + 3) + (x_0 + 3).$$

$$\begin{array}{lll} x_1 < -3 \text{ et } x_0 < -3 & \implies & y \searrow \text{ fonction décroissante} \\ x_1 > -3 \text{ et } x_0 > -3 & \implies & y \nearrow \text{ fonction croissante} \\ x = -3 & \implies & y = 0, \text{ minimum.} \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x \to \mp\infty \implies (x+3) \to \mp\infty \\ X \to \mp\infty \implies \quad X^2 \quad \to +\infty \end{array}\right\} x \to \mp\infty \implies (x+3)^2 \to +\infty.$$

c) **Translation des axes :** $\overrightarrow{OO_1}, (-3,\ 0)$

$$\begin{cases} x = -3 + x_1 \\ y = 0 + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x + 3 \\ y_1 = x \end{cases}$$

donc : $y = (x + 3)^2 \iff y_1 = x_1^3$

d'où le graphe (*Fig. 251*).

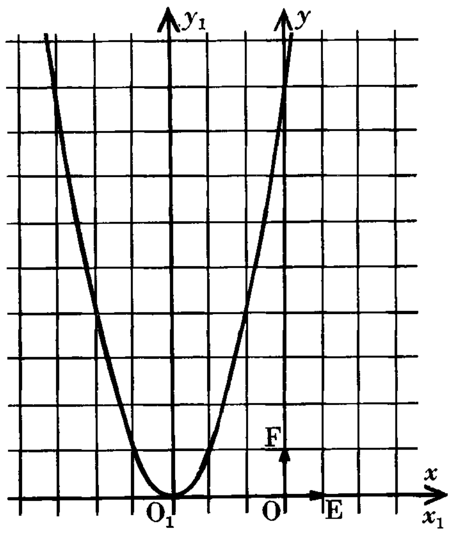


FIG. 251.

339. La fonction $y = a\ (x - k)^2$. — D'une façon générale la fonction $y = a\ (x - k)^2$ reproduit les variations de la fonction $z = ax^2$, avec un décalage de k.

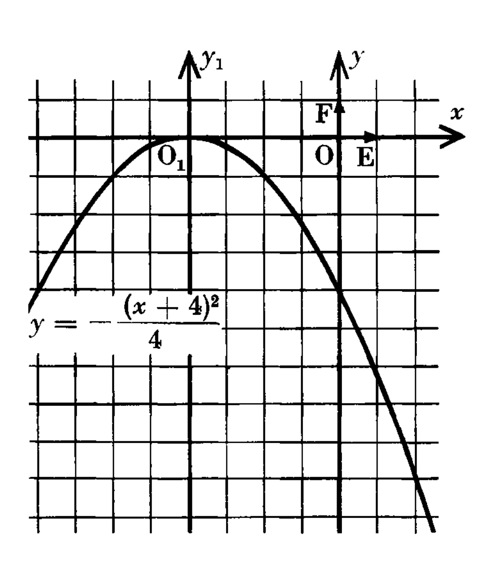
Commençons par étudier le graphe.

Soit O_1 le point de coordonnées $x = k$, $y = 0$. Par rapport aux nouveaux axes gradués, déduits des anciens par la translation $\overrightarrow{OO_1}$, le point $(x,\ y)$ admet des coordonnées $(x_1,\ y_1)$ et

$$\begin{cases} x = k + x_1 \\ y = 0 + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x - k \\ y_1 = y \end{cases}$$

donc $$y = a\ (x - k)^2 \iff y_1 = ax_1^2.$$

Nous pouvons construire le graphe dans tous les cas possibles (voir quelques exemples sur les *Figures 252*) et, nous basant sur le graphe, nous pouvons *lire* les variations de la fonction.



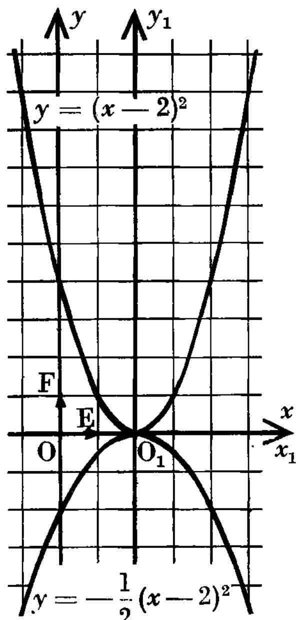
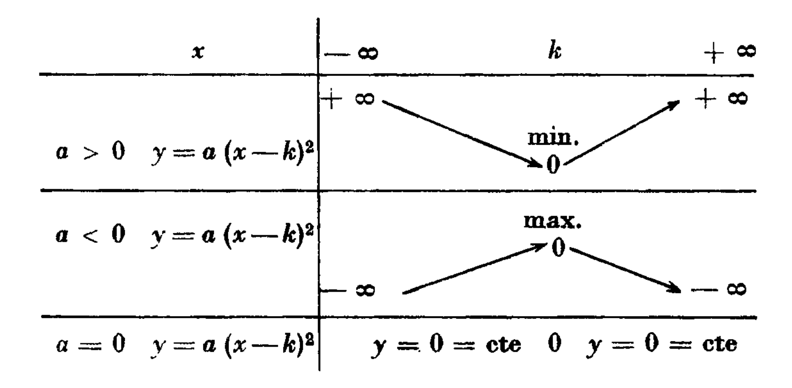


FIG. 252.

Les résultats tiennent dans le tableau suivant :



II. FONCTION $y = ax^2 + bx + c$

340. Un exemple de polynome complet du second degré. — Soit à étudier la fonction donnée par la formule : $y = x^2 - 4x + 3$.

Cette fonction, définie sur R, est un polynome du second degré. Nous avons étudié chap. X ses diverses formes remarquables. Utilisons ce principe et transformons y : $y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3$

$$y = (x - 2)^2 - 1.$$

La fonction y découle donc de la fonction $z = x^2$ par deux opérations :

a) diminuer de 1 toutes les valeurs de z.

b) décaler la variable, le retard étant 2.

1° *Sens de variation.*

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{[(x_1 - 2)^2 - 1] - [(x_0 - 2)^2 - 1]}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1 - 2)^2 - (x_0 - 2)^2}{x_1 - x_0}$$
$$= (x_1 - 2) + (x_0 - 2).$$

Le sens de variation résulte donc des implications :

$$x_1 < 2 \text{ et } x_0 < 2 \Longrightarrow \text{fonction décroissante}$$
$$x_1 > 2 \text{ et } x_0 > 2 \Longrightarrow \text{fonction croissante}$$
$$x = 2 \Longrightarrow y = -1, \text{ minimum.}$$

2° *Comportement pour* $|x| \longrightarrow +\infty$. Nous savons que :

$$x \longrightarrow \mp\infty \Longrightarrow x - 2 \longrightarrow \mp\infty \text{ (fonction linéaire)}$$
$$X \longrightarrow \mp\infty \Longrightarrow X^2 - 1 \longrightarrow +\infty \text{ (fonction } ax^2 + c\text{)}$$

donc $x \longrightarrow \mp\infty \Longrightarrow (x - 2)^2 - 1 \longrightarrow +\infty$.

3° *Graphe.* Soit O_1 le point d'abscisse 2, d'ordonnée — 1. Par translation, les axes gradués $x'Ox$, $y'Oy$ donnent de nouveaux axes $x_1'O_1x_1$, $y_1'O_1y_1$. Les formules de translation sont :

$$\begin{cases} x = 2 + x_1 \\ y = -1 + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x - 2 \\ y_1 = y + 1. \end{cases}$$

Donc

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \iff y_1 = x_1^2.$$

Pour les nouveaux axes, le graphe représente $y_1 = x_1^2$ (*Fig. 253*).

4° *Remarques diverses.* Le graphe ainsi construit coupe l'axe $x'Ox$ aux points $x = 1$ et $x = 3$. Ces abscisses sont effectivement les racines du trinome :

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$$
$$= (x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = (x - 3)(x - 1).$$

Le graphe coupe l'axe $y'Oy$ au point $x = 0$, $y = 3$.

On a construit également les points :

$$A(x = -1,\ y = 8);\quad B(x = 4,\ y = 3);\quad C(x = 5,\ y = 8).$$

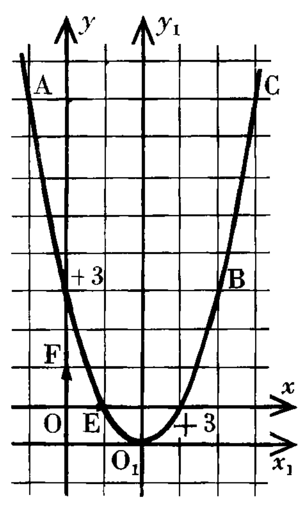


FIG. 253.

Ces vérifications sont indispensables, elles permettent notamment de déceler des erreurs dans le sens à donner à la translation, erreurs que les débutants commettent souvent.

Quant au signe du polynome

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3),$$

il apparaît clairement sur le graphe : il n'est du signe contraire à celui du premier terme que pour $1 < x < 3$.

341. La fonction $y = ax^2 + bx + c$. — La fonction définie par la formule :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

n'est autre que le polynome du second degré dont nous avons commencé l'étude au chapitre X. Rappelons la première forme remarquable :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Nous en déduirons : $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}.$

Pour alléger les notations, nous poserons :

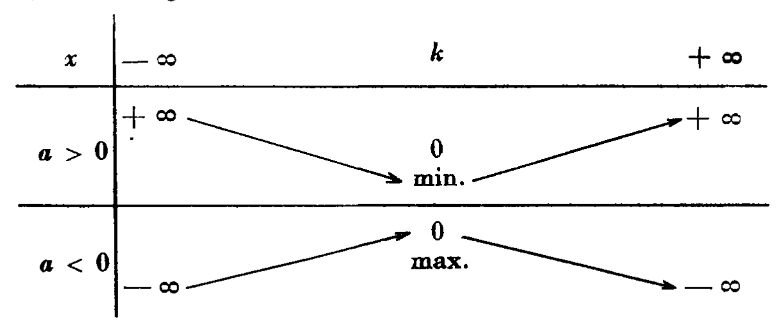
$$\frac{b}{2a} = -k \qquad \text{et} \qquad \frac{4ac - b^2}{4a} = l.$$

Nous aurons donc, plus simplement : $y = a(x-k)^2 + l$.

1° *Sens de variation.*

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{[a(x_1-k)^2 + l] - [a(x_0-k)^2 + l]}{x_1 - x_0} = a[(x_1 - k) + (x_0 - k)]$$

Donc, selon le signe de a :



2° *Étude pour* $|x| \to +\infty$.

α) $x \longrightarrow \mp\infty \implies (x-k) \longrightarrow \mp\infty$

β) $X \longrightarrow \mp\infty \implies aX^2 + l \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

γ) donc $x \longrightarrow \mp\infty \implies a(x-k)^2 + l \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$

3° *Tableau résumant la variation.* Compléter le tableau précédent en mettant $+\infty$ aux extrémités pour $a > 0$, et $-\infty$ pour $a < 0$.

4° *Graphe.* Soit $O_1\,(x = k, y = l)$.

La translation $\overrightarrow{OO_1}$ définit de nouveaux axes gradués

$$\begin{cases} x = k + x_1 \\ y = l + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x - k \\ y_1 = y - l \end{cases}$$

donc $$y = a(x-k)^2 + l \iff y_1 = ax_1^2.$$

Par rapport aux nouveaux axes le graphe traduit la relation $y_1 = ax_1^2$. C'est une parabole. Le point O_1 en est le *sommet*, la droite d'équation $x = k$ *l'axe* de symétrie, la droite d'équation $y = l$ la *tangente au sommet.*

N. B. On n'appliquera *jamais* ces formules.

On calculera *directement* en suivant la *méthode* que nous venons d'exposer.

Remarques. — Vérifier la bonne mise en place du graphe à l'aide de points calculés avec la forme *initiale* du polynome.

Le point $(0, c)$ existe toujours. Les racines existent pour $b^2 - 4ac \geqslant 0$, elles permettent un contrôle efficace, indispensable.

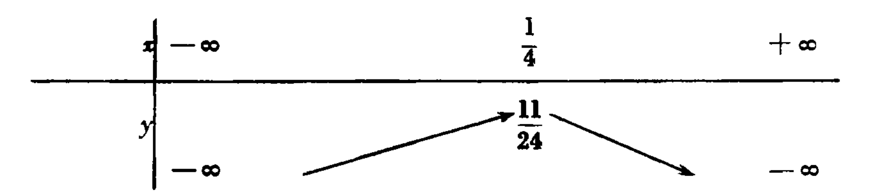
Le signe du polynome du second degré se lit.

Exemple. $$y = -2x^2 + x + \frac{1}{3}.$$

$$y = -2\left[x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\right] = -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{11}{48}\right] = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{24}$$

1° $$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -2\left[\left(x_1 - \frac{1}{4}\right) + \left(x_0 - \frac{1}{4}\right)\right]$$

2° $$x \to \mp\infty \implies y \to -\infty$$



3° *Graphe (le faire).* Soit $O_1\left(x = \frac{1}{4},\ y = \frac{11}{24}\right)$. **La translation donne :**

$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{24} + y_1 \\ x = \dfrac{1}{4} + x_1 \end{cases} \iff \begin{matrix} y_1 = y - \dfrac{11}{24} \\ x_1 = x - \dfrac{1}{4} \end{matrix}$$

donc : $$y = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{24} \iff y_1 = -2x_1^2.$$

4° ***Vérifications.***

Les racines existent $$x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}, \qquad x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$x_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{12}, \qquad x_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}$$

$$x_1 = -0{,}22\ldots, \qquad x_2 = 0{,}72\ldots$$

On comparera avec les points où le graphe coupe $x'Ox$.

Exercices. ***Étudier directement les fonctions*** *suivantes et tracer leurs graphes après avoir choisi au mieux les vecteurs unitaires.*

1512. $y = x^2 - 3x + 2$, $y = -x^2 + x$, $y = -x^2 + 2x + 1$.

1513. $y = 3x^2 + x - \frac{1}{2}$, $y = -3x^2 - x + 2$, $y = 2x^2 - 7x + 1$.

1514. $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 1$, $y = -\frac{x^2}{7} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}$, $y = -\frac{x^2}{5} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{7}$.

Déterminer les coefficients a, b, c pour que le graphe de la fonction

$$y = ax^2 + bx + c$$

passe par les points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. *Étudier la fonction et construire le graphe.*

1515.	$M_1(0, 0)$	$M_2(1, 1)$	$M_3(2, 3)$
1516.	$M_1(2, 1)$	$M_2(3, 5)$	$M_3(4, 3)$
1517.	$M_1(1, 1)$	$M_2(2, 4)$	$M_3(4, 1)$

Exercices.

III. APPLICATION AUX ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

342. Intersection de deux graphes. — Soit $y = f(x)$ et $z = g(x)$ deux fonctions. Sur la même feuille, en utilisant les mêmes axes, traçons leurs graphes respectifs (F) et (G). Ces deux graphes se rencontrent-ils? Et si oui, quelle est la signification de leurs points communs?

Nous avons traité ce problème dans le cas de deux fonctions linéaires; il est facile de généraliser.

Pour qu'un nombre x soit l'abscisse d'un point commun à (F) et (G), il faut et il suffit que l'ordonnée correspondant à x soit la même sur les deux graphes. Les abscisses cherchées sont donc les racines de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad f(x) = g(x). \tag{E}$$

Si cette équation n'admet pas de racine, les graphes ne se rencontrent pas.

343. Intersection d'une droite et de la parabole $y = x^2$. — A supposer qu'ils existent, les points communs à la parabole d'équation $y = x^2$ et à la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ sont les racines de l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 = \alpha x + \beta \tag{E}$$

ou encore :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - \alpha x - \beta = 0. \tag{E}$$

Selon les valeurs de α et de β, c'est-à-dire selon la droite choisie, cette équation du second degré admettra deux solutions distinctes, une solution double, ou n'admettra pas de solution.

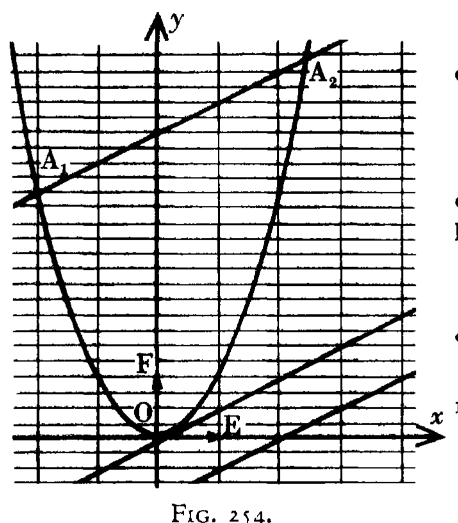


FIG. 254.

EXEMPLES. 1° La droite $y = \frac{x}{2} + 5$ conduit à l'équation

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - \frac{x}{2} - 5 = 0$$

qui admet deux solutions. On obtient deux points d'intersection :

$$A_1 \, (x_1 = -2, \quad y_1 = 4)$$

et

$$A_2 \left(x_2 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = \frac{25}{4} \right)$$

résultat que confirme la *figure 254.*

2° La droite $y = \frac{x}{2} - 1$ conduit à l'équation : $x \in \mathrm{R} \ \exists x? \quad x^2 - \frac{x}{2} + 1 = 0$ qui n'admet pas de racine; cette droite ne coupe pas la parabole (*Fig. 254*).

3° Cherchons s'il existe, parmi toutes les droites parallèles aux deux précédentes — donc parmi les droites ayant $\frac{1}{2}$ pour coefficient directeur — une droite ayant avec la parabole un seul point commun.

Une telle droite a pour équation $y = \frac{1}{2}x + \beta$ et conduit à l'équation

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 - \frac{1}{2}x - \beta = 0$$

dont on forme le discriminant $\frac{1}{4} + 4\beta$. Il y a solution double dans le seul cas où $\beta = -\frac{1}{16}$. La droite $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$, quand β varie, fait transition entre les sécantes pour lesquelles $\beta > -\frac{1}{16}$, et les non-sécantes pour lesquelles $\beta < -\frac{1}{16}$.

Nous démontrerons dans le cours de Première que la droite $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ est la *tangente* à la parabole en leur point commun $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{16}$ (*Fig. 254*).

344. Une résolution graphique de l'équation du second degré. — Les résultats précédents suggèrent une méthode pour résoudre graphiquement l'équation du second degré :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0 \qquad \text{(E)}$$

On écrira (E) sous la forme : $x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \qquad x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a} \qquad \text{(E)}$

et l'on cherchera les abscisses des points (éventuels) communs aux graphes des fonctions $y = x^2$ et $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$.

On ne construira pas un graphe pour résoudre une, ou deux équations. La méthode « rend » si l'on doit résoudre un grand nombre d'équations dont on connaît à l'avance, d'après l'origine du problème, un ordre de grandeur pour les solutions.

On trace la parabole $y = x^2$, ou plutôt les *arcs utiles* sur du papier fort ou sur quelque matériau approprié. On trace en général les droites sur une feuille transparente et souvent on se contente de présenter une règle, sans tirer de trait. Il faut déterminer les droites de façon rapide et uniforme.

Sur la *figure 255* on a gradué les droites $x = -10$ et $x = +10$.

EXEMPLE 1. $\exists x? \quad x^2 - 3x - 15 = 0.$

Droite : $\qquad y = 3x + 15.$

Tracé par : $\quad A(x = 0, \;\; y = 15); \;\; B(x = 10, \;\; y = 45).$

Solutions : $\qquad x_1 \simeq -2{,}7, \qquad x_2 \simeq 5{,}7.$

Comparaison avec le calcul :

$$\Delta = 69 \qquad 8{,}30 < \sqrt{69} < 8{,}31$$

$$\frac{-5{,}31}{2} < x_1 < \frac{-5{,}30}{2}; \qquad \frac{101{,}3}{2} < x_1 < \frac{11{,}31}{2}$$

$$-2{,}655 < x_1 < -2{,}650; \qquad 5{,}650 < x_2 < 5{,}655.$$

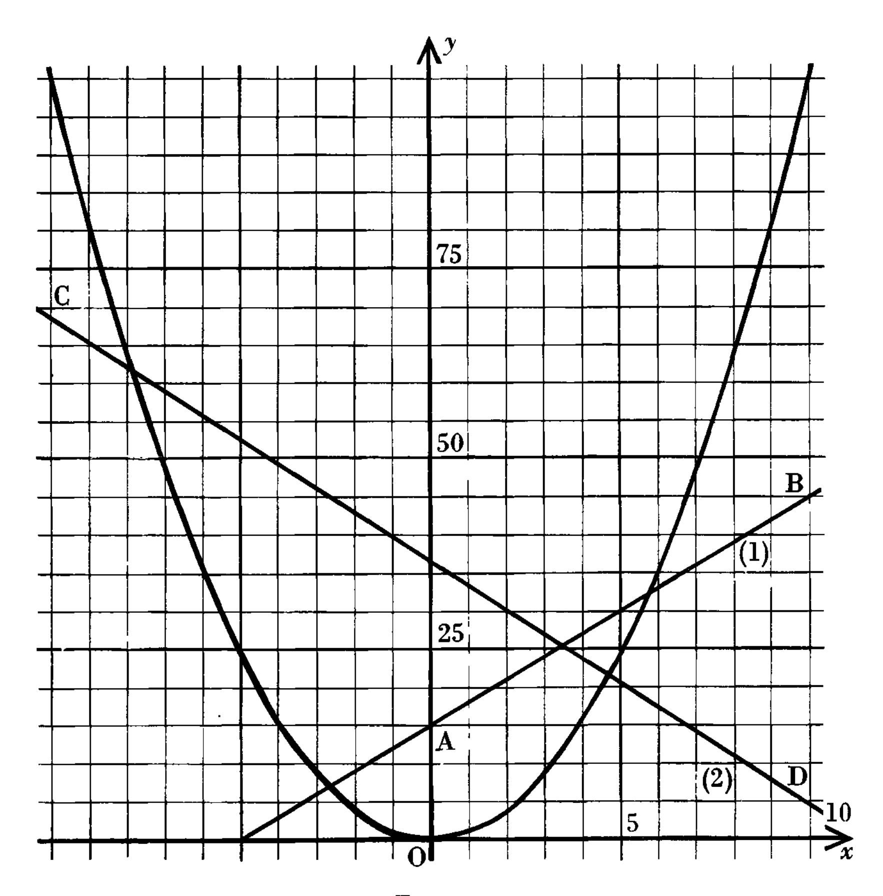


FIG. 255.

EXEMPLE 2. $\exists\, x ? \quad x^2 + 3{,}2\, x - 37 = 0.$

Droite : $y = -3{,}2\, x + 37.$

Tracé par : $C(x = -10, \quad y = 69)$; $D(x = 10, \quad y = 5)$.

Solutions : $x_1 \simeq -7{,}9, \quad x_1 \simeq 4{,}7.$

Comparaison avec le calcul :

$$\Delta' = 39{,}56 \qquad 6{,}28 < \sqrt{\Delta'} < 6{,}29$$

$$-7{,}89 < x_1 < -7{,}88, \qquad 4{,}68 < x_2 < 4{,}69.$$

La méthode donne le chiffre que l'on adopterait pour le chiffre des dixièmes si l'on décidait d'arrondir et de ne garder qu'un chiffre décimal.

Le lecteur peut se faire une première idée de ce que les techniciens appellent un *abaque*, le principe en étant de substituer un tracé simple à un calcul pénible.

L'abaque de la *figure 255* n'est directement utilisable que pour des coefficients variant entre certaines limites, sinon on peut encore essayer de l'utiliser en changeant d'échelles.

345. Une équation paramétrique. — Soit à résoudre et discuter selon les valeurs du paramètre m l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x ? \quad x^2 - (m + 4)x + 3\,m + 7 = 0.$$

1° *Par le calcul.* $\Delta = (m + 4)^2 - 4(3\,m + 7) = m^2 - 4\,m - 12$

$$\Delta = (m - 6)\,(m + 2).$$

Le signe des racines est donné par le théorème de Descartes (n° 135).

m	$-\infty$ … -4	-4 … $-\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{3}$ … -2	-2 … 6	6 … $+\infty$
sgn Δ	+	+	+	—	+
sgn a	+	+	+	+	+
sgn b	+	—	—	—	—
sgn c	—	—	+	+	+
	deux racines de signes contraires.		deux racines positives.		deux racines positives

Pour $m = -\frac{7}{3}$: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 0$; pour $m = -2$: $x_1 = x_2 = 1$; pour $m = 6$: $x_1 = x_2 = 5$.

2° *Interprétation graphique.* L'équation s'écrit :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x ? \quad x^2 - 4\,x + 7 = m\,(x - 3).$$

On construit (*Fig. 256*) le graphe du premier membre :

$$y = x^2 - 4\,x + 7 = (x - 2)^2 + 3$$

c'est une parabole (G) dont le sommet est en (2; 3).

Le graphe du second membre est une droite, variable avec m. Elle passe par le point fixe A ($x = 3$, $y = 0$) et m est son coefficient directeur.

Les droites obtenues pour $m_1 = -2$ et $m_2 = +6$ séparent les sécantes à (G) des non-sécantes. Chacune d'elles n'a, avec (G), qu'un point en commun : $T_1\,(x_1 = 1,\ y_1 = 4)$ pour la première, $T_2\,(x_2 = 5,\ y_2 = 12)$ pour la seconde.

On peut présumer que AT_1 et AT_2 sont les tangentes issues de A à (G).

Pour $m = -\frac{7}{3}$ on obtient une sécante particulière qui coupe (G) au point B ($x = 0$, $y = 7$) et au point C $\left(x = +\frac{5}{3},\ y = \frac{28}{9}\right)$.

La sécante BC sépare l'ensemble des sécantes en deux sous-ensembles. Celles qui traversent l'angle aigu $\widehat{T_1AC}$ correspondent à $\frac{-7}{3} < m < -2$, elles coupent l'arc $\widehat{BC}$ en deux points d'abscisses positives.

Celles qui traversent l'angle $\widehat{CAT_2}$ forment le second sous-ensemble.

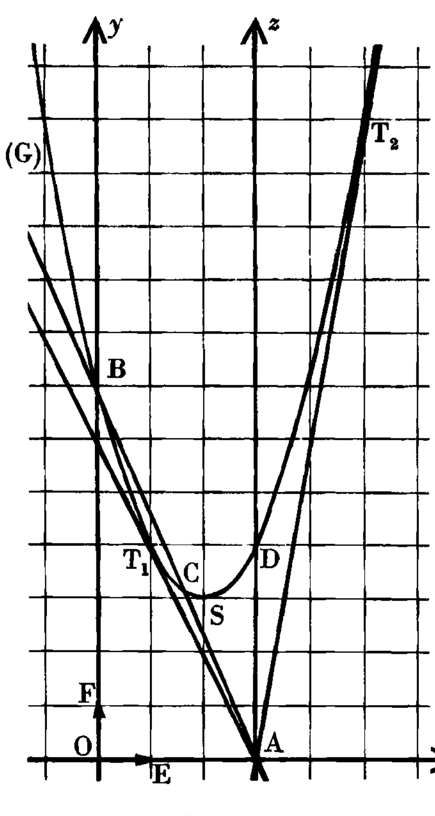


FIG. 256.

Elles se répartissent en deux catégories. Menons par A la demi-droite Az parallèle à Oy et de même sens. Les sécantes qui traversent l'angle $\widehat{zAT_2}$ correspondent à $m > 6$ et donnent deux points d'abscisses positives sur l'arc infini, d'origine D, à droite.

Celles qui traversent l'angle $\widehat{CAz}$ donnent un point d'abscisse positive sur l'arc $\widehat{CD}$ et un point d'abscisse négative sur l'arc infini, d'origine B, à gauche.

Le lecteur peut ainsi apprécier la façon dont les graphes visualisent les résultats d'un calcul. Ils permettent de se faire de la question étudiée une idée générale, la rendent intuitive et — le cas échéant — servent à contrôler le calcul et à rectifier des erreurs.

346. Application aux inéquations. — Généralisant ce qui vient d'être exposé à propos des équations, on voit immédiatement comment résoudre une inéquation telle que :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \quad x^2 + 3{,}2\,x - 37 > 0.$$

Nous avons déjà construit (*Fig. 255*) les graphes des fonctions :

$$y = x^2; \qquad y_1 = -3{,}2\,x + 37.$$

On conservera les abscisses des points pour lesquels y est supérieur à y_1. Il reste, comme prévu par le signe du polynome, les demi-droites extérieures à l'intervalle des racines.

On voit également que le travail fait au paragraphe précédent permet de résoudre et de discuter graphiquement l'inéquation paramétrique :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x? \quad x^2 - (m + 4)x + 3\,m + 7 < 0.$$

Si elles existent, les solutions sont les abscisses pour lesquelles le point de (G) est au-dessous du point de la droite. Leur existence dépend de m.

Si m donne une non-sécante, l'inéquation n'a pas de solution.

Si m donne une sécante, l'intervalle des racines constitue l'ensemble des solutions.

Exercices. *Construire* $y = x^2$ *en repère orthonormé* OE = OF = 1 *cm,* $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

Résoudre à l'aide de ce graphe les équations $x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x?$

1518. $x^2 + x - 6 = 0$; $3\,x^2 - x - 6 = 0$; $2\,x^2 + x - 1 = 0$.

1519. $5\,x^2 - x - 4 = 0$; $5\,x^2 + x - 4 = 0$; $x^2 + x + 0{,}1 = 0$.

1520. $5\,x^2 + 4\,x + 0{,}5 = 0$; $3\,x^2 + 6\,x + 1 = 0$; $11\,x^2 + 10x + 1 = 0$.

Construire $y = x^2$ *pour* $0 \leqslant x \leqslant 10$ OE = 2 *cm* OF = $\frac{1}{4}$ 1 *cm.*

Résoudre à l'aide de ce graphe les équations, $x \in \mathbb{R}$ $\exists x$?

1521. $x^2 - 10x + 1 = 0$; $x^2 - 9x + 1 = 0$; $x^2 - 9{,}5x + 1{,}5 = 0$.

1522. $x^2 - 8x + 4 = 0$; $x^2 - 7x + 3 = 0$; $x^2 - 7{,}5x + 3{,}5 = 0$.

1523. $x^2 - 6x + 2 = 0$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $x^2 - 5{,}5x + 3 = 0$.

Étudier graphiquement et par le calcul les équations paramétriques suivantes, $x \in \mathbb{R}$ $\exists x$?

1524. $x^2 - 2x - m = 0$.

1525. $x^2 - mx + 1 = 0$.

1526. $x^2 - (3 + m)x + 2 - m = 0$.

1527. $(x - m)^2 = mx$.

1528. $(x - m)^2 + mx = 0$

1529. $(x - m)^2 + m = mx$.

1530. $(x - m)(x - 2m) + 1 = 0$.

1531. $x^2 + (m + 1)x + m - 1 = 0$.

1532. $3x^2 - (m + 2)x + m - 2 = 0$.

Exercices.

PROBLÈMES

Construire en repère orthonormé, OE = OF = 1 cm, *les graphes des fonctions suivantes.*

1533. $y = |(x - 1)(x - 3)|$.

1534. $y = |-x^2 + x + 1|$.

1535. $y = \left|\frac{1}{2}x^2 + x - 3\right|$.

1536. $y = |-x^2 - x + 1| + |x^2 + x - 1|$.

1537. $y = |x^2 - 3x| + 2$.

Construire les graphes des fonctions suivantes après choix du repère. On rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière de x. ($x \geqslant 0$)

1538. $y = x^2 E(x)$.

1539. $y = [x - E(x)]^2$.

1540. $y = x^2 E(x) - xE(x^2)$.

1541. $y = \sqrt{(x^2 + 2x)^2} - x^2 + 3$.

Étant donné deux nombres relatifs **a** ***et*** **b,** ***on désigne par*** **Max (a, b)** ***le plus grand des deux nombres*** **a** ***et*** **b,** ***par*** **min (a, b),** ***le plus petit des deux.***

Construire pour un repère convenable les graphes des fonctions suivantes :

1542. $y = \text{Max}(x, x^2)$; $y = \min(x, x^2)$.

1543. $y = \text{Max}(x^2, 2x^2 - 1)$;
$y = \min(x^2, 2x^2 - 1)$.

1544. $y = \text{Max}(-x^2 + x + 3, x^2 - x)$;
$y = (\min(-x^2 + x + 3, x^2 - x)$.

1545. $y = x^2 + \text{Max}(x, x^2)$.

1546. $y = \sqrt{x^2} \times \text{Max}(1, x)$.

1547. $y = \text{Max}[x^2, (x + |x|)^2]$.

1548. — Sur un axe $x'Ox$, d'origine O, soit le point A fixe défini $\overline{OA} = a$, et M variable défini par $\overline{OM} = x$. Étudier la variation de la fonction définie par la relation : $y = MA^2 + MO^2$. Construire le graphe.

Résoudre, en construisant leurs ensembles figuratifs, les systèmes suivants formés d'inéquations ou d'équations, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\exists (x, y)$?

1549. $\begin{cases} y > x \\ y < x^2 - 1. \end{cases}$

1550. $\begin{cases} y < x^2 + x - 1 \\ y > x^2 - x + 1. \end{cases}$

1551. $\begin{cases} y < -x^2 + x + 5 \\ y > x^2 + x - 5. \end{cases}$

1552. $\begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ y^2 - x^4 > 0. \end{cases}$

1553. $\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ (y - x)(y - x^2) > 0. \end{cases}$

1554. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + x^2 + 5x > 0. \end{cases}$

1555. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y > x^2 + 3x + 2. \end{cases}$

1556. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 > 0 \\ y = x^2 + 3x + 2. \end{cases}$

CHAPITRE XXIV

FONCTION $y = \frac{a}{x}$.

I. FONCTION $y = \frac{1}{x}$.

347. Opération consistant à prendre l'inverse d'un nombre. — Sous la seule condition qu'il soit différent de zéro, un nombre x admet un nombre inverse $y' = \frac{1}{x}$, solution unique de l'équation :

$$x \neq 0 \quad y \in R \quad \exists y? \qquad xy = 1.$$

On sait qu'un nombre et son inverse ont le même signe et qu'il existe une réciprocité entre eux : si y' est l'inverse de x, x est l'inverse de y'.

1 et — 1 sont les seuls nombres égaux à leurs inverses, car :

$$y' = x \implies x.x = 1 \iff x^2 = 1.$$

348. Fonction définie par l'opération « prendre l'inverse ». — Il résulte de ce qui précède que, sur l'ensemble R privé de zéro, l'opération consistant à prendre l'inverse de x définit une fonction f par la loi :

$$x \in R - \{0\} \quad \forall x \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Nous dirons plus simplement : la fonction $y = \frac{1}{x}$.

La fonction $y = \frac{1}{x}$ est définie sur : (R^{*-}) : $x < 0$ et (R^{*+}) : $0 < x$.

Si l'on donne à x deux valeurs opposées : $\alpha \in R^{*+}$ et $-\alpha \in R^{*-}$, la fonction prend deux valeurs opposées : c'est une fonction *impaire*.

349. Étude empirique de la fonction $y = \frac{1}{x}$. — Un tableau numérique nous donnera une première idée de cette fonction.

Demi-tableau $x < 0$		*Demi-tableau* $0 < x$	
x	y	x	y
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
— 10 000 000	— 0,000 000 1	0,000 000 1	10 000 000
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
— 100	— 0,01	0,01	100
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
— 10	— 0,1	0,1	10
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . .
— 2	— 0,5	0,5	2
— 1	— 1	1	1
— 0.5	— 2	2	0,5
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
— 0,1	— 10	10	0,1
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
— 0,01	— 100	100	0,01
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
— 0,000 000 1	— 10 000 000	10 000 000	0,000 000 1
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

L'examen de ce tableau fait présumer que la fonction est décroissante sur les deux intervalles sur lesquels elle est définie. Il montre en outre, pour x voisin de zéro et pour x tendant vers plus ou moins l'infini, un comportement de la fonction qui demande, pour être décrit, des précisions.

350. Sens de variation. 1° $x_0 < 0$ et $x_1 < 0$, $x_1 \neq x_0$.

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{x_0 - x_1}{x_1 x_0} \cdot \frac{1}{x_1 - x_0} = -\frac{1}{x_1 x_0}. \text{ Donc :}$$

$x_0 < 0$ et $x_1 < 0 \implies \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} < 0 \implies$ la fonction est décroissante.

2° $x_0 > 0$ et $x_1 > 0$ $x_1 \neq x_0$. Même calcul, et même conclusion puisque le produit $x_1 x_0$ est encore positif.

▪ THÉORÈME. — **La fonction $\frac{1}{x}$ est décroissante sur chacun des deux intervalles où elle est définie.**

351. Étude pour $x \to \mp \infty$. — On constate, lorsque x tend vers plus l'infini, que la fonction prend des valeurs positives très petites. Pour préciser ce fait, donnons une définition.

☆ DÉFINITION. — **On dit que la fonction $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers plus l'infini si, quel que soit le nombre positif donné arbitrairement petit ε, il est possible de déterminer un nombre A tel que $x > A$ entraîne $|f(x)| < \varepsilon$.**

Formulons cette définition à l'aide des symboles logiques :

$$f(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty \iff \varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon \quad \exists A,$$
$$x > A \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Le lecteur écrira et énoncera la définition analogue, relative au cas où $x \to -\infty$. Nous n'en donnerons que la formulation :

$$f(x) \to 0 \text{ quand } x \to -\infty \iff \varepsilon > 0, \quad \forall \varepsilon \quad \exists A,$$
$$x < -A \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

APPLICATION DE CES DÉFINITIONS A $f(x) = \frac{1}{x}$. — Est-il possible de déterminer un nombre fixe A, tel que $x > A \implies \left|\frac{1}{x}\right| < 10^{-7}$?

Nous avons, pour $x > 0$, $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$. Résolvons :

$$x > 0 \quad \exists x? \quad \frac{1}{x} < 10^{-7} \qquad \text{ou :} \qquad x > 0 \quad \exists x? \quad \frac{1}{x} - 10^{-7} < 0$$

ou : $$x > 0 \quad \exists x? \quad \frac{1 - 10^{-7}x}{x} < 0$$

ou, puisque x est positif : $x > 0 \quad \exists x? \quad 1 - 10^{-7}x < 0$

ou, puisque $10^7 > 0$: $x > 0 \quad \exists x? \quad 10^7 - x < 0$

Réponse : Oui, $x > 10^7$.

Nous avons trouvé une condition (nécessaire et) *suffisante* du type imposé $x > A$ avec $A = 10^7$.

Le cas où $x \to -\infty$ se traite de la même façon : $\frac{1}{|x|} = -\frac{1}{x}$. Soit :

$$x < 0 \quad \exists x? \quad -\frac{1}{x} < 10^{-7}, \qquad \text{ou :} \qquad x < 0 \quad \exists x? \quad \frac{1}{x} + 10^{-7} > 0$$

Ce qui conduit puisque $x < 0$, à : $x < -10^7$.
Nous pouvons énoncer :

▪ THÉORÈME. — **La fonction $y = \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers plus ou moins l'infini.**

On dit aussi : « *a pour limite zéro* quand x tend vers plus l'infini ».

352. « Tendre vers zéro » et « décroître constamment » ne sont pas des faits à lier. — Quand $x \to +\infty$ la fonction $\frac{1}{x}$ possède deux propriétés :

1° elle décroît;
2° elle tend vers zéro.

En une phrase : lorsque x tend vers plus l'infini, $\frac{1}{x}$ tend vers zéro par valeurs décroissantes. On notera que, pour une fonction, le fait d'avoir pour x tendant vers plus l'infini la limite zéro, n'est pas lié nécessairement à une décroissance continuelle (Voir Ex. n° **1576**).

353. Étude de la fonction $\frac{1}{x}$ quand x tend vers zéro. — Pour x voisin de zéro nous obtenons des résultats tels que :

$$x = -0{,}000\,000\,1 \implies y = -10\,000\,000$$

et

$$x = 0{,}000\,000\,1 \implies y = +10\,000\,000.$$

A deux valeurs très voisines de x correspondent des valeurs très différentes de y. On peut présumer que y tend vers plus l'infini quand x tend vers zéro par valeurs positives, et vers moins l'infini quand x tend vers zéro par valeurs négatives. Mais il convient de bien préciser ces notions.

☆ DÉFINITION. — **On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers zéro par valeurs positives si, quel que soit le nombre positif A, arbitrairement grand, il est possible de déterminer un nombre η tel que $0 < x < \eta$ entraîne $f(x) > A$.**

A l'aide des symboles logiques :

$f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow +0 \iff A > 0 \ \forall A \ \exists \eta \ \ \eta > 0$

et : $0 < x < \eta \implies f(x) > A.$

On remarquera la façon *conventionnelle* de noter que x tend vers zéro par *valeurs positives* $(+0)$.

Soit $x > 0$. On sait que : $\varepsilon > 0 \quad x < \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{x} > \varepsilon.$

S'il faut réaliser : $0 < A < \frac{1}{x}$, il suffit que : $0 < x < \frac{1}{A}$.

On a donc une condition suffisante de la forme $0 < x < \eta$, avec $\eta = \frac{1}{A}$.

Pour $x < 0$ les définitions et les démonstrations se transposent aisément.

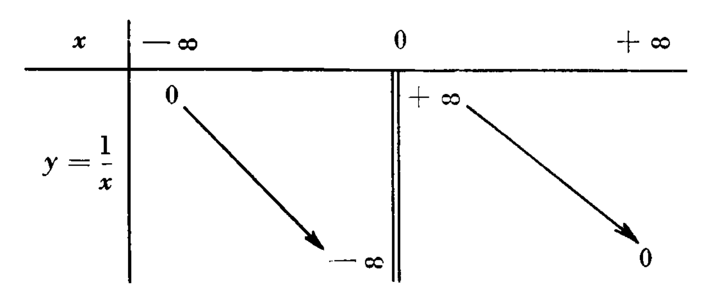
▪ THÉORÈME. — **La fonction $\frac{1}{x}$ tend vers plus l'infini (resp.[1] moins l'infini) quand x tend vers zéro par valeurs positives (resp. négatives).**

1. *Resp.* est mis pour respectivement, c'est-à-dire :

$\frac{1}{x} \to +\infty$ quand $x \to 0$ par valeurs positives.

$\frac{1}{x} \to -\infty$ quand $x \to 0$ par valeurs négatives.

354. Résumé.



Exercices. 1557. — Donner dans le détail la définition d'une fonction qui tend vers zéro quand x tend vers moins l'infini.

1558. — Donner dans le détail la définition d'une fonction qui tend vers moins l'infini quand x tend vers zéro par valeurs négatives,
puis d'une fonction qui tend vers plus l'infini quand x tend vers zéro par valeurs négatives.

1559. — Donner diverses conditions suffisantes, du type $0 < x < \eta$, pour que $\frac{1}{x} > 893\,277$.

1560. — Donner diverses conditions suffisantes, du type $x < A$, pour que $\left|\frac{1}{x}\right| < 0{,}333345.10^{-4}$ avec $x < 0$.

1561. — Démontrer que :
$\frac{1}{x^2} \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow -0$ (lire par *valeurs négatives*).

1562. — Trouver une condition suffisante du type $x > A$ pour que :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < 0{,}00031.$$

1563. — Trouver une condition suffisante du type $x > A > 0$ pour que :
$\frac{1}{x} < \frac{1}{3.000}$.
Cette condition est-elle suffisante pour que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{1\,000}?$$

1564. — Étudier la fonction $y = 3 + \frac{1}{x}$. Préciser son comportement pour $x \longrightarrow \pm\infty$. (Elle tend vers 3).

1565. — Étudier la fonction $\frac{1}{|x|}$.

1566. — Étudier la fonction $y = \text{Max}\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

1567. — On appelle α le reste de la division du nombre positif x par le nombre 90.
On considère la fonction $x > 0$ $y = \frac{\cos\alpha^0}{x}$.
Démontrer que y tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. **Exercices.**

I bis. GRAPHE DE LA FONCTION $y = \frac{1}{x}$.

355. Asymptotes. Symétries. — On ne peut donner de la fonction $y = \frac{1}{x}$, définie sur un domaine infini, que des graphes partiels.

S'il n'est pas possible de tracer un graphe infini on peut concevoir, étudier et décrire la courbe idéale, illimitée, dont le graphe est un fragment.

Cette courbe constitue l'ensemble représentatif de la relation $xy = 1$ et cette définition nouvelle, quoique très voisine de la première, met mieux en lumière la réciprocité qui existe entre x et y.

La courbe d'équation $xy = 1$ contient en même temps les points :

$$M_0 (x = x_0, \quad y = y_0 = \frac{1}{x_0} \qquad x_0 \neq 0 \quad \text{et :} \quad M'_0(x = -x_0, \quad y = -y_0).$$

Elle admet donc l'origine comme *centre de symétrie*.

Elle contient également les points :

$$M''_0 (x = y_0, \quad y = x_0) \qquad \text{et} \qquad M'''_0 (x = -y_0, \quad y = -x_0).$$

On en déduit que, par rapport à un repère orthonormé (n° **307**), les bissectrices des axes constituent, pour la courbe, des axes de symétrie.

Branches infinies. — Lorsque x tend vers plus l'infini, y tend vers zéro. Les points figuratifs se trouvent du côté des abscisses positives et la distance du point à Ox tend vers zéro quand l'abscisse tend vers plus l'infini.

On dit que la courbe admet une branche infinie *asymptote*, ou que la demi-droite Ox est asymptote à la courbe, ou qu'elle en est une asymptote.

De même, la branche infinie obtenue quand x tend vers moins l'infini admet pour asymptote la demi-droite Ox'. Les deux demi-droites sont portées par la même droite, mais on se gardera de généraliser; on pourra dire que la droite $x'Ox$ est pour la courbe une asymptote.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, y tend vers plus l'infini. Il existe donc sur la courbe des points arbitrairement voisins de la demi-droite Oy (du côté des abscisses positives) et quand on fait tendre vers zéro la distance du point figuratif à Oy, son ordonnée tend vers l'infini.

Nous dirons encore que la courbe admet une branche infinie asymptote à la demi-droite Oy, ou que Oy est une asymptote de la courbe.

Pour x tendant vers zéro par valeurs négatives, il existe une branche infinie symétrique de la précédente par rapport à l'origine et admettant pour asymptote la demi-droite Oy'.

Si l'on considère la courbe comme l'ensemble représentatif de la relation $xy = 1$, on peut indifféremment considérer qu'on se donne x en premier, et que y est une fonction de x; ou qu'on se donne d'abord y et que x est une fonction de y; $x = g(y)$.

La courbe est le graphe commun à $y = f(x)$ et à $x = g(y)$. Si on veut la lire sous sa signification $x = g(y)$ sans heurter une habitude acquise, on fera tourner la feuille d'un quart de tour.

L'analogie profonde des deux asymptotes de la courbe apparaît alors clairement.

356. Régions. — La courbe totale se compose de deux parties distinctes, symétriques par rapport à l'origine, admettant chacune deux branches infinies. L'un des arcs doublement infini, soit A_1 se trouve dans la région I, l'autre dans la région III.

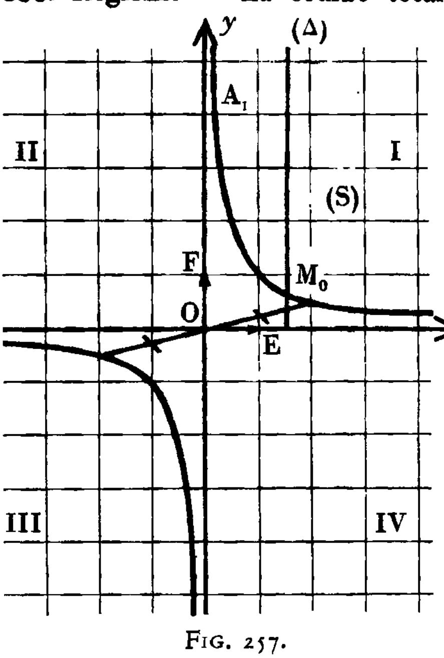


Fig. 257.

L'arc A_1 partage la région I en deux domaines : une droite (Δ), d'équation $x = x_0$, coupe en effet A_1 au point $x = x_0$, $y = y_0 = \frac{1}{x_0}$, et ce point M_0 détermine un segment sur lequel $y < y_0$ et une demi-droite (Δ') sur laquelle $y > y_0$. Le domaine supérieur (S) contient les demi-droites (Δ'), il constitue l'ensemble figuratif de la relation $xy > 1$; $x > 0$.

357. Tracé définitif. — La *figure 257* montre le tracé obtenu. Nous ne sommes pas encore en mesure de le justifier complètement : il nous manque de savoir s'il existe en chaque point une tangente, et comment la construire.

La courbe idéale, illimitée, est une courbe que l'on définit et étudie en géométrie sous le nom *d'hyperbole équilatère*.

Exercices. 1568. — Graphe de la fonction $y = \frac{1}{|x|}$. Symétrie. Asymptotes.

1569. — Graphe de la fonction $y = \frac{1}{x^2}$. Symétrie. Asymptotes.

1570. — Ensemble représentatif de la relation $x^2y^2 = 1$. Symétries, asymptotes.

1571. — Ensemble représentatif de la relation $xy > 1$, ensemble représentatif de la relation $xy < 1$.

1572. — Graphe de la fonction $y = 3 + \frac{1}{x}$ (Translation).

Résoudre graphiquement, en déterminant leurs ensembles représentatifs, les systèmes suivants : $x \in R$ $y \in R$ $\exists x \exists y$?

1573. $\begin{cases} xy < 1 \\ x + y < 0. \end{cases}$ **1574.** $\begin{cases} xy < 1 \\ x - y + 1 > 0 \\ x + y - 1 < 0. \end{cases}$ **1575.** $\begin{cases} xy < 1 \\ 2x + 3y - 6 = 0. \end{cases}$

1576. — La limite zéro n'implique pas la décroissante continuelle. Fable : les prêtresses de Diane à Éphèse avaient la charge d'une source et d'une amphore sacrée. Chaque soir, à minuit, elles devaient vider l'amphore de la moitié de son contenu *actuel*. Exceptionnellement, à chaque pleine lune, elles devaient en doubler le contenu (actuel).

1° Démontrer que le contenu tend vers zéro (et si vite qu'il ne peut s'agir que d'une fable).

2° En déduire qu'une fonction peut tendre vers zéro *sans toujours* décroître.

Exercices.

II. FONCTION $y = \frac{a}{x}$. GRAPHE.

358. Étude de la fonction $y = \frac{a}{x}$. — La fonction $y = \frac{a}{x}$, avec $a \neq 0$ (et par la suite nous observerons toujours cette restriction) généralise la fonction $y = \frac{1}{x}$. Elle est définie sur $R - \{0\}$, c'est-à-dire pour $x < 0$ et pour $x > 0$.

C'est encore une fonction *impaire* : $\alpha \neq 0$, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

Sens de variation. — Pour $x > 0$, soit $x_0 > 0$, $x_1 > 0$, $x_0 \neq x_1$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_0}}{x_1 - x_0} = -\frac{a}{x_1 x_0}.$$ Ce rapport a le signe de $(-a)$.

Pour $x < 0, x_1 < 0, x_0 < 0$ on obtient le même résultat car $x_0 x_1$ est positif.

- THÉORÈME. — **Sur chacun des intervalles où elle est définie, la fonction $y = \frac{a}{x}$ est décroissante si a est positif. Elle est croissante si a est négatif.**

Comportement pour x tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$. — Nous avons appris que :
$$x \longrightarrow \infty \implies \frac{1}{x} \longrightarrow 0.$$

Or, si une fonction $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou $-\infty$. la fonction $af(x) = g(x)$ tend aussi vers 0.

On peut préciser ce fait de la manière suivante.
Soit à réaliser $|g(x)| < \varepsilon$ par une condition suffisante du type $x > A$. On veut donc réaliser $|af(x)| < \varepsilon$, c'est-à-dire : $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon'$. Or puisque $f(x)$ tend vers zéro, il existe pour tout $\varepsilon' > 0$ donné, un nombre A tel que :
$$x > A \implies |f(x)| < \varepsilon'.$$
On aura bien :
$$x > A \implies |g(x)| < \varepsilon.$$

Tenant compte de ce résultat général et du signe de a, on aura donc :

$$a > 0 \begin{cases} x \longrightarrow +\infty \implies \frac{a}{x} \longrightarrow +0. \\ x \longrightarrow -\infty \implies \frac{a}{x} \longrightarrow -0. \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} x \longrightarrow +\infty \implies \frac{a}{x} \longrightarrow -0. \\ x \longrightarrow -\infty \implies \frac{a}{x} \longrightarrow +0. \end{cases}$$

Comportement pour x voisin de 0. — L'étude de la fonction $y = \frac{1}{x}$ nous a appris que : $x \longrightarrow 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \longrightarrow \infty$.

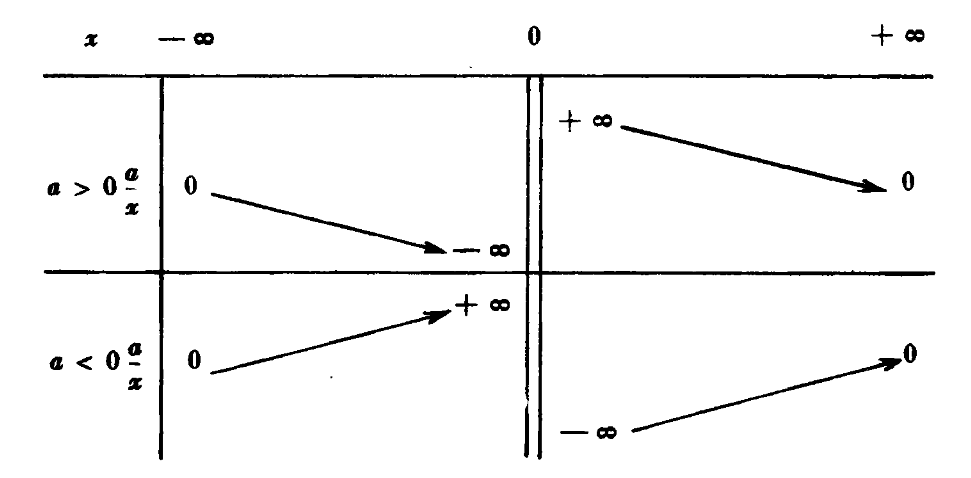
L'étude de la fonction linéaire nous a appris que :

$$a > 0 \text{ et } X \longrightarrow +\infty \Longrightarrow aX \longrightarrow +\infty.$$
$$a > 0 \text{ et } X \longrightarrow -\infty \Longrightarrow aX \longrightarrow -\infty.$$
$$a < 0 \text{ et } X \longrightarrow +\infty \Longrightarrow aX \longrightarrow -\infty.$$
$$a < 0 \text{ et } X \longrightarrow -\infty \Longrightarrow aX \longrightarrow +\infty.$$

En désignant $\frac{1}{x}$ par X nous pouvons enchaîner ces implications et :

$$a > 0 \text{ et } x \longrightarrow +0 \Longrightarrow \frac{a}{x} \longrightarrow +\infty.$$
$$a > 0 \text{ et } x \longrightarrow -0 \Longrightarrow \frac{a}{x} \longrightarrow -\infty.$$
$$a < 0 \text{ et } x \longrightarrow +0 \Longrightarrow \frac{a}{x} \longrightarrow -\infty.$$
$$a < 0 \text{ et } x \longrightarrow -0 \Longrightarrow \frac{a}{x} \longrightarrow +\infty.$$

Tableau de variation. — L'étude précédente se résume dans le tableau suivant :



359. Graphe de la fonction $\frac{a}{x}$. — Pour $a = 2$, le graphe G_2 de la fonction $y = \frac{2}{x}$ se déduira de celui de la fonction $y = \frac{1}{x}$ en multipliant par $+2$ toutes les ordonnées. Le nouveau graphe traduit aussi la relation $xy = 2$ et se trouve donc tout entier par rapport à l'ancien dans le domaine $xy > 1$.

Le graphe $G_{\frac{1}{2}}$ de $y = \frac{\frac{1}{2}}{x}$ se déduit de celui de $\frac{1}{x}$ par une affinité de rapport $\frac{1}{2}$, d'axe $x'Ox$, de direction Oy. Il se situe entièrement dans la région $xy < 1$.

Pour $a = -1$, le graphe G_{-1} se déduit de celui de $y = \frac{1}{x}$ en effectuant une symétrie par rapport à $x'Ox$. On passe facilement de G_{-1} à G_{-2}, etc.

Tous ces graphes admettent la même symétrie centrale et les mêmes asymptotes. On obtient (*Fig. 258*) une famille d'hyperboles équilatères situées dans les régions I et III pour $a > 0$, II et IV pour $a < 0$, et d'autant plus serrées sur leurs asymptotes que $|a|$ est plus petite. Elles n'ont aucun point commun.

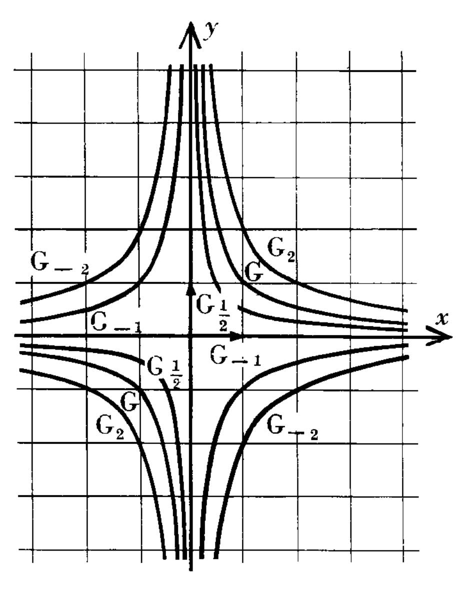


FIG. 258.

360. Changement de vecteurs unitaires. — Nous avons établi au n° 336, les formules relatives à un changement de vecteurs unitaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OE'} = k\,\overrightarrow{OE} & k \neq 0 \\ \overrightarrow{OF'} = l\,\overrightarrow{OF} & l \neq 0 \end{cases}, \quad \text{entraînant :} \quad \begin{cases} x = kx' \\ y = ly'. \end{cases}$$

Il en résulte que : $\quad xy = a \iff x'y' = \frac{a}{kl}.$

En particulier toute hyperbole équilatère est apte à représenter par rapport à un repère *orthonormé* une relation $xy = b$ et admet donc pour axes de symétrie les bissectrices des axes.

Exercices. 1577. — Représenter $y = \frac{2}{x}$, OE = 2 cm, OF = 1 cm. Soit (G) le graphe obtenu. Signification de (G) si OE′ = 2 cm et OF′ = 2 cm.

1578. — Représenter $y = \frac{3}{x}$, OE = 2 cm, OF = 1 cm. Soit (G) le graphe obtenu. Préciser les coordonnées du point qui est le symétrique de $\left(x = x_0, \quad y = y_0 = \frac{3}{x_0}\right)$ par rapport à la première bissectrice.

1579. — Représenter $y = -\frac{1}{2x}$ OE = OF = 1 cm. Cette courbe pourrait-elle, en changeant d'axes orthonormés, représenter $y = -\frac{0,01}{2x}$?

Ensemble représentatif des systèmes suivants $x \in R$, $y \in R$ $\exists x$? $\exists y$?

1580. $\begin{cases} xy < 4 \\ xy > 2 \end{cases}$ **1581.** $\begin{cases} xy < 4 \\ xy > -1. \end{cases}$ **1582.** $\begin{cases} x^2y^2 < 1 \\ |x| + |y| < 4. \end{cases}$

Exercices.

III. APPLICATIONS DE LA FONCTION $y = \frac{a}{x}$

361. Application à l'équation du second degré. — L'étude de l'intersection d'une droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ et de l'hyperbole équilatère graphe de la fonction $y = \frac{a}{x}$ conduit à l'équation :

$$x \in \mathrm{R} - \{0\} \quad \exists x? \quad \frac{a}{x} = \alpha x + \beta$$

ou :

$$x \in \mathrm{R} - \{0\} \quad \exists x? \quad \alpha x^2 + \beta x - a = 0.$$

Comme pour la parabole nous obtiendrons donc, selon les valeurs de α et β, pour $\alpha \neq 0$:

1° des sécantes, qui coupent l'hyperbole en *deux* points,

2° des non-sécantes,

3° des droites qui ont en commun avec l'hyperbole un seul point, mais un point « comptant pour deux ». Nous verrons plus tard qu'il s'agit de tangentes. Pour $\alpha = 0$, on obtient une sécante à un seul point d'intersection. La restriction $x \neq 0$ est assurément vérifiée, puisque a est différent de zéro.

Ces résultats suggèrent une méthode graphique pour résoudre l'équation du second degré.

Soit l'équation :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Si $c = 0$, on résout aisément.

Supposons $c \neq 0$. Dans ce cas 0 n'est pas racine de (1) et l'on ne perd pas de solution en faisant le changement, régulier sur $\mathrm{R} - \{0\}$ de (1) en :

$$x \in \mathrm{R} \quad \exists x? \quad ax + b + \frac{c}{x} = 0. \tag{2}$$

L'équation (2) se résout graphiquement par l'intersection de l'hyperbole équilatère : $y = \frac{-c}{x}$, (3) et de la droite : $y = ax + b$. (4)

On pourra donc construire des abaques basés sur cette méthode.

362. Déterminer deux nombres ayant une somme et un produit donnés. L'étude du système :

$$x \in \mathrm{R} \quad y \in \mathrm{R} \quad \exists x? \exists y? \quad \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

déjà faite en algèbre (n° 141) peut être reprise à l'aide de graphes. Le système se traduit par l'intersection de l'hyperbole équilatère d'équation $xy = p$ et de la droite d'équation $x + y = s$. Utilisons un repère orthonormé qui mettra mieux à profit la symétrie du système par rapport à x et y.

La droite d'équation $x + y = s$ est parallèle à la seconde bissectrice, celle qui traverse les régions II et IV.

L'hyperbole d'équation $xy = p$ se trouve dans les régions II et IV pour $p < 0$, I et III pour $p > 0$.

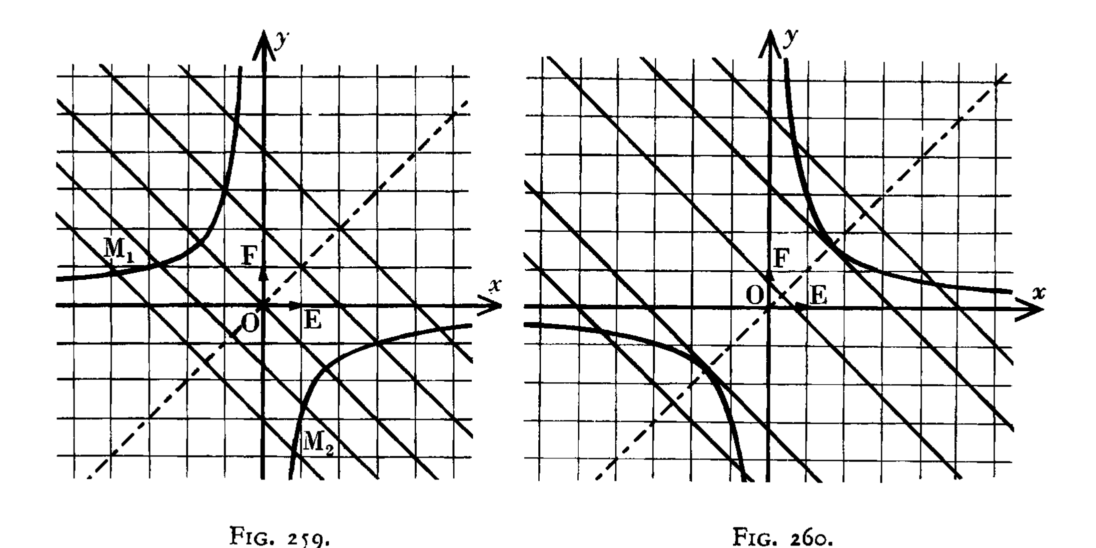


FIG. 259. FIG. 260.

On voit donc que, pour $p < 0$, la droite coupe toujours l'hyperbole en deux points, symétriques par rapport à la première bissectrice, et situés sur des arcs différents (*Fig. 259*).

$$M_1\ (x = \alpha,\quad y = \beta) \qquad M_2\ (x = \beta,\quad y = \alpha).$$

Le système admet deux solutions si l'on tient compte de l'ordre du couple (x, y), une solution si l'on adopte un point de vue différent. Pour $p > 0$, les droites parallèles à la seconde bissectrice se partagent en sécantes et non-sécantes, avec deux tangentes pour séparatrices (*Fig. 260.*)

Quand ils existent, les points d'intersection se trouvent sur le même arc.

Exercices. *Construire dans un repère orthonormé,* OE = OF = 2 *cm, le graphe de* $y = \frac{1}{x}$. *L'utiliser pour résoudre graphiquement les équations suivantes :*

$x \in \mathrm{R} \quad \exists\, x?$

1583. $2{,}1\,x^2 - 3{,}2\,x + 1 = 0$; $\quad 2{,}2\,x^2 - 3{,}4\,x + 1 = 0.$

1584. $2\,x^2 - 7\,x + 2 = 0$; $\quad 3\,x^2 - 7\,x + 2 = 0.$

1585. $x^2 - 3\,x + 0{,}83 = 0$; $\quad x^2 - 3\,x + 0{,}85 = 0.$

Étudier par le calcul et par les graphes les systèmes suivants :

$x \in \mathrm{R},\ y \in \mathrm{R} \quad \exists\, x?\ \exists\, y?$

1586. $\begin{cases} xy = 1 \\ mx + (m - 2)\,y = 2. \end{cases}$ **1587.** $\begin{cases} xy = 1 \\ y + 2\,x = m. \end{cases}$

1588. $\begin{cases} xy = 2 \\ mx - y - 2\,m + 1 = 0. \end{cases}$

PROBLÈMES

Étude des fonctions suivantes, et construction de leurs graphes :

1589. $y = \frac{E(x)}{x}$.

1590. $y = \text{Max}\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{x}\right)$.

1591. $y = E\left(\frac{1}{x}\right)$.

1592. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}$.

1593. $y = \left|\frac{1}{x} - 3\right|$.

1594. $y = \frac{1}{E(x)}$.

1595. $y = \text{Max}\left(\frac{8}{x}, x^2\right)$.

1596. $y = \text{Max}\left(\frac{2}{x}, -x + 6\right)$.

1597. — Résoudre graphiquement les inéquations : $-1 < \frac{1}{x} < 3$

$$-2 < -\frac{3}{x} < +5$$

1598. — Un cercle de centre O a 4 cm de rayon. Un point A est fixé à 2 cm de O. Une sécante mobile passe par A et coupe le cercle en B et C. On pose $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$.

1° Écrire la relation entre x et y.

2° Étudier et représenter graphiquement la variation de y quand B décrit de M à N, le demi-cercle limité par le diamètre MN qui passe par A (A entre O et M).

1599. — 1° Tracer le graphe de la fonction $y = -\frac{1}{2x}$ dans un repère orthonormé,

$$OE = OF = 2 \text{ cm}.$$

On obtient une courbe (H).

2° Une droite variable (D) d'équation $y = 2x + m$ est rapportée aux mêmes axes.

Discuter selon les valeurs de m l'existence et le nombre des points communs à (H) et à (D).

3° Quand (D) coupe (H) en deux points A′ et A″ on désigne par M le milieu de AA′. Calculer en fonction de m les coordonnées de M.

4° Étudier pour $m \in \mathfrak{R}$ l'ensemble des points M, et démontrer qu'il est porté par une droite et se compose de deux demi-droites.

5° La droite (D) coupe les axes de coordonnées en B_1 et B_2, quelles sont en fonction de m les coordonnées du milieu P de B_1B_2? Étudier pour $m \in \mathfrak{R}$ l'ensemble des points P. Le comparer à l'ensemble des points M.

6° Quand A′ et A″ existent, comparer $A'B_1$ et $A''B_2$, $A'B_2$ et $A''B_1$.

1600. — Si p désigne la pression d'un gaz, v son volume, t sa température, on a :

$$\frac{pv}{1 + \frac{t}{273}} = C, \text{ où C est une constante.}$$

1° En supposant que la masse gazeuse occupe à 0° un volume de 10 cm³, sous la pression de 1 kg/cm², déterminer C.

2° Construire les courbes représentatives de la pression $p = y$ en fonction du volume $v = x$ de cette masse gazeuse, aux températures $t = 50°$, $t = 100°$. (On fera varier v de 0,1 à 20 cm³.)

LIVRE VIII

TRIANGLES SEMBLABLES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

CHAPITRE XXV

SIMILITUDE

I. *Cas de similitude des triangles.*
II. *Relations métriques dans le triangle rectangle.*

I. CAS DE SIMILITUDE DES TRIANGLES

363. Définition.

☆ **On dit que deux triangles sont semblables pour exprimer que, étant appariés (n° 46), deux angles de l'un sont égaux respectivement aux angles homologues de l'autre.**

Si ABC et A'B'C' sont les deux triangles, les égalités $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ entraînent $\widehat{C} = \widehat{C'}$ puisque : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A'} + \widehat{B'} + \widehat{C'} = 2\text{ D}$.

Par suite, lorsque nous dirons que deux triangles sont semblables, cela voudra dire :

1° qu'ils sont appariés;

2° que les angles homologues sont égaux.

Les propriétés suivantes résultent immédiatement de la définition :

1. *Deux triangles semblables à un troisième sont semblables entre eux.*

2. *Un triangle peut être considéré comme semblable à lui-même, et à tout triangle égal.*

3. *Si le triangle* ABC *est semblable au triangle* A'B'C', *inversement* A'B'C' *est semblable à* ABC.

364. Théorème fondamental. — Soit ABC et A'B'C' deux triangles semblables ($\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$). Sur la demi-droite d'origine A contenant B marquons D tel que AD = A'B', et sur la demi-droite d'origine A contenant C marquons E tel que AE = A'C' (*Fig. 261*).

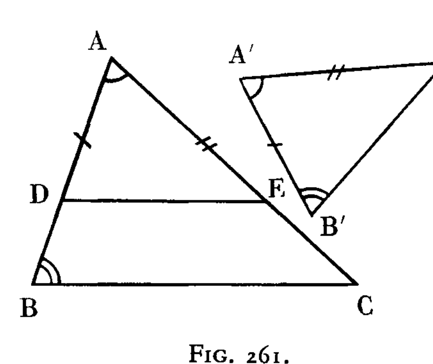


FIG. 261.

Les deux triangles ADE et A′B′C′ sont égaux (2ᵉ Cas); donc :

$$1^\circ\ \widehat{ADE} = \widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$
$$2^\circ\ DE = B'C'.$$

Il résulte du 1° que les droites DE et BC sont parallèles.

La double application du théorème de Thalès au triangle ABC donne :

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}, \text{ ou } \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

▪ THÉORÈME. — **Si deux triangles sont semblables leurs côtés homologues sont proportionnels.**

365. Réciproques du théorème fondamental. — Dans le théorème ci-dessus les **deux** égalités $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\hat{B} = \hat{B}'$ entraînent les **trois** égalités :

$$\hat{C} = \hat{C}' \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

On peut donc se demander si deux de ces cinq égalités entraînent les trois autres. D'où les problèmes suivants.

1. ÉTUDE DES DEUX TRIANGLES ABC ET A′B′C′ TELS QUE $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (*Fig. 262*).

Sur la demi-droite d'origine A contenant B marquons D tel que AD = A′B′, et sur la demi-droite d'origine A contenant C le point E tel que AE = A′C′.

On a par hypothèse : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, et par suite de la réciproque du théorème de Thalès, les droites DE et BC sont parallèles.

Les deux triangles ABC et ADE alors ont $\hat{A}$ commun et $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$; ils sont semblables par définition et, en vertu du théorème fondamental, on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

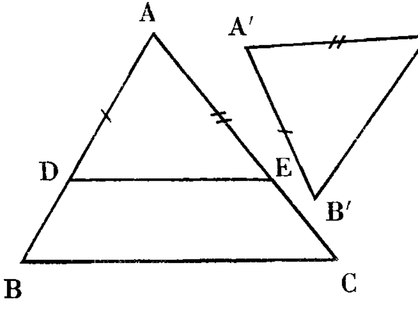


FIG. 262.

En comparant avec l'hypothèse :

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, on a : B′C′ = DE.

Les deux triangles A′B′C′ et ADE sont donc égaux (3ᵉ Cas). Le triangle A′B′C′, égal au triangle ADE semblable à ABC, est lui-même semblable à ABC.

▪ THÉORÈME. — **Si deux triangles appariés sont tels que leurs côtés homologues sont proportionnels, ils sont semblables.**

2. Étude de deux triangles ABC et A′B′C′ tels que : $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (*Fig. 263*).

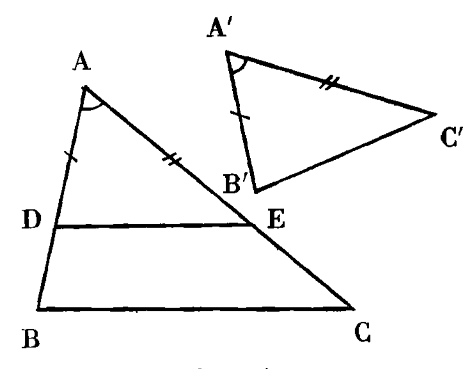


Fig. 263.

Marquons sur la demi-droite d'origine A contenant B le point D tel que AD = A′B′ et sur la demi-droite d'origine A contenant C le point E tel que : AE = A′C′.

On a, par hypothèse : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, donc : DE est parallèle à BC, et :

$$\widehat{ADE} = \hat{B}.$$

Les deux triangles ABC et ADE sont semblables.

Comme, par construction, A′B′C′ et ADE sont égaux (2e Cas), il en résulte que ABC et A′B′C′ sont semblables.



- **THÉORÈME. — Si deux triangles appariés sont tels que un angle de l'un est égal à son homologue et que le rapport des deux côtés de cet angle est égal au rapport des côtés homologues, ces deux triangles sont semblables.**

3. Étude de deux triangles ABC et A′B′C′ tels que : $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

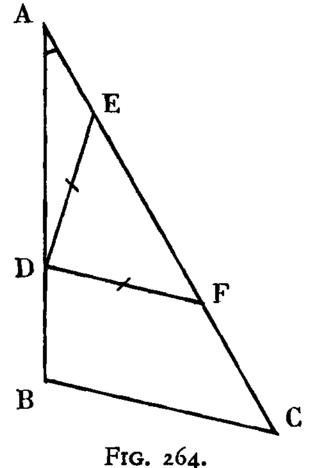


Fig. 264.

Marquons sur la demi-droite d'origine A contenant B le point D tel que AD = A′B′ et sur la demi-droite d'origine A contenant C le point E tel que AE = A′C′. Les triangles A′B′C′ et ADE sont égaux (2e cas), mais l'égalité $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ ne permet pas d'affirmer le parallélisme de DE et BC, et par suite on ne peut pas conclure.

Exemple. Soit ABC dans lequel $\hat{A} = 30°$, AB = 9 cm, BC = 6 cm. Soit D entre A et B tel que AD = 6 cm, la parallèle tracée de D à BC coupe AC en F. Le cercle de centre D et de rayon DF coupe AC en E (*Fig. 264*).

On a : $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC}$ soit $\frac{6}{9} = \frac{DF}{6}$, DF = 4, donc DE = 4 cm.

On a : $$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3} = \frac{DE}{BC}.$$

Les deux triangles ADE et ABC ne sont pas semblables.

366. Cas de similitude des triangles. — Traditionnellement, la définition est le premier cas de similitude, la réciproque 2 est le deuxième cas et la réciproque 1 est le troisième cas. Ils sont résumés par les tableaux suivants :

	Hypothèses		Conclusions
PREMIER CAS DE SIMILITUDE :	$\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$	$\Longrightarrow$	$\widehat{C} = \widehat{C'}$ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$
DEUXIÈME CAS DE SIMILITUDE :	$\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$	$\Longrightarrow$	$\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$
TROISIÈME CAS DE SIMILITUDE :	$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$	$\Longrightarrow$	$\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$

367. Remarque. — Reprenons le théorème fondamental, où par hypothèse les triangles ABC et A′B′C′ sont semblables. On a construit le triangle ADE égal au triangle A′B′C′.

Dans l'homothétie positive de centre A et de rapport $\dfrac{AD}{AB}$, l'homothétique du triangle ABC est le triangle ADE. On peut donc énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Si deux triangles sont semblables l'un est égal à un homothétique de l'autre**

Inversement, deux triangles homothétiques sont semblables, puisque leurs angles homologues dans l'homothétie sont égaux.

Notons enfin que si deux triangles ABC et A′B′C′ sont semblables, le rapport de deux côtés homologues est appelé **rapport de similitude.**

368. Cas particuliers.

1. Chaque angle d'un triangle équilatéral ayant pour mesure 60°, *deux triangles équilatéraux* peuvent être considérés comme semblables, sans qu'il soit nécessaire de préciser l'appariement. Le rapport de similitude est le rapport des longueurs des côtés de ces deux triangles.

2. Soit *deux triangles isocèles* ABC et A′B′C′, les angles principaux étant $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$. On a : $\widehat{B} = \widehat{C}$; $\widehat{B'} = \widehat{C'}$; $\widehat{A} + 2\widehat{B} = 2\,\text{D}$; $\widehat{A'} + 2\widehat{B'} = 2\,\text{D}$.

$\widehat{A} = \widehat{A'} \iff \widehat{B} = \widehat{B'}$, les deux triangles sont semblables dans les deux cas.

Puisque AB = AC et A′B′ = A′C′, l'égalité $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$ implique la similitude des deux triangles isocèles par le 3e cas de similitude.

3. *Triangle rectangle.* Soit ABC et A′B′C′ deux triangles rectangles en A et A′. Si ces deux triangles sont tels qu'un angle aigu de l'un est égal à un angle aigu de l'autre, ils sont semblables (premier cas de similitude).

Soit deux triangles rectangles tels que : $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$. Soit sur la demi-droite d'origine A contenant B, (*Fig. 265*) D tel que $AD = A'B'$; traçons de D la parallèle à BC qui coupe AC en E. La double application du théorème de Thalès au triangle ABC donne : $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$, donc :

$DE = B'C'$, et puisque $AD = A'B'$ les triangles rectangles ADE et A'B'C' sont égaux. On a donc : $\widehat{ADE} = \widehat{A'B'C'}$. Or $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ par suite du parallélisme de DE et BC.

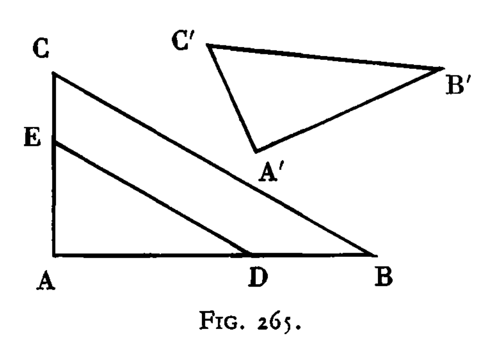


FIG. 265.

On a donc : $\hat{B} = \hat{B}'$, ce qui entraîne la similitude de ABC et A'B'C'.

▪ THÉORÈME. — **Si deux triangles rectangles sont tels que le rapport de l'hypoténuse à un côté de l'angle droit est le même pour les deux triangles, ils sont semblables.**

369. Triangles ayant les côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires. — On sait (**nº 63**) que les angles de ces deux triangles sont égaux ou supplémentaires. Soit ABC et A'B'C' ces deux triangles.

On ne peut pas avoir :

1º $\hat{A}' = 2\,\text{D} - \hat{A}$, $\hat{B}' = 2\,\text{D} - \hat{B}$, $\hat{C}' = 2\,\text{D} - \hat{C}$, car on aurait par addition :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 6\,\text{D}; \quad \text{impossible.}$$

2º $\hat{A}' = 2\,\text{D} - \hat{A}$, $\hat{B}' = 2\,\text{D} - \hat{B}$, $\hat{C}' = \hat{C}$, car on aurait :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 4\,\text{D} + 2\,\hat{C} > 4\,\text{D}, \quad \text{impossible.}$$

On a donc nécessairement deux couples d'angles égaux et les deux triangles sont semblables.

▪ THÉORÈME. — **Deux triangles qui ont leurs côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires sont semblables.**

370. Une relation dans le triangle quelconque. — Soit un triangle ABC, (Γ) son cercle circonscrit, A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit; H le pied de la hauteur issue de A.

Le triangle AA'C est rectangle en C. Suivant les cas de figure on a :

1º A' et B d'un même côté de AC (*Fig. 266*). $\widehat{AA'C} = \widehat{ABC}$ inscrits dans le même arc, donc : $\widehat{AA'C} = \widehat{ABH}$.

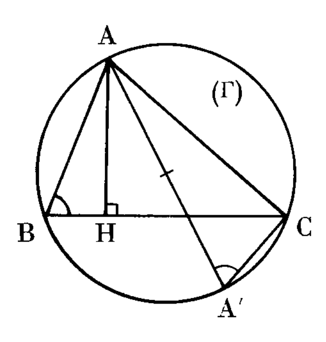



FIG. 266.

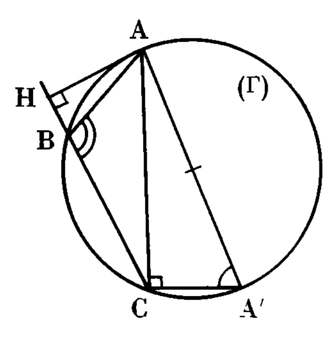


FIG. 267.

2° A′ et B de part et d'autre de AC (*Fig. 267*).

$$\widehat{AA'C} = 2\,\text{D} - \widehat{ABC} = \widehat{ABH}.$$

Dans les deux cas, les deux triangles rectangles ACA′ et AHB sont semblables. On peut écrire :

$$\frac{AC}{AH} = \frac{AA'}{AB}. \qquad \text{ou :} \qquad AC \times AB = AA' \times AH, \qquad \text{et :}$$

▪ THÉORÈME. — **Dans un triangle quelconque, le produit de deux côtés est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur correspondant au troisième côté.**

Exercices. 1601. — Dans deux triangles semblables, on peut appeler bissectrices, hauteurs, médianes homologues, celles de ces lignes qui sont issues de sommets homologues. Démontrer que le rapport des bissectrices ou des médianes ou des hauteurs homologues de deux triangles semblables est égal au rapport de similitude. Évaluer le rapport des périmètres.

1602. — Soit un triangle ABC et la médiane AA′. On trace une parallèle à la médiane AA′ qui coupe BC en M entre B et C, AC en N et AB en P.

1° Démontrer que l'on a : $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AN}$,

2° Établir la relation : $MN + MP = 2\,AA'$.

1603. — Étant donné un triangle ABC, on porte sur la bissectrice intérieure de l'angle A un segment AM tel que l'on ait : $AM^2 = AB.AC$.
1° Démontrer que les deux triangles AMC et ABM sont semblables.
2° Quelle est la tangente en M au cercle circonscrit au triangle AMB?

1604. — Deux cercles se coupent en A et B. On trace les tangentes en B à ces deux cercles, elles recoupent les cercles respectivement en M et en M′.
1° Démontrer que les triangles ABM et AM′B sont semblables.
2° En déduire que AB est bissectrice de l'angle MAM′ et que l'on a :

$$AB^2 = AM.AM'.$$

1605. — Démontrer que la droite qui joint les milieux des bases d'un trapèze passe par le point commun aux diagonales. **Exercices.**

II. RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

371. Relations fondamentales dans le triangle rectangle. — Soit un triangle ABC rectangle en A et AH la hauteur issue de A. Remarquons que les triangles rectangles ABH et ACH donnent :

$$BH < AB \quad \text{et} \quad CH < AC.$$

Comme l'hypoténuse BC est le plus grand côté BH < BC et CH < BC, donc **le point H est entre B et C** (*Fig. 268*).

Les deux triangles rectangles ABC et HBA ont l'angle $\hat{B}$ commun, ils sont semblables. De même les triangles ABC et HAC sont semblables. Les trois triangles sont semblables. Leurs éléments homologues sont mis en évidence par le schéma et les groupes de relations suivantes, en associant deux à deux ces trois triangles.

A B C.
H B A.
H A C.

$$(1) \quad \frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA}.$$

$$(2) \quad \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC}.$$

$$(3) \quad \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{BA}{AC}.$$

FIG. 268.

En associant dans chaque ligne deux rapports égaux, nous obtenons neuf relations, qui ne sont pas toutes distinctes. Nous en retiendrons les relations classiques suivantes.

1. De (1) et (2) on déduit : $AB^2 = HB \times BC$, et : $AC^2 = HC \times BC$. Puisque H est entre B et C, nous écrivons sous forme algébrique :

$$BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}.$$
$$CA^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}.$$

Nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — **Chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moyenne géométrique entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse.**

2. De (3) on déduit $HA^2 = HB \times HC$, ou sous forme algébrique, les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ étant de sens contraires :

$$HA^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}.$$

▪ THÉORÈME. — **Dans un triangle rectangle, la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne géométrique entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.**

3. De (2) on déduit : $AB \times AC = AH \times BC$ et nous énoncerons :

▪ THÉORÈME. — **Dans un triangle rectangle, le produit des deux côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur correspondante.**

372. Étude des réciproques. — Nous étudions un triangle ABC, dans lequel H est le pied de la hauteur issue de A.

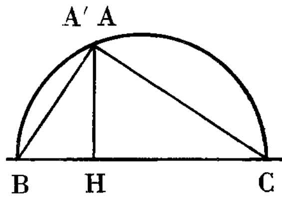


FIG. 269.

1. *Soit* ABC *dans lequel :* $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.

Il résulte de la relation que $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même sens. L'ordre des points B, C, H donnerait :

$$BA > BH > BC \implies BA^2 > BH \times BC,$$

ce qui est impossible.

H est donc entre B et C (*Fig. 269*).

Soit A′ le point d'intersection avec la droite HA du demi-cercle de diamètre BC dans le demi-plan d'arête BC, contenant A. Dans le triangle BA′C, rectangle en A′ on a : $BA'^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.

Donc : $$BA' = BA \implies HA' = HA.$$

Les points A et A′ étant confondus, le triangle ABC est rectangle.

■ THÉORÈME. — **Tout triangle tel que $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$ est un triangle rectangle en A.**

2. *Soit* ABC *dans lequel :* $HA^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont de sens contraires, donc H est entre B et C.

Soit A′ le point d'intersection avec droite HA du demi-cercle de diamètre BC, dans le demi-plan d'arête BC contenant A. Dans le triangle BA′C, rectangle en A′ on a : $HA'^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Donc $$HA = HA'.$$

Les points A et A′ étant confondus, le triangle ABC est rectangle.

■ THÉORÈME. — **Tout triangle tel que $HA^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$ est un triangle rectangle en A.**

3. *Soit* ABC *dans lequel :* $AH \times BC = AB \times AC$.

Nous avons vu n° **370** que dans tout triangle :

$AH \times AA' = AB \times AC$, où AA′ est le diamètre du cercle circonscrit.

On a : $$AA' = BC.$$

BC est donc un diamètre du cercle circonscrit et l'angle A du triangle ABC est droit.

■ THÉORÈME. — **Tout triangle tel que $AH \times BC = AB \times AC$ est un triangle rectangle en A.**

Les trois relations fondamentales caractérisent le triangle rectangle. Il est nécessaire pour cela d'orienter les deux premières relations. (Ex. n° 1612).

373. Conséquences des relations fondamentales.

1. Théorème de Pythagore[1]. — Reprenons les deux relations :

$$BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}.$$

$$CA^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}.$$

Par addition : $BA^2 + CA^2 = \overline{BC}(\overline{BH} - \overline{CH}) = \overline{BC} \times \overline{BC} = BC^2.$

- THÉORÈME. — **Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.**

Réciproque. Soit un ABC dans lequel : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Soit un angle droit xOy. Prenons sur Ox, le point D et sur Oy le point E, tels que : $OD = AB$ et $OE = AC$.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ODE donne :

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Donc : $DE = BC.$

Les deux triangles ODE et ABC sont égaux (3e cas), donc $\widehat{BAC} = 1$ D.

- THÉORÈME. — **Tout triangle ABC dans lequel :**
$AB^2 + AC^2 = BC^2$, est rectangle en A.

Il en résulte :

- **La relation de Pythagore caractérise le triangle rectangle.**

2. Reprenons sous forme arithmétique : $\begin{cases} AB^2 = HB \times BC. \\ AC^2 = HC \times BC. \end{cases}$

Il en résulte : $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{HB}{HC}.$

- THÉORÈME. — **Dans un triangle rectangle, le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport de leurs projections sur l'hypoténuse.**

Ce théorème permet dans certains problèmes de construction de remplacer un rapport de carrés de longueurs, par un rapport de segments.

3. Reprenons la relation : $AB \times AC = AH \times BC.$

1. Pythagore, mathématicien et philosophe grec (VIe s. av. J.-C.).

En élevant au carré et utilisant le théorème de Pythagore, il vient :

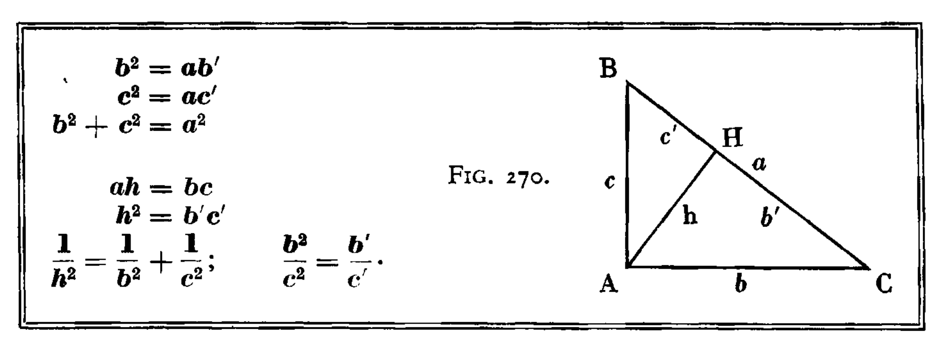
$$AB^2 \times AC^2 = AH^2 (AB^2 + AC^2)$$

qui s'écrit, par division par $AB^2 \times AC^2 \times AH^2$: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

- THÉORÈME. — **Dans un triangle rectangle, l'inverse du carré de la hauteur est la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit.**

374. Résumé. — Le tableau suivant donne en posant (*Fig. 270*) :

$$BC = a, \quad AB = c, \quad AC = b.$$
$$AH = h, \quad HB = c', \quad HC = b'.$$



$$b^2 = ab'$$
$$c^2 = ac'$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$ah = bc$$
$$h^2 = b'c'$$
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}; \qquad \frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}.$$

FIG. 270.

Ne pas oublier que $a = b' + c'$.

375. Problème. — *Calculer les longueurs* a, b, c, b', c', h *connaissant deux de ces longueurs*. Voici quelques exemples :

1° **On donne b' et c'.** On a : $a = b' + c'$, puis c et b par $b^2 = ab'$ et $c^2 = ac'$. Enfin $h = \sqrt{b'c'}$, ou $h = \dfrac{bc}{a}$.

2° **On donne b et a ($a > b$).** On a : $b' = \dfrac{b^2}{a}$ puis $c' = a - b'$, et on est ramené au cas précédent.

3° **On donne h et b'.** On a $c' = \dfrac{h^2}{b'}$ et on est ramené au cas 1.

376. Applications.

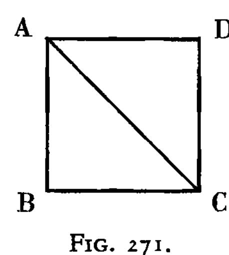


FIG. 271.

1. DIAGONALE DU CARRÉ. — **Soit un carré de diagonale AC (*Fig. 271*), le théorème de Pythagore appliqué au triangle** rectangle isocèle ABC donne :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2\,AB^2 \quad \text{ou :} \quad AC = AB\sqrt{2}.$$

- THÉORÈME. — **Dans un carré, le rapport de la diagonale au côté est $\sqrt{2}$.**

2. Triangle équilatéral. Soit un triangle équilatéral ABC (*Fig. 272*), AH la hauteur, le point H est le milieu de BC et $BH = \frac{AB}{2}$.

Dans le triangle rectangle ABH, on a :

$$AB^2 = BH^2 + HA^2 = \frac{AB^2}{4} + HA^2.$$

$$HA^2 = \frac{3}{4} AB^2; \qquad HA = \frac{\sqrt{3}}{2} AB.$$

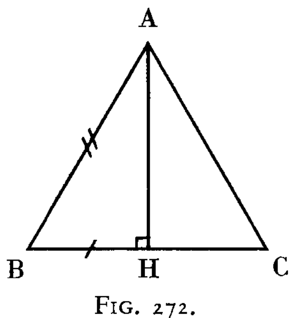
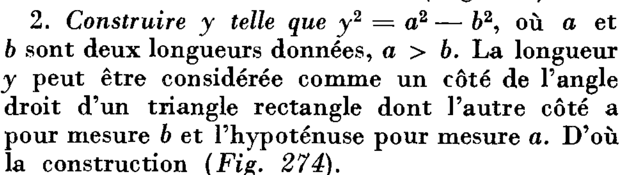


Fig. 272.

▪ THÉORÈME. — **Dans un triangle équilatéral, le rapport de la hauteur au côté est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.**

377. Applications à des constructions géométriques de longueurs. — Nous donnerons quelques exemples.



1. *Deux longueurs* a *et* b *étant données, construire* x *telle que :* $x^2 = a^2 + b^2$.

La longueur x peut être considérée comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives a et b. La construction est évidente (*Fig. 273*).

Fig. 273.

2. *Construire y telle que $y^2 = a^2 - b^2$*, où a et b sont deux longueurs données, $a > b$. La longueur y peut être considérée comme un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté a pour mesure b et l'hypoténuse pour mesure a. D'où la construction (*Fig. 274*).

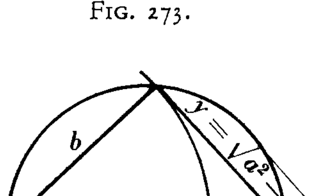
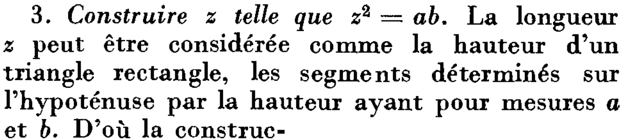


Fig. 274.



3. *Construire z telle que $z^2 = ab$.* La longueur z peut être considérée comme la hauteur d'un triangle rectangle, les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur ayant pour mesures a et b. D'où la construction indiquée par la *figure 275*.

On peut aussi bien considérer z comme un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse a pour longueur a et la projection d'un côté sur l'hypoténuse b, ce qui exige $a > b$ (*Fig. 276*).

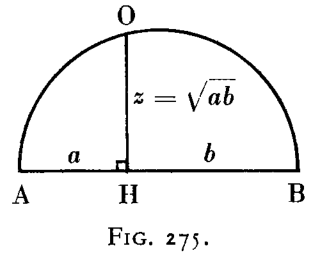


Fig. 275.

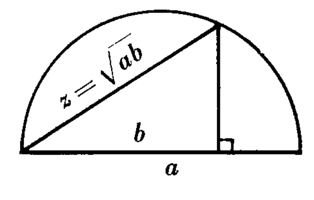


Fig. 276.

Remarque. — La première des constructions du 3° met en évidence la somme AB des deux segments a et b, et leur moyenne géométrique HO. Inversement on peut construire deux segments a et b connaissant leur somme l et leur moyenne géométrique z.

On trace un segment AB de longueur l, on trace un demi-cercle de diamètre AB et dans le demi-plan d'arête AB contenant ce demi-cercle la parallèle (Δ) à AB à distance z de AB.

Si (Δ) coupe le demi-cercle en deux points O et O', soit H le pied de la perpendiculaire de O sur AB. On a : $HA = a$, $HB = b$. On a par symétrie la même solution avec le point O'.

Si la parallèle (Δ) est tangente au demi-cercle en C, on a : $a = b = \frac{l}{2}$.

Si (Δ) ne coupe pas le demi-cercle, le problème est impossible.
Nous pouvons énoncer le résultat de la discussion :

- **La plus grande valeur du produit de deux nombres positifs dont la somme est constante, est atteinte quand ces deux nombres sont égaux.**

Exercices. *Dans les exercices suivants nos* **1606** *à* **1610**, ABC *désigne un triangle rectangle en* A, $AH = h$ *est la hauteur issue de* A. *On pose* $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$; $BH = c'$; $CH = b'$.

1606. — On donne b et c.
1° Calculer a, h, b', c'.
2° Calculer le rayon r du cercle inscrit. Application : $b = 15$, $c = 8$.

1607. — On donne c et h. Calculer : c', b', a et b.
Application : $c = 5$; $h = 3$.

1608. — On donne a et b. Calculer : c, h, b' et c'.
Application : $a = 13$; $b = 5$.

1609. — On donne a et b'. Calculer : c', c, b, h.
Application : $a = 9$; $b' = 4$.

1610. — On donne b' et c'. Calculer : a, h, b, c.
Application : $b' = 21$; $c' = 84$.

1611. — 1° Dans un triangle isocèle ABC on donne $AB = AC = a$ et $BC = b$. Calculer la hauteur AH. Application : $a = 15$; $b = 18$.
2° Dans un triangle isocèle ABC on donne $BC = b$ et la hauteur $AH = h$. Calculer les côtés égaux AB et AC. Application : $b = 6$; $h = 8$.

1612. — 1° Soit un triangle ABC dans lequel on a : $\widehat{B} = \widehat{C} + 90°$.
On trace la hauteur AH. Comparer les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{HAC}$.
2° Démontrer la relation : $HA^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$. La réciproque est-elle vraie?
3° Quelle est la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC? En déduire les relations :
$$AC^2 + AB^2 = 4\,R^2; \quad AB^2 + BC^2 + AC^2 + 4\,AH^2 = 8\,R^2.$$
R étant le rayon du cercle circonscrit.

1613. — Le segment a étant donné, construire x tel que :
1° $x = a\sqrt{5}$; $x = a\sqrt{24}$;
2° $x = a(1 + \sqrt{2})$; $x = a(1 + \sqrt{5})$.

1614. — Construire la longueur x donnée par la formule : $x = \frac{a^2b}{c^2}$ connaissant les segments de longueur a, b, c.

1615. — Construire deux segments connaissant leur somme $a = 5$ cm et le rapport $\alpha = 3$ de leurs carrés.

1616. — Soit l'équation : $x \in \mathbb{R} \quad \exists\, x? \quad x^2 - 2\,lx + m^2 = 0$
où l et m sont des longueurs données. Écrire la condition d'existence des racines de l'équation. Cette condition étant satisfaite, construire géométriquement les deux racines.

Exercices.

PROBLÈMES

1617. — Deux cordes rectangulaires AB et CD d'un cercle de rayon R se coupent en I.

1° On trace la corde BB′ parallèle à CD. Que peut-on dire de A et de B′ relativement au centre O du cercle? Comparer DB et CB′.

2° Démontrer que l'on a : $AC^2 + DB^2 = 4R^2$.

Calculer la somme $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$.

1618. — On considère un triangle ABC rectangle en A et l'on trace en un point H du segment BC la perpendiculaire à BC qui coupe AB et AC en I et J.

1° Établir la relation : HB.HC = HI.HJ.

2° En déduire l'ensemble des points M de la droite HIJ tel que l'on ait :

$$HM^2 = \overline{HI} \cdot \overline{HJ}$$

lorsque H décrit le segment BC.

1619. — Construire un triangle isocèle ABC (AB = AC) connaissant les angles et la somme de la base BC et de la hauteur AH ($BC + AH = l$).

1620. — On veut mesurer la hauteur d'un arbre AB vertical. On utilise deux jalons verticaux MN et PQ dont les bases M et P sont alignées avec le pied A de l'arbre et les sommets N et Q avec le sommet B de l'arbre. On mesure les hauteurs MN = 1,2 m et PQ = 1,8 m; les distances AM = 29 m et AP = 27,5 m. Calculer la hauteur de l'arbre AB.

1621. — On considère un triangle isocèle ABC (CA = CB) et l'on trace par C une droite quelconque qui coupe AB (ou ses prolongements) en M et le cercle circonscrit en K.

1° Démontrer que les triangles CKA et CAM sont semblables.

2° En déduire la relation : $CB^2 = \overline{CK} \times \overline{CM}$.

3° Utiliser le résultat pour traiter le problème suivant :

On donne un cercle fixe et deux points fixes B et C sur ce cercle. Un point K variable décrit le cercle. Trouver l'ensemble des points M de CK définis par :

$$\overline{CK} \times \overline{CM} = CB^2.$$

1622. — Soit un triangle ABC et O le centre du cercle inscrit. On joint OA, OB et OC. Par le point O, on trace la perpendiculaire à CO qui coupe AC en D et BC en E.

1° Démontrer que les triangles AOB, ADO, OEB sont semblables.

2° En conclure les relations :

$$OD^2 = AD \times EB;$$

$$\frac{OA^2}{OB^2} = \frac{AD}{EB}.$$

1623. — On considère un carré ABCD de côtés $AB = BC = CD = AD = a$. Sur BC comme diamètre, on décrit un cercle de centre O. On cherche à construire un cercle de centre O′ tangent extérieurement au cercle (O) et tangent en D à AD.

1° On prolonge CD d'un segment $DE = \frac{a}{2}$.

Comparer OO′ et O′E. En déduire la construction de O′.

2° On pose : $O'D = x$. Calculer OO′ et O′E. En déduire la valeur de x.

1624. — Construire un triangle connaissant :

1° les angles et une médiane (on commencera par construire un triangle semblable au triangle cherché);

2° les angles et une hauteur;

3° les angles et une bissectrice.

1625. — Inscrire un carré dans un triangle ABC de façon qu'un côté soit porté par BC.

1626. — Par un point M extérieur à un cercle on trace la sécante MCB et la tangente MA.

1° Démontrer que les triangles MAB et MCA sont semblables.

2° En déduire les relations :

$$MA^2 = MB \times MC; \qquad \frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

3° Évaluer le rapport $\frac{MA}{BC}$ sachant que $\frac{MB}{MC} = 2$.

1627. — On considère un triangle ABC et les milieux A′ de BC, C′ de AB et B′ de CA. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, H l'orthocentre et G le centre de gravité.

1° Démontrer que les triangles OB′C′ et HBC sont semblables. Quel est le rapport de similitude? En déduire 2 OB′ = BH.

2° La droite OH coupe BB′ en K. Évaluer le rapport $\frac{KB}{KB'}$. En déduire la disposition remarquable des points O, G, H.

CHAPITRE XXVI

RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

I. RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

378. Définitions. — Soit un demi-cercle (C), de centre O, de diamètre AB, dont le rayon est l'unité de longueur. Désignons par OC le rayon perpendiculaire à AB. Soit $x'Ox$ l'axe défini par le vecteur unitaire $\overrightarrow{OA}$, $y'Oy$ l'axe défini par le vecteur unitaire $\overrightarrow{OC}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé constitué par les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (*Fig. 277*).

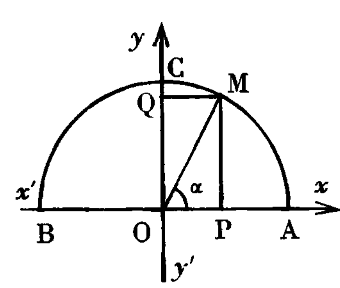


FIG. 277.

A tout point M du demi-cercle, correspond l'angle $\widehat{AOM}$ compris entre 0 et 2 D.

Réciproquement, à tout angle saillant de mesure α on peut faire correspondre un point M du demi-cercle tel que $\widehat{AOM} = \alpha$.

Les coordonnées du point M dans le système d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ se trouvent ainsi rattachées à l'angle $\widehat{AOM} = \alpha$.

☆ DÉFINITIONS. — 1° **L'abscisse du point M est le cosinus de l'angle α, qui s'écrit cos α et se lit cosinus α.**

2° **L'ordonnée du point M est le sinus de l'angle α, qui s'écrit sin α et se lit sinus α.**

3° **Le rapport $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, lorsqu'il est défini, est la tangente de l'angle α :**

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. **On lit tangente α.**

4° **Le rapport $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, lorsqu'il est défini, est la cotangente de l'angle α :**

$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. **On lit cotangente α.**

5° **Sin α, cos α, tg α et cotg α sont les rapports trigonométriques de l'angle α.**

Si P et Q sont les projections **orthogonales respectives de M sur les** axes $x'Ox$ et $y'Oy$, **on a** : $\overline{OP} = \cos\alpha$; $\overline{OQ} = \sin\alpha$.

Comme : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \cos\alpha \times \overrightarrow{OA} + \sin\alpha \times \overrightarrow{OC}.$$

379. Propriétés du cosinus. — Cos α, défini pour tout angle saillant, est l'abscisse du point P du segment AB. On a donc :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D},\ \ \forall\alpha \implies -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Réciproquement, si P est un point quelconque du segment AB, il est la projection orthogonale sur AB, d'un point M, et d'un seul, du demi-cercle (C); par suite :

$$-1 \leqslant a \leqslant 1,\ \ \forall a \implies \exists\,\alpha$$

tel que : $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D}$ et $a = \cos\alpha$.

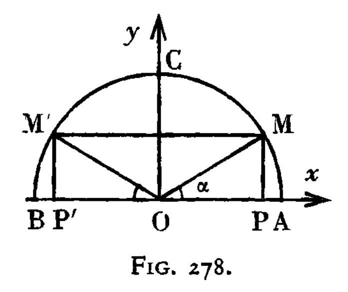


FIG. 278.

Il en résulte immédiatement :

$$0 \leqslant \alpha < 1\,\text{D} \iff \cos\alpha > 0.$$
$$1\,\text{D} < \alpha \leqslant 2\,\text{D} \iff \cos\alpha < 0.$$
$$\alpha = 0 \iff \cos\alpha = 1.$$
$$\alpha = 1\,\text{D} \iff \cos\alpha = 0.$$
$$\alpha = 2\,\text{D} \iff \cos\alpha = -1.$$

1° Considérons deux points M et M′ du demi-cercle (C), symétriques par rapport à Oy. On a (*Fig. 278*) :

$$\widehat{AOM} = \widehat{BOM'},$$

donc si : $\widehat{AOM} = \alpha$, $\widehat{AOM'} = 2\,\text{D} - \alpha$.

Les projections P et P′ de M et M′ sur $x'Ox$ sont symétriques par rapport à O et :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D},\ \ \forall\alpha \implies \cos(2\,\text{D} - \alpha) = -\cos\alpha.$$

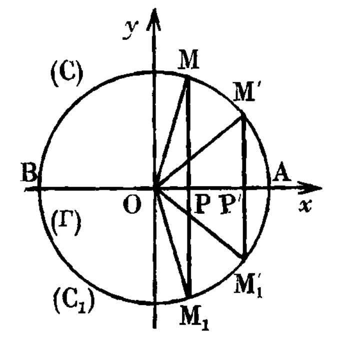


FIG. 279.

2° Soit α et α' les mesures de deux angles aigus et $\alpha > \alpha'$. Désignons par M et M′ les points correspondants sur (C) (*Fig. 279*).
Soit M_1 et M'_1 leurs symétriques respectifs par rapport à Ox. Ils sont situés sur le demi-cercle (C_1), qui, réuni à (C), constitue le cercle (Γ).
On a : $\widehat{M_1OM} = 2\alpha$ et $\widehat{M'OM'_1} = 2\alpha'$. Dans les triangles M_1OM et M'_1OM' on a (n° 55) : $M_1M > M'_1M'$. D'après le n° 77 on en déduit :

$$OP < OP' \iff \cos\alpha < \cos\alpha'.$$

Si $\alpha > 1\,\text{D}$ et $\alpha' < 1\,\text{D}$, on a évidemment : $\cos\alpha < \cos\alpha'$, puisque $\cos\alpha < 0$ et $\cos\alpha' > 0$

Si $\alpha > 1\,\text{D}$ et $\alpha' > 1\,\text{D}$, avec $\alpha > \alpha'$, on a : $1\,\text{D} > 2\,\text{D} - \alpha' > 2\,\text{D} - \alpha$, et : $\cos(2\,\text{D} - \alpha) > \cos(2\,\text{D} - \alpha')$ et $-\cos\alpha > -\cos\alpha'$, donc $\cos\alpha < \cos\alpha'$

Ainsi dans tous les cas :

$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D}$ $0 \leqslant \alpha' \leqslant 2\,\text{D}$	$\forall \alpha,\ \forall \alpha'$; $\alpha' > \alpha \iff \cos\alpha' < \cos\alpha$.

Cos α est une fonction de l'angle α, définie pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D}$, décroissante dans cet intervalle.

380. Propriétés du sinus. — Sin α, défini pour tout angle saillant, est l'abscisse du point Q du segment OC. On a donc :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D} \quad \forall \alpha \implies 0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1.$$

Réciproquement, si Q est un point du segment OC, il est la projection orthogonale sur OC de deux points M et M' du demi-cercle (C), symétriques par rapport à Oy (*Fig. 280*).

Si $\widehat{AOM} = \alpha$, on a $\widehat{AOM'} = 2\,\text{D} - \alpha$ et par suite :

$$0 \leqslant a \leqslant 1 \quad \forall a \implies 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\,\text{D} \quad \exists \alpha \text{ tel que : } \begin{array}{l} a = \sin\alpha \\ a = \sin(2\,\text{D} - \alpha). \end{array}$$

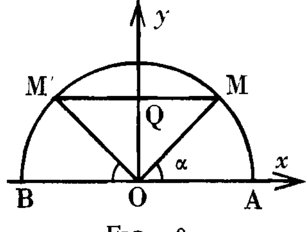


FIG. 280.

Il en résulte : $\left.\begin{array}{l}\alpha = 0 \\ \alpha = 2\,\text{D}\end{array}\right\} \iff \sin\alpha = 0.$

$\alpha = 1\,\text{D} \iff \sin\alpha = 1.$

$$0 < \alpha < 2\,\text{D}, \quad \forall \alpha \quad \sin\alpha > 0.$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D}, \quad \forall \alpha \quad \sin(2\,\text{D} - \alpha) = \sin\alpha.$$

En raisonnant comme pour le cosinus, on a :

$0 \leqslant \alpha \leqslant 1\,\text{D}$ $0 \leqslant \alpha' \leqslant 1\,\text{D}$	$\forall \alpha, \forall \alpha'$ $\alpha' < \alpha \iff \sin\alpha' < \sin\alpha$.

En utilisant la symétrie par rapport à Oy, on en conclut :

Sin α est une fonction de α, définie pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\,\text{D}$, croissante pour $0 \leqslant \alpha < 1\,\text{D}$, décroissante pour $1\,\text{D} < \alpha \leqslant 2\,\text{D}$.

381. Propriétés de la tangente. — Puisque $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, tg α n'existe que si $\cos\alpha \neq 0$, donc $\alpha \neq 1\,\text{D}$. D'autre part tg α a le signe de cos α.

Si α est aigu, sin α croît, cos α décroît, donc tg α croît.

Si α est obtus, sin α décroît ($\sin\alpha > 0$), cos α, négatif, décroît, donc $|\cos\alpha|$ croît, $|\operatorname{tg}\alpha|$ décroît, donc tg α croît.

Tg α est une fonction de α, définie pour $0 \leqslant \alpha < 1\,\text{D}$ et $1\,\text{D} < \alpha \leqslant 2\,\text{D}$, croissante dans chacun de ces intervalles.

382. Propriétés de la cotangente. — On voit de même **que cotg α est une fonction de α, définie pour $0 < \alpha < 2\,\text{D}$, décroissante dans cet intervalle.**

383. Interprétation géométrique de la tangente et de la cotangente. — Traçons la tangente en A au demi-cercle et orientons-la dans le même sens que $y'Oy$; la droite OM coupe cette tangente en T. Les triangles OPM et OAT étant semblables, on a, en grandeur et en signe :

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AT}} \quad \text{ou :} \quad \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\overline{AT}}$$

donc : $\overline{AT} = \operatorname{tg}\alpha$ (*Fig. 281*).

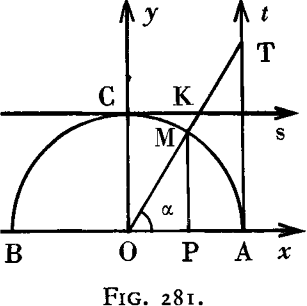


FIG. 281.

Lorsque M se rapproche de C, on s'aperçoit que le point T s'éloigne de plus en plus du point A. D'une manière plus précise, la longueur AT peut devenir et rester supérieure à une longueur donnée, aussi grande soit-elle. Nous dirons que *lorsque* α *tend vers un droit*, $|\operatorname{tg}\alpha|$ *augmente indéfiniment* ($\operatorname{tg}\alpha$ a le même signe que $\cos\alpha$).

On voit même que, si on trace en C la tangente au cercle et si on l'oriente dans le même sens que $x'Ox$, la droite OM coupe cette tangente en K tel que :

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{CK}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\overline{CK}} \quad \text{donc :} \quad \overline{CK} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

D'où l'on conclut que lorsque M tend vers A ou vers B, $|\operatorname{cotg}\alpha|$ augmente indéfiniment (le signe de $\operatorname{cotg}\alpha$ est le signe de $\cos\alpha$).

384. Angles complémentaires. — Soit deux angles α et β complémentaires.

On a : $$\alpha + \beta = 1\text{ D}.$$

α et β, compris entre zéro et 2 droits, sont donc aigus tous les deux. Figurons les angles $\alpha = \widehat{AOM}$ et $\beta = \widehat{AOM'}$ en supposant toujours que l'on a OA = 1 (*Fig. 282*).

On a : $\widehat{M'OC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOM'} = 1\text{ D} - \beta = \alpha.$

Les deux triangles rectangles OPM et OQ'M' sont donc égaux (hypoténuses égales et un angle aigu égal).

Donc : $\quad OP = OQ', \quad$ et : $\quad PM = Q'M'.$

FIG. 282.

On en conclut : $\cos\alpha = \sin\beta$ et : $\sin\alpha = \cos\beta$

ce que l'on peut écrire aussi :

$$\cos\alpha = \sin(1\text{ D} - \alpha) \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \cos(1\text{ D} - \alpha).$$

- **Le sinus d'un angle est égal au cosinus de son complément.**

On en déduit : $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = \operatorname{cotg}\beta.$

- **La tangente d'un angle est égale à la cotangente de son complément.**

Exemple : *Soit à calculer :* $\cos(1\text{ D} + \alpha)$.

Notons que les angles $1\text{ D} + \alpha$ et $1\text{ D} - \alpha$ sont supplémentaires; on a donc :

$$\cos(1\text{ D} + \alpha) = -\cos(1\text{ D} - \alpha) = -\sin\alpha.$$

On a de même : $\sin(1\text{ D} + \alpha) = \sin(1\text{ D} - \alpha) = \cos\alpha$.

On a enfin : $\operatorname{tg}(1\text{ D} + \alpha) = \dfrac{\sin(1\text{ D} + \alpha)}{\cos(1\text{ D} + \alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha$.

Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant :

	α	$2\text{ D} - \alpha$	$1\text{ D} - \alpha$	$1\text{ D} + \alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
sin	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

385. Relations entre les rapports trigonométriques d'un même angle.

1° Relation entre $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{cotg}\alpha$.

On a :

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.}$$

2° Relation entre $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

Le triangle rectangle OPM fournit la relation (Th. de Pythagore) :

$$OP^2 + PM^2 = OM^2 = 1, \qquad \text{ou :} \qquad OP^2 + OQ^2 = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$

On écrit $\cos^2\alpha$ pour $(\cos\alpha)^2$ et $\sin^2\alpha$ pour $(\sin\alpha)^2$ et on lit : cosinus carré de α et sinus carré de α.

3° Relation entre la tangente et le cosinus ou le sinus.

On a : $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \times \cos\alpha$

et en portant dans : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

d'où :

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha};} \qquad \boxed{\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.}$$

Réciproquement, soit deux nombres a et b tels que $-1 \leqslant a \leqslant 1$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$ vérifiant la relation : $a^2 + b^2 = 1$.

Le nombre a peut être considéré comme le cosinus d'un angle saillant de mesure α (n° **379**) : $a = \cos\alpha$.

On a : $\cos^2\alpha + b^2 = 1 \iff b^2 = 1 - \cos^2\alpha \iff b^2 = \sin^2\alpha$.

Comme $b \geqslant 0$ et $\sin\alpha \geqslant 0$, on en déduit : $b = \sin\alpha$.

- THÉORÈME. — **Pour que deux nombres a et b ($b \geqslant 0$) soient respectivement le cosinus et le sinus d'un angle saillant il faut et il suffit que l'on ait : $a^2 + b^2 = 1$.**

386. Rapports trigonométriques de quelques angles simples.

1. $\alpha = 45°$. Le triangle OMP (*Fig. 283*) est rectangle isocèle :

$$\sin\alpha = \cos\alpha \implies 2\cos^2\alpha = 1.$$

Pour $\alpha = 45°$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = 1, \quad \operatorname{cotg}\alpha = 1.$$

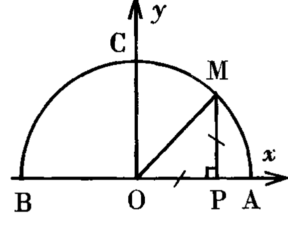


FIG. 283.

2. $\alpha = 30°$. Si M_1 est le symétrique de M par rapport à $x'Ox$ (*Fig. 284*) le triangle OMM_1 est équilatéral.

Pour $\alpha = 30°$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{3}.$$

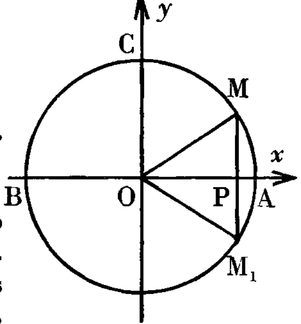


FIG. 284.

Les rapports trigonométriques des angles de 45° et de 30° étant connus on en déduit, par les formules n° **384**, les rapports trigonométriques des angles de 60° (complément de 30°); de 120°, 135°, 150° (suppléments de 60°, 45° et 30°). On obtient les résultats suivants qui doivent être sus *par cœur*.

En degrés	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cos α	1	↘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘ $\frac{1}{2}$	↘ 0	↘ $-\frac{1}{2}$	↘ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘ -1
sin α	0	↗ $\frac{1}{2}$	↗ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ 1	↘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘ $\frac{1}{2}$	↘ 0
tg α	0	↗ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗ 1	↗ $\sqrt{3}$	↗ $+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ $-\sqrt{3}$	↗ -1	↗ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗ 0
cotg α	$+\infty$	↘ $\sqrt{3}$	↘ 1	↘ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘ 0	↘ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘ -1	↘ $-\sqrt{3}$	↘ $-\infty$

Exercices. **1628.** — Démontrer que quel que soit α :

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1.$$

1629. — Même question pour :

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

1630. — Même question pour :

$$\sin^4\alpha + 1 = \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.$$

1631. — Même question pour :

$$\cos\alpha + \sin\alpha - \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha + \sin^3\alpha.$$

1632. — Quel que soit α :

$$2\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha - 2 = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

1633. — 1° Connaissant $\sin\alpha = 0{,}7$, calculer $\cos\alpha$ et $\mathrm{tg}\,\alpha$, sachant que α est aigu.
2° Même question pour $\sin\alpha = 0{,}8$.

1634. — 1° Connaissant $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5$, calculer $\sin\alpha, \cos\alpha$ et $\mathrm{cotg}\,\alpha$.
2° Même question pour $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}4$.

1635. — 1° Connaissant $\mathrm{cotg}\,\alpha = 7$, calculer $\sin\alpha$ $\cos\alpha$ et $\mathrm{tg}\,\alpha$.
2° Même question pour $\mathrm{cotg}\,\alpha = 0{,}9$.

1636. — 1° Connaissant $\cos\alpha = 0{,}3$, calculer $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ et $\mathrm{cotg}\,\alpha$.
2° Même question pour $\cos\alpha = 0{,}6$. **Exercices.**

II. APPLICATIONS AUX TRIANGLES

387. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. — Soit ABC (*Fig. 285*) un triangle rectangle en A dont les côtés sont :

$$a = BC; \qquad b = CA; \qquad c = AB.$$

Si nous prenons a pour unité de longueur, les mesures des côtés AC et AB sont $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$. L'angle ABC (ou $\widehat{B}$) est aigu, et nous lisons alors :

$$\frac{c}{a} = \cos B \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{a} = \sin B.$$

Comme le complément de $\widehat{B}$ est $\widehat{C}$ on a aussi :

$$\frac{b}{a} = \cos C \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{a} = \sin C.$$

Ces formules s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} b &= a\sin B = a\cos C \\ c &= a\sin C = a\cos B. \end{aligned}}$$

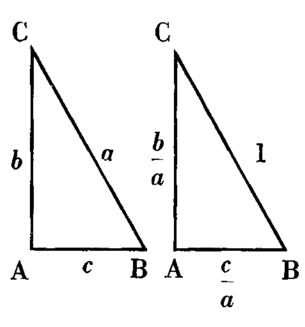


FIG. 285.

Par division, on trouve : $\text{tg}B = \frac{b}{c}$; $\text{tg}C = \frac{c}{b}$

que l'on peut écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} b &= c\,\text{tg}B = c\,\text{cotg}\,C \\ c &= b\,\text{tg}\,C = b\,\text{cotg}B. \end{aligned}}$$

▪ THÉORÈME. — **Dans un triangle rectangle :**

1° Un côté de l'angle droit est le produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle aigu adjacent.

2° Un côté de l'angle droit est le produit de l'autre côté de l'angle droit par la tangente de l'angle opposé ou par la cotangente de l'angle aigu adjacent au premier côté.

388. Mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe. — Nous donnerons d'abord une définition.

☆ DÉFINITION. — **On appelle angle saillant de deux axes, ou de deux vecteurs, l'angle saillant défini par deux demi-droites de même origine, respectivement parallèles aux deux axes ou aux deux vecteurs, et de même sens.**

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un axe (D), α l'angle saillant qu'ils déterminent, A et B se projettent orthogonalement en A′ et B′ sur (D). Calculons $\overline{A'B'}$.

1° $\overline{A'B'} > 0$. Traçons de A la parallèle (D′) à (D); les deux axes étant de même sens, l'angle $\alpha = \widehat{BAD'}$ est aigu (*Fig. 286*), le point B se projette sur (D′) en B'_1 et : $A'B' = AB'_1$, et dans le triangle rectangle BAB'_1

$$A'B'_1 = AB\cos\alpha, \qquad \text{donc :} \qquad \overline{A'B'} = AB\cos\alpha.$$

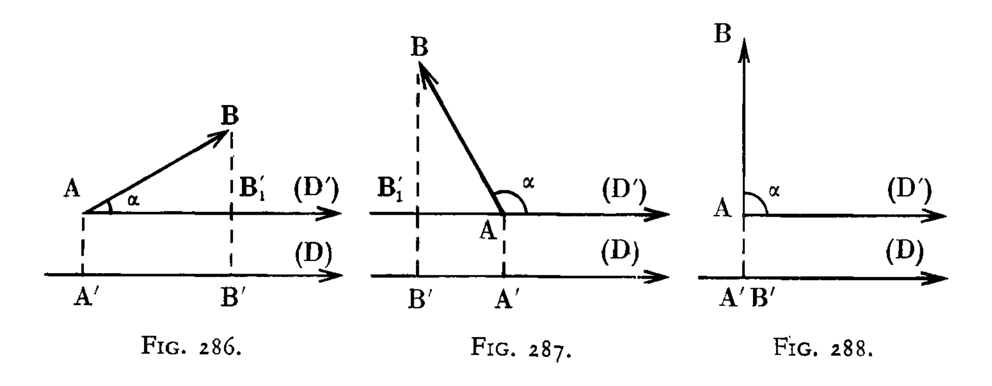


FIG. 286. FIG. 287. FIG. 288.

2° $\overline{A'B'} < 0$. L'angle $\alpha = \widehat{BAD'}$ est obtus (*Fig. 287*), $\cos\alpha$ est négatif. Dans le triangle ABB'_1 on a : $AB'_1 = AB\cos(2\,\text{D} - \alpha) = -AB\cos\alpha$.

D'où : $\overline{A'B'} = -AB'_1 = AB \cos\alpha.$

3° $A'B' = 0$ (*Fig. 288*). L'angle α est droit $\cos\alpha = 0$. On peut encore écrire : $\overline{A'B'} = AB \cos\alpha.$

▪ THÉORÈME. — **La mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe, est égale au produit de la longueur du vecteur par le cosinus de l'angle de la direction du vecteur et de la direction de l'axe.**

389. Application au triangle quelconque.

1. Distance de deux points dans un repère orthonormé. — Soit deux points : M_1 de coordonnées x_1, y_1, et M_2 de coordonnées x_2, y_2. Traçons de M_1 la parallèle à Ox, de M_2 la parallèle à Oy. Ces deux droites se coupent en I. On a (*Fig. 289*) :

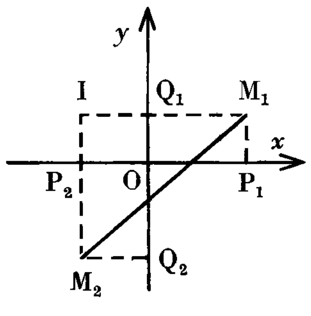


Fig. 289.

$$\overline{IM_1} = \overline{P_2P_1} = \overline{OP_1} - \overline{OP_2} = x_1 - x_2.$$
$$\overline{IM_2} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{OQ_2} - \overline{OQ_1} = y_2 - y_1.$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle PM_1M_2, donne, en appelant d la distance des deux points M_1 et M_2 :

$$\boxed{d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.}$$

5. Formule fondamentale dans le triangle quelconque. — Soit un triangle ABC, nous désignons par a, b, c les longueurs des côtés, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les mesures des angles. Considérons (*Fig. 290*) le repère orthonormé : origine A, axe Ax porté par AC et de même sens que $\overrightarrow{AC}$, axe Ay dans le demi-plan contenant B. Dans ce repère les coordonnées

de A sont : 0, 0.
de C sont : b, 0.
de B sont : $c \cos A$, $c \sin A$.

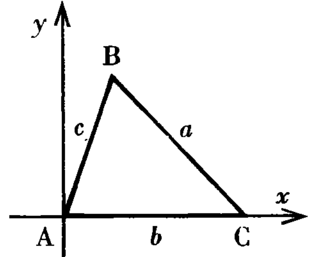


Fig. 290.

La formule précédente donne :

$$BC^2 = (b - c \cos A)^2 + c^2 \sin^2 A.$$
$$a^2 = b^2 - 2\,bc \cos A + c^2 \cos^2 A + c^2 \sin^2 A.$$

Finalement et en reprenant le même raisonnement pour les autres côtés on peut énoncer :

▪ THÉORÈME. — **Dans tout triangle ABC, les éléments a, b, c, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ vérifient :**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ac \cos B.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

Exercices. 1637. — On donne dans un triangle ABC rectangle en A la hauteur AH = 8 cm et $\widehat{B}$ tel que $\sin \widehat{B} = \frac{3}{5}$. Calculer AB, AC, BC.

1638. — Dans un triangle ABC on donne BC = 12 cm, AC = 11 cm, AB = 8 cm.

1° Calculer $\cos \widehat{A}$, $\cos \widehat{B}$, $\cos \widehat{C}$ et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ en grades.

2° Calculer la longueur de la médiane AM issue de A.

1639. — Dans un repère orthonormé, on donne par leurs coordonnées les points A(2, 1); B(6, 3) C(1, 8). Que peut-on dire du triangle ABC?

1640. — Même question que la précédente, avec A(1, — 6); B(8, — 3); C(5, 4).

1641. — D'un point O on voit un segment AB sous un angle de 60°. On donne OA = $\sqrt{3}$, OB = 2. Calculer AB. **Exercices.**

III. USAGE DES TABLES

390. Tables des valeurs des rapports trigonométriques. — On trouvera ces tables pages 474 et 475. Elles donnent les valeurs approchées à $\frac{1}{2 \times 10^4}$ près des rapports trigonométriques, l'une de degré en degré de 1° à 89°, l'autre de grade en grade de 1 gr à 99 gr.

On lit par exemple dans la colonne indiquée « Sin » en haut, en face de 26° lu dans la colonne de gauche : 0,4384, on écrira : pour $\alpha = 26°$, $\sin \alpha \simeq 0{,}4384$. Le signe $\simeq$ se lisant peu différent de ...

Lorsque, dans un calcul, on veut avoir une idée de la précision obtenue, on procédera par encadrement; on pourra écrire :

$$\text{pour } \alpha = 26° : 0{,}43835 \leqslant \sin \alpha < 0{,}43845.$$

Donnons quelques exemples de lecture directe.

Page 475 : pour

$\alpha = 65°$ on lit : $\sin \alpha \simeq 0{,}9063$.
$\alpha = 15°$ $\operatorname{tg} \alpha \simeq 0{,}2679$.

Page 474 : pour

$\alpha = 73$ gr $\cos \alpha \simeq 0{,}4115$.
$\alpha = 42$ gr $\operatorname{cotg} \alpha \simeq 1{,}2892$.

391. Détermination des rapports trigonométriques d'un angle donné. Si l'angle α donné est obtus, les formules :

$$\cos(2\,\text{D} - \alpha) = -\cos \alpha; \qquad \sin(2\,\text{D} - \alpha) = \sin \alpha;$$
$$\operatorname{tg}(2\,\text{D} - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \qquad \operatorname{cotg}(2\,\text{D} - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha;$$

ramènent cette détermination à celle du supplément de α qui est aigu.

Si α est donné en degrés ou en grades la lecture directe des tables donne le résultat.

Si α est donné de façon plus précise, avec des unités secondaires, on fait un calcul d'interpolation dont le principe est le suivant : dans un intervalle de 1° ou de 1 gr, on admet, ce qui est faux mais suffisant, que l'accroissement de l'angle est proportionnel à celui du rapport trigonométrique.

On adopte en outre l'usage suivant :

si le 5e chiffre décimal est inférieur à 5 on ne l'écrit pas;

si le 5e chiffre décimal est égal ou supérieur à 5 on augmente le 4e de 1.

Enfin on aura intérêt à disposer les calculs, comme il est indiqué dans les exemples suivants :

1. CALCUL DE SIN α POUR $\alpha = 23^\circ 17'$.

Pour 23° $\quad \sin \alpha_1 \simeq 0{,}3907 \qquad d = 160$

Pour 17' $\quad \dfrac{160 \times 17}{60} \simeq \quad 45$

$\sin \alpha \simeq 0{,}3952.$

d désigne la différence, lue dans les tables, entre le sinus de 23° et celui de 24°.

Remarquer que dans le calcul correspondant à l'accroissement pour 17', le quotient poussé à décimale supplémentaire aurait donné 45,3, on a pris 45.

2. CALCUL DE COS α POUR $\alpha = 32^\circ 42'$.

Pour 33° $\quad \cos \alpha_1 \simeq 0{,}8387 \qquad d = 93$

Pour —18' : $\quad \dfrac{93 \times 18}{60} \simeq \quad 28$

$\cos \alpha \simeq 0{,}8415.$

Remarquer que le cosinus décroît, et que, par suite, on a intérêt à partir du degré supérieur.

3. CALCUL DE TG α POUR $\alpha = 65{,}24$ gr.

Pour 65 g. $\quad \operatorname{tg} \alpha_1 \simeq 1{,}6319 \qquad d = 590$

Pour 0,24 g : $590 \times 0{,}24 \simeq \quad 142$

$\operatorname{tg} \alpha \simeq 1{,}6461.$

392. Détermination d'un angle connaissant un de ses rapports trigonométriques. — Nous avons étudié (n° **379** et suivants) le problème général.

On remarquera que pour déterminer l'angle α, connaissant son sinus, il est nécessaire de savoir si l'angle est aigu ou obtus.

Si le rapport donné figure dans les tables une lecture directe donnera l'angle.

EXEMPLES.

$\sin \alpha = 0{,}3535, \quad \alpha$ obtus, $\quad \alpha \simeq 200 \text{ gr} - 23 \text{ gr} \simeq 177 \text{ gr};$

$\operatorname{tg} \alpha = 1{,}5757 \qquad \alpha \simeq 64 \text{ gr};$

$\cos \alpha = -0{,}8746, \qquad \alpha \simeq 180^\circ - 29^\circ \simeq 151^\circ.$

Dans les autres cas, on fait un calcul d'interpolation. On disposera les calculs comme l'indiquent les exemples suivants :

1. ***Calculer*** α ***aigu, en degrés et minutes sachant que*** $\sin\alpha = 0{,}6200$.

Pour $\sin\alpha_1 = 0{,}6157$ $\quad \alpha_1 \simeq 38^o$ $\quad d = 136$

pour 43 : $\quad \dfrac{60 \times 43}{136} \simeq 19'$ $\quad \alpha \simeq 38^o19'$.

2. ***Calculer*** α ***en grades, tel que*** $\cos\alpha = 0{,}4300$.

Pour $\cos\alpha_1 = 0{,}4399$ $\quad \alpha_1 \simeq 71$ gr $\quad d = -141$

pour -99 : $\quad \dfrac{100 \times 99}{141} \simeq 70$ $\quad \alpha \simeq 71{,}70$ gr.

393. Problème. — *Les côtés* AB *et* BC *d'un triangle rectangle en* A, *ont été mesurés avec une précision de l'ordre du demi-millimètre. Calculer l'angle* C *du triangle. Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur cet angle?*

On a par exemple : AB = 7,8 cm. BC = 17,3 cm.

On peut écrire : $7{,}75 < AB < 7{,}85$.

$17{,}25 < BC < 17{,}35$.

Comme $\sin C = \dfrac{AB}{BC}$, on a : $\dfrac{7{,}75}{17{,}35} < \sin C < \dfrac{7{,}85}{17{,}25}$.

On prendra les quotients à $\dfrac{1}{10^4}$ près par défaut pour la limite inférieure, par excès pour la limite supérieure, soit : $0{,}4466 < \sin C < 0{,}4551$.

Les tables donnent :

pour $\sin\alpha = 0{,}4384$ $\quad \alpha \simeq 26^o$ $\quad d = 156$

pour 82 : $\quad \dfrac{60 \times 82}{156} \simeq 31'$

$\widehat{C} > 26^o31'$

pour $\sin\alpha' = 0{,}4540$ $\quad \alpha' \simeq 27^o$ $\quad d = 155$

pour 10 : $\quad \dfrac{60 \times 11}{155} \simeq 4'$

$C < 27^o4'$.

On a donc : $26^o31' < C < 27^o4'$.

On pourra prendre $C \simeq 26^o45'$, l'erreur étant de l'ordre du $\dfrac{1}{4}$ de degré.

Exercices. 1642. — Donner, à l'aide des tables, les rapports trigonométriques des angles : 29°, 42°, 127°, 153°

12^{gr}, 87^{gr}, 143^{gr}, 184^{gr}.

1643 — Calculer, en faisant la correction nécessaire, les rapports trigonométriques des angles : $12^o48'$; $49^o28'$, $142\ 37'$

$70{,}25^{gr}$; $125{,}37^{gr}$, $187{,}6^{gr}$.

1644. — Déterminer l'angle x sachant que :

1° Calcul en degrés : $\cos x = 0{,}873$; $\quad \text{tg}\, x = -1{,}544$; $\text{cotg}\, x = -0{,}4$;

2° Calcul en grades : $\cos x = -0{,}142$; $\text{tg}\, x = 0{,}57$; $\quad \text{cotg}\, x = 0{,}9$.

1645. — Déterminer les angles x sachant que :

1° Calcul en degrés : $\sin x = 0{,}515$; $\quad \sin x = 0{,}346$.

2° Calcul en grades : $\sin x = 0{,}454$; $\quad \sin x = 0{,}083$.

1646. — On donne :

1° $\cos\alpha = 0{,}7$. $\quad$ Calculer $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$ et α en degrés.

2° $\text{tg}\alpha = 0{,}5$. $\quad$ Calculer $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{cotg}\alpha$ et α en grades.

3° $\text{cotg}\,\alpha = 7$. Calculer $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ et α en degrés.
4° $\cos\alpha = -0{,}3$. Calculer $\sin\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{cotg}\,\alpha$ et α en grades.

Vérifier à l'aide de la table, sur chacun de ces exemples, les valeurs trouvées pour les différents rapports trigonométriques, à partir de la valeur obtenue pour α.

Calculer les éléments inconnus dans un triangle ABC *rectangle en* A *dans les cas suivants :*

1647. — $b = 3$ cm; $c = 4$ cm; inconnues : a, B, C (en grades).
$b = 5$ cm; $c = 2$ cm; inconnues : a, B, C (en degrés).

1648. — $a = 12$ cm; $B = 72°$; inconnues : b, c, C.
$a = 25$ cm; $B = 29^{gr}$; inconnues : b, c, C.

1649. — $a = 19$ cm; $b = 7$ cm; c, B, C (en degrés).
$a = 43$ cm; $b = 18$ cm; inconnues : c, B, C (en grades).

1650. — $c = 17$ cm; $C = 64°$; inconnues : a, b, B.
$c = 21$ cm; $C = 34^{gr}$; inconnues : a, b, B.

1651. — Une pièce d'eau a la forme d'un cercle de centre O. On se place en A sur le rayon OBA, on mesure AB = 50 m (à 1 cm près). L'angle TAT′ des deux tangentes issues de A vaut 26° $\left(\text{à } \frac{1}{4} \text{ de degré près}\right)$. Trouver le rayon de la pièce d'eau. **Exercices.**

PROBLÈMES

1652. — Calculer les angles d'un triangle ABC rectangle en A, sachant que le rapport de l'hypoténuse à un côté de l'angle droit est 3.

1653. — 1° On donne $\cos x = \sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$.
Calculer $\sin x$, $\text{tg}\,x$.

2° On donne $\sin x = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$.
Calculer $\cos x$, $\text{tg}\,x$.

1654. — Simplifier les expressions :
1° $3\sin^4 x + 3\cos^4 x - 2\sin^6 x - 2\cos^6 x$.
2° $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$.
3° $\dfrac{\cos^2 x}{\text{tg}^2 x} - \text{cotg}^2 x - \sin^2 x$.

1655. — Dans un cercle de centre O de rayon R = 1. Calculer la corde AB connaissant l'angle $\widehat{AOB} = \alpha$.
Applications : $\alpha = 60°$; $45°$; $36°$; $30°$; $24°$.

1656. — Les deux bases d'un trapèze ont pour longueur 6 et 9 cm. Les autres côtés 4 et 5 cm. Calculer ses angles.

1657. — Un ingénieur fait le tracé d'une route rectiligne pour laquelle il faudra faire une tranchée dans une butte qui interrompt la ligne droite entre A et B. Il marque sur BA prolongé au-delà de A un point C, puis trace sur le sol horizontal une droite CD qui passe à côté de la butte, en faisant un angle $\widehat{ACD} = 32°$, il prend CD = 300 m et enfin mène DE perpendiculaire à CD.

Quelle longueur doit-il donner à DE pour que le point E appartienne à la droite CABEF et quel angle $\widehat{DEF}$ faut-il construire pour avoir en EF le prolongement de la ligne droite AB?

1658. — Les diagonales d'un rectangle ont 10 cm. Leur angle vaut 140°. Calculer les côtés du rectangle. Le construire et comparer les résultats de la construction à ceux du calcul.

1659. — 1° Montrer que l'angle au centre α qui dans un cercle correspond à une corde moitié du côté du triangle équilatéral inscrit est donné par :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2° Calculer α en degrés et minutes. Valeur de 7α. En déduire un procédé graphique approché pour diviser un cercle en 7 arcs égaux.

PROBLÈMES RÉSOLUS

CHAPITRE XXVII
PROBLÈMES RÉSOLUS

I. PROBLÈMES D'ORIGINE GÉOMÉTRIQUE

394. Problème. — *On donne en grandeur et position un trapèze* AA′B′B *de bases* a *et* b ($a \leqslant b$). *Placer une droite* (Δ) *parallèle aux bases, de telle sorte que l'intérieur du trapèze intercepte sur cette droite une longueur donnée* l.

Solution algébrique. — 1° (*Fig. 291*). Prenons un axe Ox porté par AB, dirigé de A vers B; un axe Oy porté par AA′, dirigé de A vers A′, prenons des vecteurs unitaires ayant pour longueur l'unité de longueur avec laquelle ont été évaluées les bases a et b. Posons : $AB = c$, et choisissons comme inconnue l'abscisse x du point M où la droite (Δ) coupe le segment AB.

La droite A′B′ a une équation de la forme : $y = \lambda x + a$

On sait que : $b = \lambda c + a$ d'où :

$$\lambda = \frac{b-a}{c} \quad \text{et :} \quad y = \frac{b-a}{c}x + a.$$

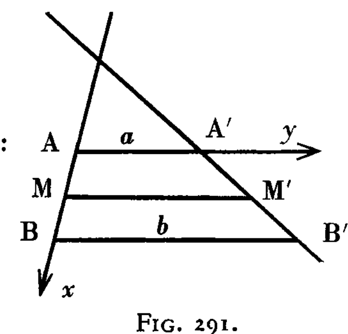


Fig. 291.

2° La traduction du problème s'écrit :

$$0 \leqslant x \leqslant c \quad \exists x ? \quad l = \frac{b-a}{c}x + a.$$

3° A) Si l'on a $b > a$, la fonction :

$$y = \frac{b-a}{c}x + a \text{ est croissante.}$$

Pour $x = 0$ elle prend la valeur a et pour $x = c$, la valeur b. Elle prendra une fois et une seule la valeur l, entre les limites exigées, si : $a \leqslant l \leqslant b$

pour une valeur de x égale à : $c \times \dfrac{l-a}{b-a}$.

On voit que le rapport qui multiplie c est compris entre 0 et 1.

B) Si l'on a $b = a$, on a : $y = a$. Le problème ne dépend plus d'un choix de x.

Pour $l \neq a$ Impossibilité.
Pour $l = a$ Indétermination : tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant c$ convient.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE. — Nous cherchons s'il existe un vecteur $\overrightarrow{MM'}$ ayant son origine M sur le segment AB, son extrémité M' sur le segment A'B' et équipollent à un vecteur $\vec{u}$ parallèle à AA', du sens de $\overrightarrow{AA'}$, de longueur l.

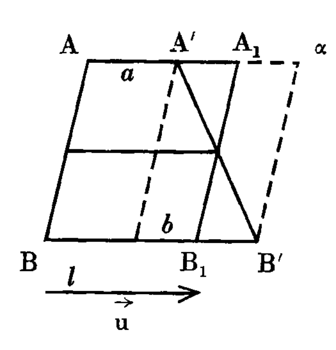


FIG. 292.

L'ensemble des points M_1 tels que *(Fig. 292)* : $M \in AB$ et $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ est le segment A_1B_1 tel que $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{u}$.

Pour qu'un point M' soit solution, il faut et il suffit que : $M' \in A'B'$ et $M' \in A_1B_1$.

Il y aura une solution si les segments se coupent, aucune s'ils ne se coupent pas. On retrouvera facilement à partir de là les résultats de la discussion ci-dessus.

395. Remarques de méthode sur la résolution algébrique des problèmes. — De l'exemple précédent il résulte que la résolution algébrique d'un problème d'origine géométrique comprend les étapes suivantes :

1° *Choix de l'inconnue ou des inconnues.* Une règle absolue consiste à choisir une inconnue qui détermine sans ambiguïté la solution. On tiendra compte des symétries éventuelles.

2° *Mise en équation, ou équations, et inéquation, ou inéquations.* Dans cette étape on traduit l'énoncé en langage algébrique et l'on forme le système d'équation (s) et d'inéquation (s), ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inconnues donnent effectivement la solution (les solutions) du problème.

3° *Résolution de ce système.* La résolution ne saurait se dissocier de la discussion.

A) Étude du cas général.

B) Étude des divers cas particuliers qui peuvent se rencontrer.

4° *Interprétation géométrique des résultats*, si l'on n'a pas fait cette interprétation en même temps que l'on obtenait ces résultats, au cours de l'étape précédente.

Exercices. *On donne sur un axe les points* A *et* B, *d'abscisses* a *et* b. *Déterminer l'abscisse d'un point* M *de cet axe pour que l'on ait :*

1660. $\overline{MA} + \overline{MB} = l$; $\overline{MA} - \overline{MB} = l$.

1661. $2\,\overline{MA} + 3\,\overline{MB} = l$; $p\,\overline{MA} + q\,\overline{MB} = l$.

1662. $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k^2$; $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = m$.

1663. $MO^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$. (O point initial de l'axe.)

Exercices.

II. PROBLÈMES DE MOUVEMENT

396. Trajectoire. Abscisse curviligne. — Un point mobile M décrit une ligne que l'on appelle sa *trajectoire*. Le support de la trajectoire peut préexister au mouvement : le train suit la voie ferrée, le coureur de cent mètres reste dans son couloir.

On peut alors orienter la trajectoire préalablement à tout mouvement et choisir une origine O. Ayant choisi d'autre part une unité de longueur, on pourra repérer tout point M de la trajectoire par un nombre positif ou négatif s, mesure algébrique de la longueur $\overset{\frown}{OM}$ sur la trajectoire. s s'appelle *l'abscisse curviligne* de M. Elle coïncidera avec l'abscisse usuelle si la trajectoire est une droite (*Fig. 293*).

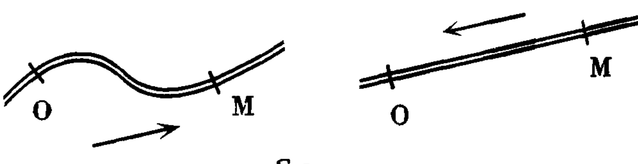


FIG. 293.

397. Loi du mouvement. Vitesse moyenne entre deux instants. — Il convient encore de choisir une unité de durée. Le mouvement est alors connu si l'on connaît à chaque instant l'abscisse curviligne du mobile. L'abscisse curviligne s est une fonction de la date t : $s = f(t)$ dite *loi horaire du mouvement*. Cette fonction peut n'être définie qu'entre une date initiale et une date finale.

Le taux d'accroissement de la fonction $f(t)$ entre deux dates t_1 et t_2 : $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ est la *vitesse moyenne* du mobile entre ces deux dates et entre les deux positions.

398. Mouvement uniforme sur un intervalle de temps. — Le mouvement est uniforme entre les dates $t = \alpha$ et $t = \beta$, si la vitesse moyenne est constante entre deux dates quelconques de cet intervalle.

Mouvement uniforme sur $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha \leqslant t_1 \leqslant \beta, \quad \alpha \leqslant t_2 \leqslant \beta, \quad \forall t_1, \quad \forall t_2 \quad \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{Cte}.$$

Cette valeur constante, soit v, s'appelle la *vitesse du mouvement uniforme*. Remplaçant t_1 par α et t_2 par t on obtient

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \quad \frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha} = v$$

ou :
$$f(t) = v(t - \alpha) + f(\alpha) = vt + [f(\alpha) - v\alpha].$$

L'équation horaire est du premier degré en t.

Ce résultat ne dépend ni du sens pris sur la trajectoire, ni de l'origine choisie, ni de la date initiale, ni de l'unité de durée.

La réciproque est immédiate : Si $f(t) = at + b$ avec $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, on a : $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = a$; le coefficient a n'est autre que la vitesse du mouvement uniforme. Si la date zéro appartient à l'intervalle de définition, on a $f(0) = b$.

399. Diagramme d'un mouvement. — Un graphe de la fonction $f(t)$ s'appelle un *diagramme* du mouvement.

On porte en abscisses le temps t. Si $\overrightarrow{OE}$ est le vecteur unitaire, OE correspond à une unité de durée. On porte en ordonnées l'abscisse curviligne s. Si $\overrightarrow{OF}$ est le vecteur unitaire, la longueur de OF représente graphiquement une unité de longueur utilisée dans la description du mouvement.

On ne confondra pas le diagramme, dessin fait sur un papier, avec la trajectoire réelle que décrit un mobile réel : coureur, locomotive ou tout autre.

400. Problème. — *L'Inspecteur Smith enquête au sujet d'un meurtre commis au manoir de Chicherly dans une petite pièce ouvrant sur le vestibule. Le vestibule est orné d'une horloge ancienne présentant cette particularité que les deux aiguilles ont la même longueur.*

Il est établi que le témoin Burton est entré deux fois dans le vestibule, une première fois avant le meurtre, entre 7 h et 8 h, une autre fois après, entre 8 h et 9 h. Mais lui-même ne se souvient pas des heures, il se rappelle toutefois l'impression très nette qu'il a eue en revenant : les aiguilles, semblait-il, n'avaient absolument pas bougé...

Aidez l'Inspecteur à trouver les heures de passage du témoin.

Le mouvement des aiguilles est uniforme. Celle des heures tourne en 1 h de $\frac{1}{12}$ de tour. L'autre fait un tour par heure. Il paraît commode de prendre ici comme unité d'arc le $\frac{1}{12}$ de tour (30°). Soit OA la demi-droite qui joint le centre de l'horloge à la graduation 12.

Soit 7 h et x mn la première date, 8 h et y mn la seconde.
Soit encore OP l'aiguille des heures, OG l'aiguille des minutes.

A 7 h et x mn on a : $\widehat{AOP} = 7 + \frac{x}{60}$ et $\widehat{AOG} = \frac{x}{5}$.

A 8 h et y mn on a : $\widehat{AOP} = 8 + \frac{y}{60}$ et $\widehat{AOG} = \frac{y}{5}$.

Pour traduire la permutation des deux aiguilles il faut, et il suffit, d'écrire :

$$\begin{cases} 7 + \dfrac{x}{60} = \dfrac{y}{5} \\ 8 + \dfrac{y}{60} = \dfrac{x}{5} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant x < 60 \\ 0 \leqslant y < 60. \end{array}$$

On obtient $x = 60\frac{103}{143} \simeq 43$ mn 13 s; $y = 60\frac{92}{143} \simeq 38$ mn 36 s.

Les instants cherchés sont : 7 h 43 mn 13 s et 8 h 38 mn 36 s.

III. PROBLÈMES DIVERS

401. Problème. — *Dix élèves ont promis leur concours pour une fête de bienfaisance. Ils peuvent donner chacun douze heures de travail. Ils peuvent fabriquer des porte-cartes en matière plastique de deux sortes différentes et disposent d'un stock de* 10 *kg de cette matière.*

La première variété de porte-cartes demande 100 *g de matière, une heure de travail et rapporte un bénéfice de* 5,2 NF. *La seconde demande* 150 *g de matière,* 2 *heures de travail et rapporte* 8,4 NF. *Déterminer le nombre d'objets à fabriquer, dans chaque catégorie, pour que le bénéfice soit le plus grand possible.*

Soit x le nombre d'objets de la première sorte, y celui de la seconde sorte.

Le poids de matière employée est, en kg : $0{,}1\,x + 0{,}15\,y$.

Le temps nécessaire à la fabrication est, en heures : $x + 2\,y$.

Le bénéfice réalisé est, en NF :

$$5{,}2\,x + 8{,}4\,y.$$

Les nombres x et y cherchés sont entiers et doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \quad (1) \qquad y \geqslant 0 \quad (2) \\ 0{,}1\,x + 0{,}15\,y \leqslant 10 \quad (3) \\ x + 2\,y \leqslant 120 \quad (4) \\ \text{Rendre maximum le nombre} \\ 5{,}2\,x + 8{,}4\,y \quad (5) \end{cases}$$

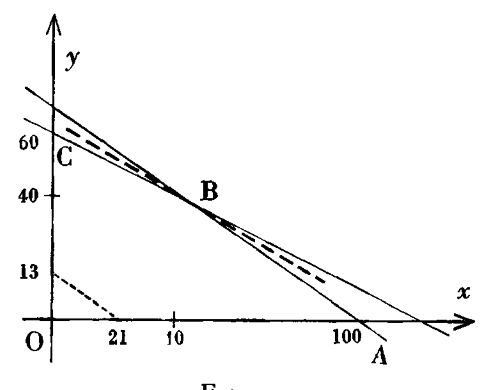


FIG. 294.

On résout cette question graphiquement (*Fig. 294*).

Pour (1) et (2), on ne garde que la région I définie par les axes.

Pour (3), on trace la droite définie par l'équation : $x + 1{,}5\,y = 100$.
Elle passe par les points ($x = 100, y = 0$), ($x = 70, y = 20$), ($x = 40, y = 40$).
La condition (3) est satisfaite dans la région contenant l'origine.

Pour la condition (4), on trace la droite d'équation $x + 2\,y = 120$.
Elle passe par les points :

$$(x = 120,\ y = 0),\quad (x = 40,\ y = 40),\quad (x = 0,\ y = 60).$$

La condition (4) est satisfaite dans la région qui contient l'origine.

Compte tenu de toutes les conditions d'inégalité, il reste un quadrilatère convexe OABC, le point B ($x = 40$, $y = 40$) étant le point commun aux frontières (3) et (4).

Le nombre $5{,}2\,x + 8{,}4\,y$ reste constant le long d'une droite d'équation $5{,}2\,x + 8{,}4\,y = $ Cte. Toutes ces droites sont parallèles. On peut tracer l'une d'entre elles, par exemple celle qui a pour équation :

$$13\,x + 21\,y = 13 \times 21 \qquad \text{(en pointillé sur la figure).}$$

Il faut trouver, dans cette famille de parallèles, celle qui passe le plus loin de l'origine tout en ayant un point au moins dans la région OABC.

On trouve que la droite doit passer par B (en tirets sur la figure).

On fabriquera donc 40 objets de chaque sorte pour réaliser un bénéfice de 544 NF.

PROBLÈMES DE REVISION

1664. — 1° Quelles sont les différentes sommes que l'on peut former avec 50 billets, les uns de 5 NF, les autres de 10 NF?

D'une manière générale, en désignant par x le nombre variable des billets de 5 NF, donner l'expression y de la valeur de la somme formée par les 50 billets.

2° Représenter graphiquement les valeurs de y en fonction de x. On indiquera l'échelle adoptée sur chaque axe. On obtiendra ainsi une suite de points figuratifs. Comment sont-ils disposés?

3° Calculer le nombre de billets de chaque espèce lorsque la somme formée par tous les billets est 350 NF; lorsque cette somme est S. Discuter la possibilité du problème suivant les valeurs de S.

1665. — 1° Un triangle rectangle OAB a pour côtés de l'angle droit :

$$OA = 3 \text{ cm}, \qquad AB = 4 \text{ cm}.$$

Calculer l'hypoténuse OB.

On prend un point M sur OA ou sur un prolongement au-delà de A, et l'on pose $OM = x$.

Par M, on trace la parallèle MN à AB (N sur OB). Évaluer le périmètre y_1 du trapèze MABN, si M est entre O et A, et le périmètre y_2 du trapèze AMNB, si M est sur le prolongement de OA.

2° Représenter graphiquement, sur les mêmes axes rectangulaires, les variations de y_1 et de y_2, quand x prend les valeurs compatibles avec la construction demandée.

3° Quelles valeurs faut-il donner à x pour que chacun des trapèzes ait le même périmètre, soit 10 centimètres? Si l'on représente par p le périmètre, pour quelles valeurs de p trouvera-t-on deux trapèzes convenables? Pour quelles valeurs de p n'en trouvera-t-on qu'un seul?

1666. — Deux pièces de ruban ont des longueurs proportionnelles à $\frac{3}{5}$ et à $\frac{2}{7}$. Le mètre de la première vaut 0,28 NF; le mètre de la seconde vaut 0,25 NF. On vend $\frac{1}{7}$ de la première et $\frac{1}{5}$ de la seconde. Le prix de ce qui reste de la première pièce dépasse alors de 6,08 NF le prix de ce qui reste de la seconde. Calculer la longueur de chaque pièce.

1667. — 1° Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ABC sachant que l'équation de

$$\text{AB est : } y = x + 2$$
$$\text{AC est : } y = -x + 4$$
$$\text{BC est : } y = \frac{x}{5} + \frac{2}{5}$$

Unité d'abscisse et d'ordonnée : 1 centimètre.

2° Trouver les équations des côtés du triangle A′B′C′ obtenu en menant par A, B et C les parallèles aux côtés opposés. Quelle est la nature des triangles ABC et A′B′C′?

3° Mesurer et vérifier par le calcul la longueur des côtés AB, BC et CA. Vérifier par le calcul la relation numérique que l'on peut déduire de la réponse à la deuxième question.

1668. — On donne deux demi-axes rectangulaires Ox, Oy et la bissectrice Oz de l'angle xOy.

Soit Q un point de coordonnées x et y situé dans l'angle zOy. M est la projection de Q sur Ox, et P sa projection sur Oy. Un point A, fixe, sur Oz, a pour abscisse + 2. Il se projette en B sur Oy.

1° Établir la relation qui doit exister entre x et y pour que la différence des côtés du rectangle OMPQ soit égale à la demi-somme

des bases du trapèze OMAB. Quand cette propriété est vérifiée, quel est le lieu du point Q?

2° Déterminer les coordonnées du point Q répondant à la première condition si, en outre, ce point se projette en A sur Oz?

1669. — 1° Résoudre le système :

$$2x + y = 5 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 16 \qquad (2)$$

et construire les droites représentant les deux équations par rapport à deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$. Unité : 1 centimètre.

La première coupe Ox en B et Oy en A; la seconde coupe Ox en C et Oy en D.

2° La parallèle tracée de A à Ox coupe en I la médiatrice de BC. Coordonnées de I. Calculer IA, IB et IC. Que peut-on dire du cercle passant par A, B, C?

3° Soit A′ le symétrique de A par rapport à O. Former l'équation de la droite A′C. Démontrer que les droites A′C et BD sont perpendiculaires. Qu'en déduit-on pour la droite A′B?

1670. — 1° Décomposer en produit de deux facteurs l'expression :

$$(2x + y - 4)^2 - (x + y - 1)^2.$$

2° Résoudre graphiquement l'inéquation à deux inconnues :

$$(2x + y - 4)^2 - (x + y - 1)^2 > 0.$$

3° La résolution de la question 2° amène à tracer dans un plan, rapporté à deux axes $x'Ox$, $y'Oy$, deux droites, qui se coupent en un point A. Démontrer que les droites qui ont pour équation

$$x + y - 1 = 0$$
$$2x + y - 4 = 0$$

se coupent en A. Vérifier ensuite en résolvant le système formé par ces deux équations.

1671. — Un triangle ABC a pour côtés AB = 6 cm; BC = 5 cm; CA = 1 cm. Sur BA, entre B et A, on prend un point D et on pose BD = x. La parallèle tracée par D à BC coupe AC en E.

1° Calculer en fonction de x, la somme :

$$y = \text{BD} + \text{DE} + \text{EC}.$$

2° Représenter graphiquement la variation de y quand D décrit le segment BA.

3° Déterminer x pour que l'on ait :

$$\text{BD} + \text{DE} + \text{EC} = \text{BA}.$$

a) Solution graphique; *b*) solution algébrique.

4° Calculer le rapport de l'aire du trapèze DECB à l'aire du triangle ADE en fonction de x. Valeur de ce rapport quand D occupe la position trouvée au 3°.

1672. — Sachant que les polynomes

$$x^2 + ax + b$$
$$x^2 + cx + d$$

ont chacun deux racines inférieures à 1 en valeur absolue, en est-il de même pour le polynome

$$x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2}?$$

1673. — Résoudre :

$$x^2 + xy + xz = 6$$
$$y^2 + xy + yz = 12$$
$$z^2 + xz + yz = 18.$$

1674. — Dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère les points M et N situés sur $x'x$ et ayant pour abscisses respectives 1 et 4.

1° Soit x et y les coordonnées d'un point quelconque P du plan des axes. Évaluer : PM², PN² et PO² en fonction de x et de y.

2° Quelle relation doivent vérifier x et y pour que l'on ait :

$$\text{PN} = 2\,\text{PM}?$$

3° En rapprochant la condition obtenue de l'expression de PO², dire sur quelle courbe sont placés les points P tels que PN = 2 PM?

1675. — On donne sur un axe $x'x$ deux points fixes B et C d'abscisses + 5 et + 3 centimètres; un point variable M de cet axe a pour abscisse x. Un point A fixe est distant de l'axe de 2 centimètres.

1° Calculer en fonction de x la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{\text{MB}}$, puis la longueur du segment MB. On remarquera que cette dernière s'exprime différemment suivant que x est supérieur ou inférieur à 5.

Évaluer l'aire y_1 du triangle AMB. Représentation graphique des variations de y_1 en fonction de x.

2° Calculer l'aire y_2 du triangle AMC. Représentation graphique des variations de y_2; les deux graphiques seront construits sur les mêmes axes de coordonnées.

3° Pour quelle position de M les deux aires sont-elles équivalentes?

Solution graphique, algébrique et géométrique.

1676. — 1° Dans un trapèze isocèle convexe, la grande base mesure 5 centimètres et les angles aigus sont égaux à 60°. On représente par x la longueur de chacun des côtés égaux. Calculer en fonction de x le périmètre y de ce trapèze. Dans quel intervalle peut-on faire varier x pour réaliser les conditions de l'énoncé?

Représenter alors graphiquement les variations de y en fonction de x.

2° Calculer x, et la petite base du trapèze, si y est égal à 11,5 cm? Si y est égal à p?

1677. — Deux axes X′AX et Y′BY′ sont parallèles et orientés dans le même sens. Les origines A et B sont les extrémités d'une perpendiculaire commune aux deux axes : AB = 4 cm. Une droite (d) coupe X′AX en P et Y′BY en Q. On pose $\overline{AP} = x$, $\overline{BQ} = y$.

A toute droite (d) correspondent une valeur pour x et une valeur pour y; ces deux valeurs seront prises comme abscisse et comme ordonnée d'un point D, dans un système d'axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$.

1° La droite (d) varie de façon que le segment PQ ait une longueur constante $l = 4\sqrt{2}$ (cm). Trouver la relation qui lie x et y. Comment se déplacent la droite (d) et le point D?

2° La droite (d) passe par un point fixe I, équidistant de A et de B, à 1 centimètre de AB du côté des demi-axes positifs AX et BY. Quelle relation lie alors x et y? Quel est le lieu du point D?

3° Où est situé le point D correspondant à une droite (d) passant par I et telle que $PQ = 4\sqrt{2}$ (cm)?

On trouve deux positions D_1 et D_2 correspondant à deux positions (d_1) et (d_2). Comment se déplace la droite (d) quand D décrit le segment D_1D_2?

1678. — 1° Simplifier la fraction :

$$\frac{(x + 2y - a)^2}{(x + 2y)^2 - a^2}.$$

2° En égalant à 2 la fraction simplifiée ainsi trouvée, on forme une équation (1), à laquelle on associe l'équation :

$$3x + 4y = 11. \qquad (2)$$

Ces deux équations forment un système. Déterminer le nombre a pour lequel la solution du système est formée de deux nombres entiers et positifs. Quelle est cette solution?

1679. Dans une étape contre la montre, au cours du Tour de France, les départs s'échelonnent de 3 minutes en 3 minutes. D'après les données ci-après comparer graphiquement les courses faites par les coureurs G, M. L, et N. Préciser à quels kilomètres M a remonté ses deux concurrents. On admettra que le mouvement est uniforme entre deux chronométrages.

	20 km	Mi-course
G	29 mn 30 s	59 mn 35 s
N	à 30 s	à 55 s
L	à 1 mn 25 s	à 2 mn 18 s
M	à 3 mn	à 2 mn 47 s

	20 km de l'arrivée	Arrivée (83 km)
G	1 h 20 mn 20 s	1 h 59 mn 28 s
N	à 1 mn 45 s	à 2 mn 51 s
L	à 2 mn 30 s	à 3 mn 44 s
M	à 1 mn 50 s	à 2 mn 23 s

1680. — On partage une somme entre plusieurs personnes; la première reçoit a francs et $\frac{1}{n}$ du reste; la seconde reçoit $2a$ francs et $\frac{1}{n}$ du nouveau reste, la troisième reçoit $3a$ francs et $\frac{1}{n}$ du reste, etc. Les parts ainsi obtenues étant égales, quelle est la somme à partager et le nombre des parts?

Application numérique : $a = 2\,000$ NF; $n = 7$.

1681. — Deux mobiles parcourent une ligne droite d'un mouvement uniforme. Au même instant, ils passent en un point O de cette droite; a secondes après, leur distance est b mètres. Trouver leurs vitesses, si la somme des longueurs parcourues à ce moment est c mètres. Application :

$a = 10$ secondes;
$b = 50$ mètres;
$c = 150$ mètres.

1682. — Trois cyclistes se déplacent sur une même route, dans le même sens. Les deux premiers ont la même vitesse v, mais le second est parti après le premier du même point quand celui-ci avait déjà une avance de a kilomètres. Le troisième est parti en même temps que le second, du même point, avec une vitesse v'. On demande combien de temps après son départ il sera à égale distance des deux premiers (v et v' sont en kilomètres à l'heure).

1683. — Cinq personnes ont à faire un trajet de 40 kilomètres. Elles n'ont à leur disposition qu'une voiture automobile qui peut faire, sur cette route, 30 kilomètres à l'heure mais qui n'a que 3 places en plus de celle du conducteur. On décide que la voiture partira avec trois personnes, les autres partant à pied en même temps, et qu'à une certaine distance, les trois personnes transportées termineront la route à pied, cependant que l'automobile reviendra

chercher les deux autres. A quelle distance l'automobile doit-elle faire demi-tour et poser le premier groupe pour que les cinq personnes arrivent en même temps à destination? On comptera 6 kilomètres à l'heure pour les trajets faits à pied.

Représenter par un graphique la marche des deux groupes de voyageurs et celle de l'automobile.

1684. — Une automobile part de A vers B. A la même heure, deux cyclistes sont partis de B; l'un vers A, l'autre sur le prolongement de la route de A à B. L'automobile les rencontre successivement, l'un devant la borne kilométrique n° 44 à 13 h 45 mn, l'autre devant la borne n° 56 à 13 h 57 mn. La vitesse de l'automobile étant triple de celle des cyclistes, calculer la distance AB, la vitesse de l'automobile, celle des cyclistes, et l'heure de départ des uns et des autres. Représentation graphique des résultats obtenus.

1685. — Une ligne d'autobus a 12 kilomètres. Les départs ont lieu toutes les 10 minutes, à partir de 6 heures du matin, dans les deux sens. La durée du trajet dans chaque sens est 45 minutes. Représenter graphiquement la marche de ces autobus, dans les deux sens, entre 10 heures et 12 heures. Combien l'autobus parti à 11 heures croise-t-il d'autres autobus sur son parcours? En serait-il ainsi de la voiture partie à 6 heures?

1686. — Un cycliste part d'un point A, à la vitesse de 15 kilomètres à l'heure. A la même heure un motocycliste part de B situé à 20 km de A, et se dirige vers A, sur la même route que le cycliste et dans le même sens. Sa vitesse est 40 km/h. Tracer les graphiques des deux mouvements. Donner leurs équations. Lire sur le graphique :

1° l'heure et la position de la rencontre.

2° à quelle heure, et à quelle distance de B le motocycliste aura-t-il :

a) un retard de 10 km sur le cycliste.

b) une avance de 10 km sur le cycliste.

1687. — Reprendre le problème traité n° 401, page 467, avec des bénéfices respectivement égaux à 4 et 10 NF.

1688. — La somme de trois nombres est a. La somme des deux premiers vaut la moitié de la somme des deux derniers qui vaut elle-même la moitié de la somme du premier et du dernier. Trouver ces nombres.

1689. — Deux horloges sonnent l'heure en même temps; l'une avance de 3 secondes sur l'autre; les coups de la première se succèdent à 5 secondes d'intervalle, les coups de la seconde se succèdent à 4 secondes d'intervalle. On suppose que l'oreille ne distingue pas deux coups lorsque l'intervalle est inférieur ou égal à 1 seconde. Quelle heure est-il si l'on a entendu 6 coups? Même question si l'on a entendu 14 coups?

L'on cherchera le nombre de coups battus qui n'ont pas été perçus. La solution du problème exige la résolution d'une inégalité entre nombres entiers. Vérifier par une solution graphique.

1690. — Sur le côté Ox d'un angle droit xOy, on prend le point A ($OA = a$), et l'on trace le cercle (C) de centre A et de rayon R. Trouver en Oy un point M tel qu'en menant la tangente MB au cercle on a :

$$OM + MB = l.$$

1691. — On coupe un carré ABCD, de côté a par une parallèle (Δ) à la diagonale BD. Soit x la distance de cette droite au sommet A. On enlève la partie du carré comprise entre A et (Δ). Évaluer en fonction de x et de a le périmètre du polygone restant. Représentation graphique quand x varie de 0 à $a\sqrt{2}$. Pour quelle valeur de x ce périmètre a-t-il une longueur égale à na, n étant un nombre positif donné?

1692. — Étant donné un quart de cercle, on trace les tangentes à ses extrémités et la corde du quadrant. Trouver une parallèle à l'une des tangentes telle qu'elle soit partagée dans un rapport donné p par la corde, l'arc et l'autre tangente.

1693. — Étant donné un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$, déterminer un point M de ce demi-cercle tel qu'en menant en M la tangente au cercle, cette tangente rencontre AB en C (B entre A et C) et que l'on ait :

$$MC = MD + DB,$$

D étant la projection orthogonale de M en AB.

Inconnue : $OD = x$, O centre du demi-cercle.

1694. — Soit un demi-cercle, limité par le diamètre $AB = 2R$. Inscrire dans ce demi-cercle un rectangle, dont un côté est sur le diamètre et les deux autres sommets sont sur le demi-cercle, si la diagonale du rectangle est égale à une longueur donnée l.

On calculera les côtés x et y du rectangle en fonction de R et de l. Pour quelles valeurs de l le problème est-il possible?

Pour quelle valeur de l le rectangle est-il un carré?

CARRÉS ET CUBES
DES NOMBRES ENTIERS
DE 1 A 100

Nombres	Carrés	Cubes	Nombres	Carrés	Cubes	Nombres	Carrés	Cubes
1	1	1	**34**	1 156	39 304	**67**	4 489	300 763
2	4	8	**35**	1 225	42 875	**68**	4 624	314 432
3	9	27	**36**	1 296	46 656	**69**	4 761	328 509
4	16	64	**37**	1 369	50 653	**70**	4 900	343 000
5	25	125	**38**	1 444	54 872	**71**	5 041	357 911
6	36	216	**39**	1 521	59 319	**72**	5 184	373 248
7	49	343	**40**	1 600	64 000	**73**	5 329	389 017
8	64	512	**41**	1 681	68 921	**74**	5 476	405 224
9	81	729	**42**	1 764	74 088	**75**	5 625	421 875
10	100	1 000	**43**	1 849	79 507	**76**	5 776	438 976
11	121	1 331	**44**	1 936	85 184	**77**	5 929	456 533
12	144	1 728	**45**	2 025	91 125	**78**	6 084	474 552
13	169	2 197	**46**	2 116	97 336	**79**	6 241	493 039
14	196	2 744	**47**	2 209	103 823	**80**	6 400	512 000
15	225	3 375	**48**	2 304	110 592	**81**	6 561	531 441
16	256	4 096	**49**	2 401	117 649	**82**	6 724	551 368
17	289	4 913	**50**	2 500	125 000	**83**	6 889	571 787
18	324	5 832	**51**	2 601	132 651	**84**	7 056	592 704
19	361	6 859	**52**	2 704	140 608	**85**	7 225	614 125
20	400	8 000	**53**	2 809	148 877	**86**	7 396	636 056
21	441	9 261	**54**	2 916	157 464	**87**	7 569	658 503
22	484	10 648	**55**	3 025	166 375	**88**	7 744	681 472
23	529	12 167	**56**	3 136	175 616	**89**	7 921	704 969
24	576	13 824	**57**	3 249	185 193	**90**	8 100	729 000
25	625	15 625	**58**	3 364	195 112	**91**	8 281	753 571
26	676	17 576	**59**	3 481	205 379	**92**	8 464	778 688
27	729	19 683	**60**	3 600	216 000	**93**	8 649	804 357
28	784	21 952	**61**	3 721	226 981	**94**	8 836	830 584
29	841	24 389	**62**	3 844	238 328	**95**	9 025	857 375
30	900	27 000	**63**	3 969	250 047	**96**	9 216	884 736
31	961	29 791	**64**	4 096	262 144	**97**	9 409	912 673
32	1 024	32 768	**65**	4 225	274 625	**98**	9 604	941 192
33	1 089	35 937	**66**	4 356	287 496	**99**	9 801	970 299

RACINES CARRÉES ET INVERSES DES NOMBRES ENTIERS DE 1 A 100

n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	51	7,1414	0,0196
2	1,4142	0,5	52	7,2111	0,0192
3	1,7321	0,3333	53	7,2801	0,0189
4	2	0,25	54	7,3485	0,0185
5	2,2361	0,2	**55**	7,4162	0,0182
6	2,4495	0,1667	56	7,4833	0,0179
7	2,6458	0,1429	57	7,5498	0,0175
8	2,8284	0,125	58	7,6158	0,0172
9	3	0,1111	59	7,6811	0,0169
10	3,1623	0,1	**60**	7,7460	0,0167
11	3,3166	0,0909	61	7,8102	0,0164
12	3,4641	0,0833	62	7,8740	0,0161
13	3,6056	0,0769	63	7,9373	0,0159
14	3,7417	0,0714	64	8	0,0156
15	3,8730	0,0667	**65**	8,0623	0,0154
16	4	0,0625	66	8,1240	0,0152
17	4,1231	0,0588	67	8,1854	0,0149
18	4,2426	0,0556	68	8,2462	0,0147
19	4,3589	0,0526	69	8,3066	0,0145
20	4,4721	0,05	**70**	8,3666	0,0143
21	4,5826	0,0476	71	8,4261	0,0141
22	4,6904	0,0455	72	8,4853	0,0139
23	4,7958	0,0435	73	8,5440	0,0137
24	4,8990	0,0417	74	8,6023	0,0135
25	5	0,04	**75**	8,6603	0,0133
26	5,0990	0,0385	76	8,7178	0,0132
27	5,1962	0,0370	77	8,7750	0,0130
28	5,2915	0,0357	78	8,8318	0,0128
29	5,3852	0,0345	79	8,8882	0,0127
30	5,4772	0,0333	**80**	8,9443	0,0125
31	5,5678	0,0323	81	9	0,0123
32	5,6569	0,0313	82	9,0554	0,0122
33	5,7446	0,0303	83	9,1104	0,0120
34	5,8310	0,0294	84	9,1652	0,0119
35	5,9161	0,0286	**85**	9,2195	0,0118
36	6	0,0278	86	9,2736	0,0116
37	6,0828	0,0270	87	9,3274	0,0115
38	6,1644	0,0263	88	9,3808	0,0114
39	6,2450	0,0256	89	9,4340	0,0112
40	6,3246	0,025	**90**	9,4868	0,0111
41	6,4031	0,0244	91	9,5394	0,0110
42	6,4807	0,0238	92	9,5917	0,0109
43	6,5574	0,0233	93	9,6437	0,0108
44	6,6332	0,0227	94	9,6954	0,0106
45	6,7082	0,0222	**95**	9,7468	0,0105
46	6,7823	0,0217	96	9,7980	0,0104
47	6,8557	0,0213	97	9,8489	0,0103
48	6,9282	0,0208	98	9,8995	0,0102
49	7	0,0204	99	0,9499	0,0101
50	7,0711	0,02	**100**	10	0,01

TABLE TRIGONOMÉTRIQUE DE GRADE EN GRADE

Grades	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	
1	0,0157	0,9999	0,0157	63,6567	99
2	0,0314	0,9995	0,0314	31,8205	98
3	0,0471	0,9989	0,0472	21,2049	97
4	0,0628	0,9980	0,0629	15,8945	96
5	0,0785	0,9969	0,0787	12,7062	95
6	0,0941	0,9956	0,0945	10,5789	94
7	0,1097	0,9940	0,1104	9,0579	93
8	0,1253	0,9921	0,1263	7,9158	92
9	0,1409	0,9900	0,1423	7,0264	91
10	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	90
11	0,1719	0,9851	0,1745	5,7297	89
12	0,1874	0,9823	0,1908	5,2422	88
13	0,2028	0,9792	0,2071	4,8288	87
14	0,2181	0,9759	0,2235	4,4737	86
15	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653	85
16	0,2487	0,9686	0,2568	3,8947	84
17	0,2639	0,9646	0,2736	3,6554	83
18	0,2790	0,9603	0,2905	3,4420	82
19	0,2940	0,9558	0,3076	3,2506	81
20	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	80
21	0,3239	0,9461	0,3424	2,9208	79
22	0,3387	0,9409	0,3600	2,7776	78
23	0,3535	0,9354	0,3779	2,6464	77
24	0,3681	0,9298	0,3959	2,5257	76
25	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	75
26	0,3971	0,9178	0,4327	2,3109	74
27	0,4115	0,9114	0,4515	2,2148	73
28	0,4258	0,9048	0,4706	2,1251	72
29	0,4399	0,8980	0,4899	2,0413	71
30	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	70
31	0,4679	0,8838	0,5295	1,8887	69
32	0,4818	0,8763	0,5498	1,8190	68
33	0,4955	0,8686	0,5704	1,7532	67
34	0,5090	0,8607	0,5914	1,6909	66
35	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	65
36	0,5358	0,8443	0,6346	1,5757	64
37	0,5490	0,8358	0,6569	1,5224	63
38	0,5621	0,8271	0,6796	1,4715	62
39	0,5750	0,8181	0,7028	1,4229	61
40	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	60
41	0,6004	0,7997	0,7508	1,3319	59
42	0,6129	0,7902	0,7757	1,2892	58
43	0,6252	0,7804	0,8012	1,2482	57
44	0,6374	0,7705	0,8273	1,2088	56
45	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708	55
46	0,6613	0,7501	0,8816	1,1343	54
47	0,6730	0,7396	0,9099	1,0990	53
48	0,6845	0,7290	0,9391	1,0649	52
49	0,6959	0,7181	0,9691	1,0319	51
50	0,7071	0,7071	1	1	50
	Cosinus	Sinus	Cotangente	Tangente	Grades

TABLE TRIGONOMÉTRIQUE DE DEGRÉ EN DEGRÉ

Degrés	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
30	0,5	0,8660	0,5774	1,7321	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1	1	45
	Cosinus	Sinus	Cotangente	Tangente	Degrés

LEXIQUE

Apparier : Apparier deux triangles c'est faire correspondre à chaque sommet de l'un un sommet de l'autre et réciproquement.

Dire que les triangles $\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \end{matrix}$

sont appariés, c'est dire qu'au sommet A correspond D; à B, E; et à C le sommet F.

Appartenance : Signe $\in$, indique qu'un élément appartient à un ensemble :

$$x \in E.$$

La non-appartenance se note $\notin$.

Caractéristique : Une propriété caractéristique d'un être mathématique est une propriété qui n'appartient qu'à lui. Elle est logiquement équivalente à la définition et peut la remplacer.

La propriété d'avoir deux diagonales qui se coupent en leur milieu est une propriété caractéristique du parallélogramme.

Une propriété caractéristique d'un ensemble est une propriété que possède chaque élément de l'ensemble, et que seuls possèdent les éléments de cet ensemble.

Ex. : La propriété $M \in (\Delta)$, $MA = MB$ est caractéristique de la médiatrice (Δ) du segment AB.

Conclusion (voir **Implication**) : Proposition qui est nécessairement vraie quand une autre proposition (appelée « hypothèse ») est vraie.

L'hypothèse forme alors le premier membre d'une implication ayant la Conclusion pour second membre.

Synonyme : **Thèse**.

Convexe : Un ensemble $(\mathcal{E})$ de points est convexe si, contenant deux points, il contient le segment qui les joint.

$$A \in (\mathcal{E}) \text{ et } B \in (\mathcal{E}) \Longrightarrow \forall A, \forall B, M \in AB \quad \forall M,\ M \in (\mathcal{E})$$

La droite, le disque, le parallélogramme par exemple, sont des ensembles convexes.

Par extension on appelle *courbe convexe* une courbe qui appartient à la frontière d'un domaine convexe. Le cercle, tout arc de cercle, sont des courbes convexes.

Ensemble. Rappelons quelques ensembles que nous avons utilisés.

$\varnothing$ désigne l'ensemble vide.
N ensemble des entiers naturels.
Z ensemble des entiers algébriques.
Q ensemble des nombres rationnels.
Q^+ ensemble des rationnels positifs.
R ensemble des nombres réels.

Équivalence logique : Proposition complexe qui énonce qu'une proposition p en implique nécessairement une autre q, et que la proposition q implique la proposition p.

Ex. : Si a et b sont de même signe, ab est positif; et réciproquement.

Une équivalence logique se note $\Longleftrightarrow$

$$\text{sgn}\, a = \text{sgn}\, b \iff ab > 0.$$

Synonyme : **Implication mutuelle**.

Factoriser : Écrire un polynome identique à un polynome donné, sous la forme d'un produit de facteurs aussi simples que possible.

Ex. : Écrire le polynome $x^2 - 3x + 2$ sous la forme identique $(x - 1)(x - 2)$, c'est factoriser ce polynome.

Implication : Proposition complexe qui énonce que si une première proposition (appelée « hypothèse ») est vraie, alors, une autre proposition (appelée « thèse » ou « conclusion ») est nécessairement vraie.

Ex. : Si a et b sont positifs, alors le produit ab est positif.

Une implication se note $\Longrightarrow$.

$$a > 0 \text{ et } b > 0 \Longrightarrow ab > 0.$$

Implication mutuelle : (voir **Équivalence logique**).

Inclusion : On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, si tout élément de A appartient à B.

Notation : $A \subseteq B$

et : $A \subset B$

si B contient d'autres éléments que ceux de A (inclusion stricte).

Intersection : L'intersection de deux ensembles est l'ensemble (éventuellement vide) constitué par les éléments qui appartiennent à la fois au premier ensemble et au second ensemble.

Notation : $A \cap B$ (A inter B).

Hypothèse : Proposition qui, dans les cas où elle est vraie, permet de tirer une conséquence, ou des conséquences.

Ex. : Le triangle OAB est isocèle (OA = OB).

Une conséquence possible est $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (il y en a d'autres).

D'où l'implication :

OAB est isocèle $\Longrightarrow$ $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Nécessaire : 1° Le second membre d'une implication est une conséquence nécessaire du premier.

Ex. : Si a et b sont positifs, le produit ab est positif. Du fait que a et b sont positifs, il résulte nécessairement que ab est positif.

2° Le second membre d'une implication est pour le premier une condition nécessaire.

Si l'on veut que a et b soient positifs, il est nécessaire que leur produit soit positif (cela n'est d'ailleurs pas suffisant).

Proposition : Toute phrase qui exprime une pensée compréhensible est une proposition.

Une proposition peut être vraie, exemple : « Le nombre onze est premier ».

Une proposition peut être fausse, exemple : « Toutes les fleurs sont rouges ».

Elle peut être soit vraie, soit fausse selon les circonstances, exemple :

« Le triangle considéré est isocèle ».

Quantificateur : Symbole logique. Il existe deux quantificateurs : $\forall$ et $\exists$.

$\forall$ est le quantificateur *universel*; $\forall x$ se lit : « pour tout x », ou « quel que soit x ».

$\exists$ est le quantificateur *existentiel*; $\exists x$ se lit : « il existe un x ».

Ex. : n étant un entier, quel que soit n, il existe un entier qui le dépasse :

$$n \in \mathrm{N} \quad \forall n \quad \exists p \quad p > n.$$

Réciproque : La proposition réciproque d'une proposition directe énoncée sous forme d'implication (qui pourra être reconnue exacte ou non) est la proposition obtenue en échangeant l'hypothèse et la conclusion.

Lorsque l'hypothèse et la conclusion sont complexes, on continue à appeler réciproques des propositions obtenues en échangeant des parties.

Réunion : La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A ou B (le *ou* est disjonctif).

La réunion se note : $A \cup B$ (lire : A union B).

Suffisante : Le premier membre d'une implication exacte est pour le second une condition suffisante.

Ex. : Si a et b sont positifs, le produit ab est positif. Pour que ab soit positif : il *suffit* que a et b le soient. (Cela n'est d'ailleurs pas nécessaire).

Thèse (voir **Implication**) : Proposition qui est nécessairement vraie quand une autre proposition (appelée « hypothèse ») est vraie.

L'hypothèse forme alors le premier membre d'une implication ayant la thèse pour second membre.

Synonyme : **Conclusion.**

Transitive : Une relation entre les éléments d'un ensemble est transitive quand, étant vérifiée pour le couple rangé (a, b) et pour le couple rangé (b, c) elle est nécessairement vérifiée pour le couple rangé (a, c).

Ex. : $a < b$ et $b < c$ entraînent $a < c$.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION : UN PEU DE LOGIQUE

LIVRE I : REVISION D'ALGÈBRE

CHAPITRE I. — **Les nombres relatifs.**

CHAPITRE II. — **Calcul algébrique.**

CHAPITRE III. — **Calcul numérique.**

LIVRE II : REVISION DE GÉOMÉTRIE

CHAPITRE IV. — **Revision de géométrie.**

LIVRE III : LE CERCLE

CHAPITRE V. — **Étude géométrique.**

CHAPITRE VI. — **Angle inscrit.**

CHAPITRE VII. — **Problèmes de construction.**

LIVRE IV : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

CHAPITRE VIII

Équations du premier degré à une inconnue

CHAPITRE IX

Inéquations du premier degré à une inconnue.

CHAPITRE X

Équations du second degré à une inconnue.

CHAPITRE XI. — **Polynome du second degré.**

CHAPITRE XII

Systèmes d'équations du premier degré.

LIVRE V : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

CHAPITRE XIII

Le plan et la droite dans l'espace.

CHAPITRE XIV. — Orthogonalité.

CHAPITRE XV. — Applications diverses.

CHAPITRE XVI. — Symétries.

LIVRE VI : ÉLÉMENTS ORIENTÉS — VECTEURS

CHAPITRE XVII. — Géométrie rectiligne.

CHAPITRE XVIII. — Vecteurs.

CHAPITRE XIX. — Transformations.

LIVRE VII : FONCTIONS. GRAPHES

CHAPITRE XX

Fonctions. Coordonnées. Graphes.

CHAPITRE XXI. — Fonction $y = ax + b$.

CHAPITRE XXII. — Fonction $y = ax^2 + c$.

CHAPITRE XXIII

Fonction $y = ax^2 + bx + c$.

CHAPITRE XXIV. — Fonction $y = \frac{a}{x}$.

LIVRE VIII : TRIANGLES SEMBLABLES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

CHAPITRE XXV. — Similitude.

CHAPITRE XXVI. — Rapports trigonométriques.

LIVRE IX : PROBLÈMES RÉSOLUS

CHAPITRE XXVII. — Problèmes résolus.

Imprimé en France par l'Imprimerie GEORGES LANG, Paris.
Dépôt légal n° 3776-III-4-5840. 2e trimestre 1962.


BRODARD-TAUPIN
RELIURE